# Apunts de Comunicacions Analògiques i Digitals

Josep Sala
Departament de Teoria del Senyal i Comunicacions
Universitat Politècnica de Catalunya

Assignatura: Comunicacions Analògiques i Digitals (UPC/EUETIT)

19 de desembre de 2008

# Índex

# Capítol 1

# Senyals Aleatoris o Processos Estocàstics

L'anàlisi i disseny de sistemes de comunicacions analògics i digitals es basa en la manipulació de senyals de naturalesa aleatòria. En conseqüència, necessitem disposar de les eines matemàtiques necessàries per descriure aquest tipus de senyals i les modificacions que experimenten en les cadenes de processament dels emissors i receptors de comunicacions. En aquests apunts, considerem que l'estudiant disposa ja de coneixements bàsics de Teoria de Probabilitat (Variables Aleatòries Discretes i Continues i la seva caracterització estadística a través de distribucions i densitats de probabilitat).

Definim un senyal aleatori o procés (estocàstic) com una variable aleatòria $X$ indexada per una variable temporal $t$: entenem que $X(t)$ és un procés, si per qualsevol instant de temps $t = t_0$, $X(t_0)$ és una variable aleatòria. Degut a aquesta naturalesa aleatòria, el procés $X(t)$ està associat a una determinada distribució de probabilitat. La caracterització estadística del procés $X(t)$ vindrà donada doncs pel següent conjunt de distribucions de densitat de probabilitat,

$$p_{X(t_1),\cdots,X(t_N)}(x_1,\cdots,x_N) \tag{1.1}$$

per qualsevol conjunt d'instants de temps $\{t_1,\cdots,t_N\}$. Evidentment, en el cas general, les variables aleatòries $\{X(t_1),\cdots,X(t_N)\}$ no són necessàriament independents entre si.

La definició anterior de procés, tot i que general, pot resultar complexe d'aplicar. Una forma més senzilla de definir senyals aleatoris, i que utilitzarem habitualmente en el contexte de les Comunicacions, consisteix en introduir paràmetres aleatoris en l'expressió d'un senyal determinista. Per exemple, suposem una variable aleatòria $A$ de distribució Gaussiana, i una variable aleatòria $T$ de distribució uniforme en l'intèrval $[0,1]$, estadísticament independent d'$A$. Llavors, podem construir el següent senyal aleatori $X(t)$,

$$X(t) \quad = \quad A\cdot\Pi(t-T) \tag{1.2}$$

En aquest exemple, hem aleatoritzat l'amplitud i la posició d'un pols rectangular.

Com s'expresa en la pràctica la naturalesa aleatòria del senyal ?. Una forma directa de veure-ho és considerant el procés $X(t)$ com el conjunt de resultats o **realitzacions** d'un **experiment**. Entenem que el conjunt de realitzacions d'un procés és el conjunt de senyals possibles que podem obtenir quan efectuem un determinat experiment. Suposem que realitzem un total de $N_e$ experiments en paral·lel, llavors anomenem $x_i(t)$ la realització del procés $X(t)$ en l'experiment $i$-èssim,

$$E_i(X(t)) \quad = \quad x_i(t) \tag{1.3}$$

on, en l'exemple de l'equació (1.2), la generació de cada experiment s'efectuaria de la següent forma,

1. per l'experiment $i$-èssim, es generaria aleatòriament una amplitud $A_i$ i un retard $T_i$ segons les distribucions de densitat de probabilitat $p_A(a)$ i $p_T(\tau)$ especificades.

2. es substituirien els valors anteriors en la definició proporcionada per l'expressió (1.2), obtenint la forma d'ona $x_i(t) = A_i\Pi(t-T_i)$ de l'experiment $i$-èssim.

De fet, la descripció original (1.1) estaria implícita en aquest procediment.

Si ens imaginem les diferents realitzacions en una disposició vertical, anomenem l'eix vertical o eix d'experiments **eix estadístic** i l'eix horitzontal **eix temporal**. Tenim doncs,

1. **Eix Estadístic**: indexat per la variable discreta $i$ (nombre sencer) que ens indica un experiment o realització determinada $x_i(t)$ del senyal aleatori o procés estocàstic $X(t)$.
2. **Eix Temporal**: indexat per la variable continua $t$ (variable temporal) que ens determina un instant determinat de l'experiment $i$-èssim $x_i(t)$ del senyal aleatori o procés estocàstic $X(t)$.

## 1.1 Classificació de Processos

Podem classificar els processos en termes de la seva dependència temporal de la següent forma,

- **Processos Estacionaris**: processos amb propietats estadístiques independents del temps. És a dir, qualsevol distribució conjunta de probabilitat de mostres del procés és invariant a un desplaçament temporal $\tau$ qualsevol,

$$p_{X(t_1),\cdots,X(t_N)}(x_1,\cdots,x_N) \quad = \quad p_{X(t_1+\tau),\cdots,X(t_N+\tau)}(x_1,\cdots,x_N) \tag{1.4}$$

- **Processos Ciclo-Estacionaris**: processos amb propietats estadístiques que varien cíclicament en el temps. És a dir, qualsevol distribució conjunta de probabilitat de mostres del procés és invariant a un desplaçament temporal $nT$, on $T$ és el periode o cicle de variació de les estadístiques, i $n$ és qualsevol nombre sencer,

$$p_{X(t_1),\cdots,X(t_N)}(x_1,\cdots,x_N) \quad = \quad p_{X(t_1+nT),\cdots,X(t_N+nT)}(x_1,\cdots,x_N) \tag{1.5}$$

  La denominació ciclo-estacionarietat prové de que únicament els desplaçaments temporals $\tau$ múltiples d'un periode, $\tau = nT$ són vàlids per tornar a obtenir la mateixa estadística.

- **Processos No-Estacionaris**: processos amb propietats estadístiques sensibles (en principi) a un desplaçament temporal $\tau$. Estrictament parlant, els processos ciclo-estacionaris es classificarien en el conjunt dels processos no-estacionaris. En determinats casos es parla de processos quasi-estacionaris, si les estadístiques varien lentament en el temps.

En la classificació anterior, en Comunicacions ens ocuparem de processos dels dos primers tipus.

Resulta útil distingir entre dos tipus de promitjos,

- **Promitjos Temporals**: considerem un promig temporal definit per la següent expressió,

$$\overline{f}_x(\tau_1,\cdots,\tau_{N-1}) \quad = \quad \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x(t),\cdots,x(t+\tau_{N-1}))dt \tag{1.6}$$

  on $f(\cdot)$ és qualsevol funció d'un nombre determinat de mostres del procés $X(t)$. El resultat final és independent del temps $t$, atès que aquesta variable desapareix en la integral que efectua el promig temporal. No obstant, el resultat depèn dels retards $\tau_i$ continguts en l'expressió anterior. Com a cas particular d'aquesta definició, considerem $f(x) = |x|^2$, la qual cosa dóna lloc al valor quadràtic mig del senyal, o potència promig temporal,

$$P_x \quad = \quad \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt \tag{1.7}$$

- **Promitjos Estadístics**: considerem el valor esperat d'una funció de vàries mostres del procés $X(t)$,

$$\mathbb{E}\left[f(x(t),\cdots,x(t+\tau_{N-1}))\right] \tag{1.8}$$

  Observi que en l'expressió anterior s'ha substituït la integral associada al promig temporal per una esperança estadística. D'aquesta forma, el resultat del promig estadístic depèn, potencialment, del temps $t$ (a diferència dels promitjos temporals). En el mateix cas anterior, $f(x) = |x|^2$, obtenim la **Potència Instantània** del procés,

$$\sigma_X^2(t) \quad = \quad \mathbb{E}\left[|X(t)|^2\right] \tag{1.9}$$

Estretament relacionat amb els dos promitjos anteriors, temporals i estadístics, trobem el concepte d'**Ergodicitat**, que definim de la següent forma,

- **Ergodicitat**: anomenem un procés ergòdic quan es verifica que per qualsevol funció $f(\cdot)$, tal com la que es descriu en la definició de promitjos temporals/estadístics, es verifica la igualtat entre tots dos promitjos,

$$\overline{f}_x(\tau_1, \cdots, \tau_{N-1}) \quad = \quad \mathbb{E}\left[f(x(t), \cdots, x(t+\tau_{N-1}))\right] \tag{1.10}$$

  Evidentment, éssent el promig temporal independent del temps $t$, i el promig estadístic associat potencialment dependent del temps, la ergodicitat implica que el promig estadístic és, necessàriament, independent del temps. En conseqüència, la ergodicitat d'un procés implica la seva estacionarietat. No així a la inversa. A més a més, en ésser el promig estadístic un promig sobre realitzacions, la igualtat anterior també implica que el mateix promig temporal aplicat a qualsevol realització $x_i(t)$ del procés $X(t)$ ha de donar el mateix valor (independentment de la realització).

Implícitament en la definició del promig temporal estem suposant que la duració del procés és infinita. Podem formalitzar aquest concepte, de forma idèntica a com ho havíem fet pels senyals deterministes, distingint entre processos segons la següent classificació,

- **Processos d'Energia Mitja Finita**: processos pels quals es verifica que el valor esperat de l'energia de cada realització és finit,

$$E_X \quad = \quad \mathbb{E}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} |X(t)|^2 dt\right] < \infty \tag{1.11}$$

  Aquesta propietat no exclou que (amb probabilitat zero) una realització particular del procés no pugui tenir energia infinita.

- **Processos de Potència Mitja Finita**: processos pels quals es verifica que el valor esperat de la potència de cada realització és finit,

$$\sigma_X^2 \quad = \quad \mathbb{E}\left[\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |X(t)|^2 dt\right] < \infty \tag{1.12}$$

  Aquesta propietat no exclou que (amb probabilitat zero) una realització particular del procés no pugui tenir potència infinita. Aquest tipus de processos és el que habitualment tractarem en comunicacions.



Un procés té associats moments estadístics, de forma idèntica a una variable aleatòria. A diferència de les variables aleatòries, aquests moments ténen una dependència temporal. Definim els següents moments,

- **Moment de Primer Ordre**: o esperança del procés. Ve donat per l'expressió,

$$\mu_X(t) \quad = \quad \mathbb{E}[X(t)] \tag{1.13}$$

- **Moment d'Ordre** $r$: ve donat per l'expressió,

$$\mu_{X^r}(t) \quad = \quad \mathbb{E}[X^r(t)] \tag{1.14}$$

Les propietats anteriors d'ergodicitat i estacionarietat poden referir-se a un determinat ordre $r$. En aquest cas, parlarem d'estacionaritat d'ordre $r$ o bé d'ergodicitat d'ordre $r$.

## 1.2 Correlació Creuada

Una forma intuïtiva de mesurar la semblança entre senyals aleatoris és a partir de la següent magnitud o potència d'error,

$$\sigma_e^2(t;\tau) \quad = \quad \mathbb{E}\left[|X(t) - Y(t+\tau)|^2\right] \tag{1.15}$$

on $t$ representa el temps absolut i $\tau$ el temps relatiu entre senyals o retard. El senyal diferència entre tots dos senyals: $e(t;\tau) = X(t) - Y(t+\tau)$, és tambe un procés aleatori. La seva potència estadística ens proporciona per a uns $t, \tau$ determinats el grau de semblança: valors petits de $\sigma_e^2(t;\tau)$ (en relació a la potència dels dos processos) s'associen a una elevada semblança entre $X(t)$ i $Y(t)$. A partir d'aquesta potència d'error extraurem una mesura de semblança que anomenarem **correlació**. Desenvolupant el mòdul quadrat, arribem a la següent expressió,

$$\sigma_e^2(t;\tau) \quad = \quad \mathbb{E}|X(t)|^2 + \mathbb{E}|Y(t+\tau)|^2 - 2\mathrm{Re}\left[\mathbb{E}\left[X^*(t)Y(t+\tau)\right]\right] \tag{1.16}$$

El tercer terme és d'on extreurem la funció de correlació creuada entre els processos $X(t)$ i $Y(t)$. Un inconvenient de l'expressió anterior és que el grau de semblança que mesura depèn de la potència instantània absoluta dels dos processos: els dos primers termes $\sigma_X^2(t) = \mathbb{E}|X(t)|^2$ i $\sigma_Y^2(t+\tau) = \mathbb{E}|Y(t+\tau)|^2$. Ens podem plantejar un cas en que tots dos processos són molt similars: $Y(t) = \lambda \cdot X(t - t_0)$. És a dir, el segon procés és una versió escalada i retardada del primer procés. Aquest simple exemple constitueix un cas molt important en comunicacions, on resulta d'enorme interès poder detectar semblances d'aquest tipus entre senyals aleatoris. L'inconvenient de la funció error tal com l'hem definit fins ara està en què és sensible a l'escalat $\lambda$: per $\lambda \neq 1$ podem verificar que $\sigma_e^2(t;t_0) \neq 0$, quan ens interessaria poder tenir un error modificat independent de l'escalat, i per tant, de la potència dels processos, tal que generés un error nul per $\tau = t_0$. Podem definir aquest error modificat normalitzant tots dos processos a la seva potència instantània,

$$\sigma_{\overline{e}}^2(t;\tau) \quad = \quad \mathbb{E}\left|\frac{X(t)}{\sigma_X(t)} - \frac{Y(t+\tau)}{\sigma_Y(t+\tau)}\right|^2 \tag{1.17}$$

on de fet estaríem aplicant la definició original d'error als processos normalitzats $\overline{X}(t) = X(t)/\sigma_X(t)$ i $\overline{Y}(t) = Y(t)/\sigma_X(t)$. Ara, la potència instantània dels processos normalitzats és sempre la unitat (amb l'excepció d'aquells punts on $\sigma_X^2(t) = 0$, on podem suposar que el procés normalitzat $\overline{X}(t)$ és idènticament nul: $\overline{X}(t) = 0$). Operant amb la definició anterior, arribem a una nova expressió d'error,

$$\sigma_{\overline{e}}^2(t;\tau) \quad = \quad 2\left(1 - \frac{\mathrm{Re}\left[\mathbb{E}\left[X^*(t)Y(t+\tau)\right]\right]}{\sigma_X(t)\sigma_Y(t+\tau)}\right) \tag{1.18}$$

Podem verificar ara que en el cas $Y(t) = \lambda \cdot X(t - t_0)$, aquest error és una magnitud sensible al retard i independent de l'amplitud.

Podem extreure ara del segon terme de l'expressió la definició de correlació, atès que serà una mesura significativa del tipus de semblança que cerquem,

- **Funció de Correlació Creuada**: donats dos processos $X(t)$ i $Y(t)$, la seva correlació creuada $r_{XY}(t;\tau)$ ve donada per l'expressió,

$$r_{XY}(t:\tau) \quad = \quad \mathbb{E}\left[X^*(t)Y(t+\tau)\right] \tag{1.19}$$

  Tot i que hem obtingut aquesta definició a partir de consideracions intuïtives, existeixen raons més profundes per definir-nos aquesta correlació creuada. Com veurem més endavant, se'n deriven propietats molt interessant per la caracterització de processos i per l'anàlisi i disseny de sistemes de comunicacions.

- **Funció d'Auto-Correlació**: donat un procés $X(t)$, prenem $Y(t) = X(t)$ per definir la funció d'autocorrelació $r_{XX}(t;\tau)$ del procés,

$$r_{XX}(t:\tau) \quad = \quad \mathbb{E}\left[X^*(t)X(t+\tau)\right] \tag{1.20}$$

Diem que dos processos $X(t)$ i $Y(t)$ són **processos incorrelats** quan la seva correlació creuada és nul·la per qualsevol $t, \tau$,

$$r_{XY}(t;\tau) \quad = \quad 0 \tag{1.21}$$

Podem examinar l'estructura de la funció de correlació creuada segons la classificació de processos vista anteriorment,

- **Processos Estacionaris**: si tots dos processos $X(t)$ i $Y(t)$ són simultàniament estacionaris, llavors desapareix la dependència en la variable temporal $t$,

$$r_{XY}(t;\tau) \quad = \quad r_{XY}(\tau) \tag{1.22}$$

  La demostració és immediata, atès que les estadístiques són invariants a qualsevol desplaçament,

- **Processos Ciclo-Estacionaris**: si tots dos processos $X(t)$ i $Y(t)$ tenen la mateixa freqüència cíclica $\nu$, llavors la correlació creuada es pot expressar en sèrie de Fourier,

$$r_{XY}(t;\tau) \quad = \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \rho_{XY}(\tau;k) \cdot e^{j2\pi k\nu t} \tag{1.23}$$

  on els coeficients del desenvolupament són funcions del retard $\tau$ únicament, i es poden calcular a partir de l'expressió habitual dels coeficients de Fourier,

$$\rho_{XY}(\tau;k) \quad = \quad \nu \int_0^{1/\nu} r_{XY}(t;\tau) \cdot e^{-j2\pi k\nu t} \tag{1.24}$$

  atès que el periode cíclic és $1/\nu$. Verifiquem doncs que els coeficients són únicament funció del retard $\tau$ en realitzar-se la integració en $t$. Destaquem que pot succeir que tots dos processos siguin individualment ciclo-estacionaris però no conjuntament ciclo-estacionaris si les freqüències cícliques respectives no mantenen una relació racional: $\nu_X \cdot n = \nu_Y \cdot m$, amb $n, m$ nombres sencers.

### 1.2.1 Propietats de la Correlació

La correlació creuada entre processos compleix les següents propietats,

1. **Fita superior**: si $\sigma_X^2(t)$ i $\sigma_Y^2(t)$ representen la potència instantània dels processos $X(t)$ i $Y(t)$, respectivament, llavors la correlació creuada entre ambdós processos verifica,

$$|r_{XY}(t;\tau)| \leq \sigma_X(t) \cdot \sigma_Y(t+\tau) \tag{1.25}$$

   La demostració és immediata recorrent a la desigualtat d'Schwartz per l'operador esperança. En el cas particular en què tots dos processos són estacionaris, la seva potència és independent del temps. Llavors tenim,

$$|r_{XY}(\tau)| \leq \sigma_X \cdot \sigma_Y \tag{1.26}$$

2. **Potència**: per $\tau = 0$ i $X(t) = Y(t)$, l'auto-correlació associada al retard nul és igual a la potència instantània del senyal,

$$r_{XX}(t;0) \quad = \quad \sigma_X^2(t) \tag{1.27}$$

   Veiem que en aquest cas, la desigualtat de la propietat anterior es verifica amb igualtat, d'on obtenim que $|r_{XX}(t;\tau)|$ té un màxim en $\tau = 0$,

$$|r_{XX}(t;\tau)| \quad \leq \quad r_{XX}(t;0) = \sigma_X^2(t) \tag{1.28}$$

3. **Potència Promig Temporal**: per un procés ciclo-estacionari $X(t)$ es verifica que el promig temporal de la seva potència instantània és precisament el coeficient d'ordre zero del desenvolupament en sèrie de Fourier de la funció d'auto-correlació avaluat en $\tau = 0$,

$$\begin{aligned} P_X \quad &= \quad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sigma_X^2(t) dt \\ &= \quad \rho_{XX}(0;0) \end{aligned} \tag{1.29}$$

   Atès que $P_X$ és una potència promig, durant una part del temps la potència instantània $\sigma_X^2(t)$ pot superar $P_X$.

4. **Simetria Hermítica**: la funció d'autocorrelació d'un procés estacionari verifica la següent propietat de simetria,

$$r_{XX}(\tau) \quad = \quad r_{XX}^*(-\tau) \tag{1.30}$$

La funció de correlació creuada entre dos processos estacionaris verifica la següent propietat de simetria,

$$r_{XY}(\tau) \quad = \quad r_{YX}^*(-\tau) \tag{1.31}$$

### 1.2.2 Correlació i Filtres

El filtrat constituteix un sub-sistema bàsic en equips de comunicacions. El càlcul d'auto-correlacions a la sortida de filtres i de correlacions creuades entrada-sortida proporcionen relacions interessants en l'anàlisi posterior de sistemes de comunicacions. Examinarem primer la correlació creuada sortida-entrada d'un filtre. Definim el procés estacionari $Y(t)$ com la sortida del filtre de resposta impulsional $h(t)$ a un procés estacionari $X(t)$ a la seva entrada,

$$Y(t) \quad = \quad h(t) * X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau')X(t-\tau')d\tau' \tag{1.32}$$

La correlació sortida-entrada $r_{YX}(\tau)$ es calcula com,

$$\begin{aligned} r_{YX}(\tau) &= \mathbb{E}[Y^*(t)X(t+\tau)] \\ &= \mathbb{E}\left[X(t+\tau)\int_{-\infty}^{+\infty} h^*(\tau')X^*(t-\tau')d\tau'\right] \end{aligned} \tag{1.33}$$

L'operador esperança actua únicament sobre els processos. En conseqüència,

$$r_{YX}(\tau) \quad = \quad \int_{-\infty}^{+\infty} h^*(\tau')\mathbb{E}[X^*(t-\tau')X(t+\tau)]d\tau' \tag{1.34}$$

En ésser els processos estacionaris, tenim que,

$$\mathbb{E}[X^*(t-\tau')X(t+\tau)] \quad = \quad r_{XX}(t+\tau-(t-\tau')) = r_{XX}(\tau+\tau') \tag{1.35}$$

Efectuant el canvi de variable $\tau'' = -\tau'$ obtenim,

$$\begin{aligned} r_{YX}(\tau) &= \int_{+\infty}^{-\infty} h^*(-\tau'')r_{XX}(\tau-\tau'')(-d\tau'') \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h^*(-\tau'')r_{XX}(\tau-\tau'')d\tau'' \\ &= h^*(-\tau) * r_{XX}(\tau) \end{aligned} \tag{1.36}$$

Repetint idèntic procediment, podem demostrar que la correlació entrada sortida ve donada per,

$$r_{XY}(\tau) \quad = \quad h(\tau) * r_{XX}(\tau) \tag{1.37}$$

El càlcul de l'auto-correlació de sortida s'efectua de la següent forma,

$$\begin{aligned} r_{YY}(\tau) &= \mathbb{E}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h^*(\tau')X^*(t-\tau')d\tau' \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau'')X(t+\tau-\tau'')d\tau''\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h^*(\tau')h(\tau'')X^*(t-\tau')X(t+\tau-\tau'')d\tau'd\tau''\right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h^*(\tau')h(\tau'')\mathbb{E}[X^*(t-\tau')X(t+\tau-\tau'')]d\tau'd\tau'' \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h^*(\tau')h(\tau'')r_{XX}(t+\tau-\tau''-(t-\tau'))d\tau'd\tau'' \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h^*(\tau')h(\tau'')r_{XX}(\tau+\tau'-\tau'')d\tau'd\tau'' \end{aligned} \tag{1.38}$$

on podem apreciar una estructura de convolució en el terme $h(\tau'')r_{XX}(\tau+\tau'-\tau'')$ si prenem $\tau''$ com variable d'integració. Per tant, podem escriure,

$$\begin{aligned} r_{YY}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h^*(\tau')r_{XY}(\tau+\tau')d\tau' \\ &= h^*(-\tau) * r_{XY}(\tau) \\ &= h^*(-\tau) * h(\tau) * r_{XX}(\tau) \end{aligned} \tag{1.39}$$

on hem pogut expressar com obtenir l'auto-correlació a la sortida del filtre a partir de l'auto-correlació d'entrada i la resposta impulsional del filtre.

## 1.3 Espectre Creuat

L'espectre creuat constitueix la transformada de Fourier de la correlació creuada en el cas de processos estacionaris,

$$R_{XY}(f) = \mathbb{F}[r_{XY}(\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} r_{XY}(\tau)\cdot e^{-j2\pi f\tau}d\tau \tag{1.40}$$

L'espectre creuat ens permet tractar en el domini freqüencial les funcions de correlació creuada de processos a través de sistemes lineals d'una forma molt senzilla. Gràcies a les relacions convolutives derivades en l'apartat anterior, podem treballar en el domini freqüencial amb la resposta $H(f)$ del filtre,

$$\begin{aligned} R_{YX}(f) &= H^*(f)R_{XX}(f) \\ R_{XY}(f) &= H(f)R_{XX}(f) \\ R_{YY}(f) &= |H(f)|^2R_{XX}(f) \end{aligned} \tag{1.41}$$

### 1.3.1 Propietats de l'Espectre

L'espectre d'un procés estacionari verifica les següents propietats,

1. **No-Negativitat**: l'espectre és una magnitud real no-negativa,

$$R_{XX}(f) \geq 0 \tag{1.42}$$

2. **Potència**: la integral de l'espectre en tot el marge freqüencial ens proporciona la potència del procés,

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(f)\mathrm{d}f \tag{1.43}$$

Per demostrar-ho recorrem a la definició: en ésser $R_{XX}(f)=\mathbb{F}[r_{XX}(\tau)]$, tenim $r_{XX}(\tau)=\mathbb{F}^{-1}[R_{XX}(f)]$. Particularitzant la Transformada Inversa de Fourier en $\tau=0$, i sabent que $\sigma_X^2=r_{XX}(0)$, obtenim l'expressió desitjada.

3. **Simetria Parell**: l'espectre d'un procés real té simetria parell,

$$R_{XX}(f) = R_{XX}(-f) \tag{1.44}$$

## 1.4 Espectre de Densitat de Potència

En el cas de processos estacionaris, l'espectre de densitat de potència $S_{XX}(f)$ associat a un procés $X(t)$ ens proporciona informació de com es reparteix la potència del procés entre les diferents components freqüencials. La idea és molt simple: consideri un filtre pas banda ideal centrat a la freqüència $f_c$ i de banda $\Delta f$,

$$H(f) = \Pi\left(\frac{f-f_c}{\Delta f}\right) \tag{1.45}$$

Anomenarem aquest filtre **filtre d'anàlisi**. La seva funció és analitzar la potència continguda en la banda $[f_c - \Delta f/2, f_c + \Delta f/2]$ a partir de la mesura de potència del procés a la sortida del filtre: $Y(t) = h(t) * X(t)$, amb $h(t) = \mathbb{F}^{-1}[H(f)]$ la resposta impulsional del filtre d'anàlisi. Si volem que $S_{XX}(f)$ representi un espectre de densitat de potència, llavors, necessàriament, la potència del procés $Y(t)$ ha de provenir d'integrar la distribució de densitat en la banda respectiva,

$$\sigma_Y^2 \quad = \quad \int_{f_c - \Delta f/2}^{f_c + \Delta f/2} S_{XX}(f) \mathrm{d}f \tag{1.46}$$

La relació entre l'espectre de densitat de potència i la funció d'auto-correlació del procés $X(t)$ ve donada en termes del següent teorema,

- **Teorema de Wiener-Kintchine**: l'espectre de densitat de potència d'un procés estacionari $X(t)$ s'expressa com,

$$S_{XX}(f) \quad = \quad \mathbb{F}[r_{XX}(\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} r_{XX}(\tau) \cdot e^{-j2\pi f \tau} \mathrm{d}\tau \tag{1.47}$$

  on $r_{XX}(\tau)$ és la funció d'auto-correlació del procés. Veiem doncs que segons la definició d'espectre tenim: $S_{XX}(f) = R_{XX}(f)$.

La demostració del Teorema de Wiener-Kintchine és immediata. Podem expressar la potència a la sortida del filtre com,

$$\sigma_Y^2 \quad = \quad r_{YY}(0) \tag{1.48}$$

Segons les propietats de la transformada de Fourier tenim doncs,

$$\begin{aligned} r_{YY}(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{YY}(f) \mathrm{d}f \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 R_{XX}(f) \mathrm{d}f \\ &= \int_{f_c - \Delta f/2}^{f_c + \Delta f/2} R_{XX}(f) \mathrm{d}f \end{aligned} \tag{1.49}$$

És a dir, $R_{XX}$ compleix precisament la propietat definitòria d'un espectre de densitat de potència per qualsevol valor de $f_c$ i $\Delta f$. A més a més, segons les propietats de l'espectre, és real i positiva. En conseqüència podem establir que,

$$S_{XX}(f) \quad = \quad R_{XX}(f) \tag{1.50}$$

En la mateix línia, podem establir la següent generalització,

- **Espectre de Densitat de Potència Creuada**: completem l'esquema definit l'espectre de densitat de potència creuada de dos processos estacionaris $X(t)$ i $Y(t)$ com,

$$S_{XY}(f) \quad = \quad R_{XY}(f) \tag{1.51}$$

  de forma que a partir d'ara, podem parlar abreviar espectre de densitat de potència (creuada o no) simplement com espectre.

# Capítol 2

# Comunicacions Analògiques

En aquest capítol ens centrem en l'estudi d'aquells sub-sistemes de transmissió i recepció que són comuns tant als sistemes de comunicacions analògics com digitals. En particular, examinarem el processament del senyal útil banda base (senyal d'informació) a través d'una cadena de comunicacions pas banda així com el tractament dels processos aleatoris (soroll) que degraden l'enllaç de comunicacions. Ens interessa especialment el còmput de les funcions d'autocorrelació i espectres de densitat de potència del senyal útil i del senyal de soroll. Per un tractament més ampli dels sistemes de comunicacions analògiques, existeixen excel·lents obres de referència [A. Bruce Carlson; "Communication Systems: an introduction to signals and noise in electrical communication"] per aquells estudiants que desitjin complementar aquest document amb altres textos.

## 2.1 Definicions Generals

El propòsit general de tot sistema de comunicacions és transmetre informació d'un **punt origen** (font d'informació) a un **punt destí**, sota un **criteri de qualitat**.

Un sistema de comunicacions ve definit habitualment per la **cadena de comunicacions** expressada en termes de la concatenació de tres sub-sistemes en l'ordre següent,



1. **Transmissor**: és l'element que, a partir del senyal d'informació $x(t)$ (senyal banda base a l'entrada de la cadena de comunicacions), genera un senyal $x_T(t)$ a la seva sortida que es propagarà a través d'un medi de transmissió fins el destinatari de la informació. La funció del sub-sistema transmissor és adequar les característiques del senyal $x_T(t)$ al medi de transmissió. El processament efectuat pel transmissor és habitualment necessari perquè no necessàriament el senyal $x(t)$ és adequat per a ser injectat directament en el medi: per exemple, el cas en què $x(t)$ és un senyal pas baix i el medi de transmissió actua com un filtre pas banda que anul·la $x(t)$. Escrivim l'operació de transmissió com,

$$x_T(t) = \mathbb{T}[x(t)] \tag{2.1}$$

2. **Canal**: constitueix el medi físic de transmissió dels senyals que ens permet transferir informació d'origen a destí. A partir d'ara utilitzarem sempre la nomenclatura *canal de comunicacions* per referir-nos al medi de transmissió. El canal de comunicacions opera essencialment de forma aleatòria, fet que farà necessàries les eines matemàtiques desenvolupades en capítols anteriors. Ens centrarem bàsicament en canals modelables de la següent forma,

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathbb{C}[x_T(t)] && (2.2)\\ &= h_c(t) * x_T(t) + n(t) && (2.3) \end{aligned}$$

   on $y(t)$ és la sortida del canal, $h_c(t)$ és la resposta impulsional que modela la distorsió introduïda pel canal sobre el senyal transmès $x_T(t)$ i $n(t)$ és un senyal aleatori afegit pel canal en el propi procés de transmissió i que anomenarem **soroll de canal**. La presència del terme additiu $n(t)$ en el senyal rebut $y(t)$ ve motivada per la naturalesa dels processos físics inherents al medi de transmissió, i que més endavant discutirem.

3. **Receptor**: és l'element que a partir del senyal rebut a la sortida del canal de comunicacions ha de recuperar una versió $x_D(t)$ el més acurada possible del senyal d'informació $x(t)$: $x_D(t) \sim x(t)$, segons un determinat criteri de qualitat. Escrivim l'operació de recepció com,

$$x_D(t) \quad = \quad \mathbb{R}[y(t)] \tag{2.4}$$

   on $x_D(t)$ representa el senyal entregat pel receptor.

Tot sistema de comunicacions es dissenya sota uns determinats criteris de qualitat. L'objectiu que s'intenta conseguir és obtenir a la sortida de la cadena de comunicacions un senyal de la forma,

$$x_D(t) \quad = \quad \lambda \cdot x(t - t_0) + \eta(t) \tag{2.5}$$

on $\lambda$ i $t_0$ representen el guany i retard global del sistema i $\eta(t)$ és un terme de soroll sempre present en un escenari real, i que degrada la qualitat del senyal rebut. Depenent del tipus de senyal, pot ser tolerable una certa distorsió freqüencial sobre el senyal rebut de la forma $x_D(t) = h(t) * x(t) + \eta(t)$ (per exemple en senyals d'àudio), sempre sota uns determinats marges de qualitat, i que modelem amb la resposta impulsional $h(t)$. Veiem que el cas anterior és un cas particular amb $h(t) = \lambda\delta(t - t_0)$.

El criteri de qualitat habitual que utilitzem en comunicacions analògiques és la relació de potència de senyal a potència de soroll, o relació senyal soroll (SNR, equivalent a la nomenclatura anglesa *Signal-to-Noise Ratio*). Sota el model de comunicacions en (2.5), vindria definida per,

$$\mathrm{SNR}_D \quad = \quad \frac{\mathbb{E}[|\lambda x(t - t_0)|^2]}{\mathbb{E}[|\eta(t)|^2]} = |\lambda|^2 \frac{\sigma_X^2}{\sigma_\eta^2} \tag{2.6}$$

on el terme $\lambda \cdot x(t - t_0)$ representa el senyal útil o senyal d'interès.

Distingirem els següents tipus de sistemes de comunicacions,

1. **Sistemes de Comunicacions Banda Base**: el senyal transmès $x_T(t)$ és un senyal banda base.

2. **Sistemes de Comunicacions Pas Banda**: el senyal transmès $x_T(t)$ és un senyal pas banda generat a partir del senyal d'informació banda base $x(t)$. Aquest tipus de sistemes els trobem en ràdio-comunicacions, on el transmissor ha d'adequar les característiques del senyal al canal de comunicacions, constituït en aquest cas pel sistema conjunt antenna transmissora + medi de propagació + antenna receptora. En aquests sistemes, les antennes transmissores i receptores es modelen com filtres pas banda. És a dir, la transmissió i recepció a través d'una antenna és només eficient en un marge (banda) de freqüències al voltant de la freqüència central de l'antena.



## 2.2 Modulacions

Els conceptes desenvolupats en aquesta secció seran d'aplicació tant a sistemes de comunicació banda base com pas banda. Definim el següent concepte,

- **Modulació**: l'esquema de modulació d'un senyal especifica en quina forma es codifica el senyal d'informació $x(t)$ en el senyal transmès $x_T(t)$: és a dir, defineix l'estructura funcional del senyal transmès independentment de la seva realització física (implementació) i és per tant definició de la operació $\mathbb{T}[\cdot]$ en l'equació (2.1). Aquest concepte és extrapolable a comunicacions digitals.

Distingim també una segona classificació de sistemes de comunicacions que és extrapolable als sistemes de comunicacions digitals pas banda,

1. **Modulacions Lineals**: l'únic tipus de modulacions que considerarem en profunditat. A partir de la operació $\mathbb{T}[\cdot]$ efectuada pel transmissor, les modulacions lineals verifiquen la propietat,

$$\mathbb{T}[\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)] \quad = \quad \alpha_1 \mathbb{T}[x_1(t)] + \alpha_2 \mathbb{T}[x_2(t)] \tag{2.7}$$

   per qualsevol parella de valors $\alpha_1$,$\alpha_2$ i per qualsevol parella de senyals $x_1(t)$ i $x_2(t)$ (entenem habitualment que verifiquin les restriccions de banda del transmissor). Cal tenir en compte que tot i que funcionalment un esquema de modulació sigui lineal, l'electrònica dels dispositius amb la que es realitza el transmissor pot introduir efectes no-lineals fora del seu marge de funcionament que aparten el comportament del transmissor de la idealitat. En el disseny i operació del transmisor es tenen en compte aquests efectes per garantir que no s'excediran aquests límits de funcionament. Destaquem que un esquema de modulació lineal no és necessàriament invariant en el temps. És a dir, si $y(t) = \mathbb{T}[x(t)]$, això no implica necessàriament que $y(t-t_0) = \mathbb{T}[x(t-t_0)]$. Els següents són exemples de modulacions lineals,

(a) **Doble Banda Lateral (DBL)** o *Double Side Band* (DSB): ve definida per l'expressió,

$$x_T(t) \quad = \quad x(t) \cdot A_c \cos(2\pi f_c t) \tag{2.8}$$

Ens basarem en aquesta modulació per desenvolupar gran part de l'estudi dels sistemes de comunicacions pas banda analògics i digitals que tractarem en els següents capítols.

(b) **Banda Lateral Única (BLU)** o *Single Side Band* (SSB): aquesta modulació és aplicable únicament a senyals d'informació $x(t)$ que no continguin components de baixa freqüència i ve expressada per,

$$x_T(t) \quad = \quad h_{\mathrm{SSB}}(t) * (x(t) \cdot A_c \cos(2\pi f_c t)) \tag{2.9}$$

on $h_{\mathrm{SSB}}(t)$ és la resposta impulsional d'un filtre pas banda que selecciona un dels dos lòbuls espectrals del senyal DBL generat a la seva entrada.

2. **Modulacions No-Lineals**: el senyal transmès $x_T(t)$ prové de realitzar operacions no-lineals sobre el senyal d'informació $x(t)$. Per tant, no es verifica la propietat (2.7). Un cas especialment interessant de les modulacions no-lineals el constitueixen les **modulacions angulars** (PM i FM). Aquest tipus de modulacions presenta avantatges en comparació a les modulacions lineals sacrificant determinades característiques del senyal transmés com per exemple l'amplada de banda ocupada pel senyal transmès (banda de transmissió). Tot seguit definim breument l'estructura de les modulacions angulars. Per aprofondir en el tema recomanem el llibre de referència citat a l'inici del capítol.

(a) **Modulació de Fase** (*Phase Modulation* o PM): modulació pas banda definida per,

$$x_T(t) \quad = \quad A_c \cos\left(2\pi f_c t + \phi_\Delta x(t)\right) \tag{2.10}$$

Observem que el senyal d'informació $x(t)$ es transmet sobre la fase del senyal portador a freqüència $f_c$, on el factor $\phi_\Delta$ constitueix l'**índex de modulació de fase**.

(b) **Modulació de Freqüència** (*Frequency Modulation* o FM): modulació pas banda definida per,

$$x_T(t) \quad = \quad A_c \cos\left(2\pi f_c t + 2\pi f_\Delta \int_{-\infty}^{t} x(\tau) \mathrm{d}\tau\right) \tag{2.11}$$

Observem que el senyal d'informació $x(t)$ es transmet sobre la freqüència del senyal portador, on el factor $d_\Delta$ constitueix l'**índex de modulació de freqüència**: derivant l'argument del cosinus obtenim una relació lineal amb el senyal d'informació $x(t)$. La variant comercial d'FM realitza un pre-filtrat del senyal d'informació $x(t)$, de forma que en la equació anterior es substitueix $x(t)$ per la convolució $h_{\mathrm{PE}}(t) * x(t)$, on $h_{\mathrm{PE}}(t)$ és la resposta impulsional del filtre de pre-èmfasi de FM.

Tot i la complexitat de les dues definicions anteriors, aquestes modulacions permeten millorar les prestacions o qualitat del senyal rebut per una determinada potència en transmissió: diem que milloren l'eficiència en potència respecte altres modulacions. El preu que paguem és un increment en la banda ocupada pel senyal transmès. Per tant, juguem amb un compromís potència transmesa davant banda de transmissió.

Un cas no contemplat en la classificació anterior el constitueixen les modulacions que incorporen senyals pilot com per exemple,

1. **Modulació d'Amplitud** o Amplitude Modulation (AM): ve definida per la operació,

$$x_T(t) \quad = \quad (1 + m \cdot x(t)) \cdot A_c \cos(2\pi f_c t) \tag{2.12}$$

   on veiem que transmetem la superposició (suma) de dos senyals: un terme corresponent al senyal d'informació $x(t)$: $m \cdot x(t) \cdot A_c \cos(2\pi f_c t)$, més un terme (pilot) independent d'ell: $A_c \cos(2\pi f_c t)$. Veiem com fins i tot en absència d'informació: $x(t) = 0$, es segueix transmetent senyal: $x_T(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)$. Evidentment, una modulació d'aquest estil és ineficient en la utilització de la potència en transmissió perquè n'estem dedicant part a la transmissió del pilot enlloc d'invertir-la en la component que transporta el senyal d'informació $x(t)$. L'objectiu d'esquemes de modulació basats en pilots és facil·litar la tasca del receptor. Compensem la ineficiència en potència en el transmisor amb la possiblitat de tenir receptors de menor complexitat.

## 2.3 El Soroll en Ràdio-Comunicacions

Les ràdio-comunicacions es veuen degradades per la presència d'un senyal aleatori superposat al senyal rebut. Aquest soroll, de naturalesa ràdio-elèctrica, està provocat per l'agitació tèrmica de les mol·lècules del medi de propagació, així com per una contribució dels mateixos dispositius de recepció.

El senyal de soroll es modela com un procés estocàstic estacionari caracteritzat per la següent funció d'autocorrelació i espectre de densitat de potència,

$$r_{nn}(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau) \qquad \Longleftrightarrow \qquad S_{nn}(f) = \frac{N_0}{2} \tag{2.13}$$

Aquest model de senyal proporciona densitat espectral de soroll uniforme en tota la banda, i, en conseqüència, potència de soroll infinita: $\sigma_n^2 = r_{nn}(0) = (N_0/2)\delta(0) = \infty$. Evidentment, aquest model és únicament una simplificació útil del procés fśic real però que resulta suficientment acurat per l'anàlisi i disseny de sistemes de ràdio-comunicacions. De fet, qualsevol senyal de soroll "observable"en una situació real, ho serà a través dels efectes de filtrat associats al procés d'observació (per exemple, el filtrat associat a l'antena amb la que captem el senyal, juntament amb els filtres del receptor). És a dir, el soroll observat es pot expressar com,

$$n_O(t) = h_O(t) * n(t) \tag{2.14}$$

on $h_O(t)$ és la resposta impulsional del filtre que modela el procés d'observació del senyal. En conseqüència, el soroll observat vindrà caracteritzar per una potència $\sigma_O^2$ que depèn de la banda efectiva del filtre d'observació,

$$\begin{aligned}\sigma_O^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_{nn}(f)|H_O(f)|^2 \mathrm{d}f \\ &= \frac{N_0}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |H_O(f)|^2 \mathrm{d}f \end{aligned} \tag{2.15}$$

A mès a mès, l'amplitud del soroll $n_O(t)$ (soroll real) es modela estadísticament a partir d'una funció de densitat de probabilitat Gaussiana de mitja zero i potència $\sigma_O^2$,

$$p_{N_O(t)}(n_O) \quad = \quad \frac{1}{\sigma_O\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{n_O^2}{2\sigma_O^2}\right) \tag{2.16}$$

## 2.4 Sistemes de Comunicacions Banda Base

Distingim dos tipus de sistemes de comunicacions banda base,

1. **Tipus 1**: sistemes de comunicacions pròpiament de banda base. Per exemple: comunicacions a través de busos d'ordinador o bé sistemes d'emmagetzemament d'informació.

2. **Tipus 2**: models de sistemes de comunicació pas banda. L'anàlisi i disseny de sistemes de comunicació pas banda es pot reduir sempre al d'un sistema equivalent banda base.

### 2.4.1 Filtres Terminals Òptims (FTO)

En un sistema de comunicacions banda base caracteritzat per una resposta freqüencial del canal $H_C(f)$ i soroll $n(t)$ de densitat espectral de potència $S_{nn}(f)$ arbitrària, on el senyal de sortida del canal $z(t)$ s'expressa a partir del senyal transmès $x_T(t)$ com $z(t) = h_c(t) * x_T(t) + n(t)$, ens plantejarem quina ha d'ésser la resposta freqüencial $H_T(f)$ i $H_R(f)$ dels filtres en transmissió i recepció, respectivament, per maximitzar la relació SNR en recepció, on els FTO s'apliquen de la següent forma,

$$x_T(t) = h_T(t) * x(t) \tag{2.17}$$

$$x_R(t) = h_R(t) * z(t) \tag{2.18}$$

El senyal $x(t)$ constitueix el senyal d'informació i les respostes impulsionals $h_T(t)$ i $h_R(t)$ són les corresponents a les respostes freqüencials $H_T(t)$ i $H_R(f)$ mencionades anteriorment. El senyal $x_R(t)$ constitueix el senyal rebut a l'extrem final de la cadena de comunicacions. Caldrà tenir en compte que la SNR en recepció depèn no únicament de la resposta freqüencial normalitzada dels filtres sinó també del guany que presenti el filtre de transmissió: és a dir, podem augmentar arbitràriament la SNR en recepció simplement amplificant el senyal transmès (sortida del filtre $H_T(f)$) per un factor $\alpha$ convenient: $H_{T,\alpha}(f) = \alpha \cdot H_T(f)$. Evidentment no ens interessa una solució simplista sinó una solució que impliqui un ús eficient de la potència en transmissió. En conseqüència, el criteri d'optimització es pot formular de la següent forma,

- **Criteri**: maximització de la SNR en recepció per a una potència transmesa donada, o, equivalentment, maximització de la SNR en recepció per unitat de potència transmesa,

  $$\gamma = \frac{1}{S_T} \cdot \left(\frac{S}{N}\right)_R \tag{2.19}$$

  en termes de les respostes $H_T(f)$ i $H_R(f)$. Evidentment, aquest procés d'optimització s'ha de dur a terme sota la següent restricció,

- **Restricció**: extrem a extrem, la cadena de comunicacions s'ha de comportar com un canal ideal. És a dir, el senyal temporal rebut s'ha d'expressar a partir del senyal d'informació com l'aplicació d'un retard $T_r$ i un factor d'amplificació $k$ (més un terme de soroll $\eta_R(t)$),

  $$y(t) = k \cdot x(t - T_r) + \eta_R(t) \tag{2.20}$$

  on entenem que $y(t) = x_R(t)$. Per tant, independentment de la naturalesa del soroll $\eta_R(t)$, el senyal útil $x(t)$ es veu distorsionat en freqüència pels filtres de transmissió, canal i recepció consecutivament. D'aquí, la restricció equivalent a (2.20) a nivell de la resposta dels filtres, ve donada per,

  $$H_T(f)H_c(f)H_r(f) = k \cdot e^{-j2\pi T_r f} \tag{2.21}$$

Per resoldre el problema anterior ens cal únicament expressar totes les potències en termes de la resposta dels filtres i dels espectres de densitat de potència dels senyals implicats. Per tant,

$$S_T = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(f)|H_T(f)|^2 \mathrm{d}f \tag{2.22}$$

$$S_R = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(f)|H_T(f)H_c(f)H_R(f)|^2 \mathrm{d}f \tag{2.23}$$

$$N_R = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{NN}(f)|H_R(f)|^2 \mathrm{d}f \tag{2.24}$$

Aplicant la restricció de filtres terminals òptims tenim que la potència en recepció esdevé,

$$\begin{aligned} S_{R,\mathrm{FTO}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(f)|k \cdot e^{-j2\pi T_r f}|^2 \mathrm{d}f = |k|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(f)\mathrm{d}f \\ &= |k|^2 \sigma_X^2 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Per tant, com que la maximització de $\gamma$ equival a la minimització de $\gamma^{-1}$, tenim,

$$\gamma^{-1} = \frac{1}{|k|^2\sigma_X^2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(f)|H_T(f)|^2 \mathrm{d}f \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} S_{NN}(f)|H_R(f)|^2 \mathrm{d}f \tag{2.26}$$

En aquest punt podem recórrer a la desigualtat d'Schwarz i escriure,

$$\gamma^{-1} \geq \frac{1}{|k|^2\sigma_X^2} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{S_{XX}(f)}|H_T(f)| \cdot \sqrt{S_{NN}(f)}|H_R(f)| \mathrm{d}f \right|^2 \tag{2.27}$$

Aplicant l'equació de restricció tenim que $|H_T(f)| = |k|/|H_c(f)H_R(f)|$ i per tant la desigualtat anterior esdevé,

$$\gamma^{-1} \geq \frac{1}{\sigma_X^2} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{S_{XX}(f)S_{NN}(f)}}{|H_c(f)|} \mathrm{d}f \right|^2 \tag{2.28}$$

Veiem que aquesta fita inferior de $\gamma^{-1}$ queda expressada de forma independent de la resposta dels filtres $H_T(f)$ i $H_R(f)$. Com veurem tot seguit, aquesta fita és assolible: existeix una parella de filtres pels quals la desigualtat anterior es verifica amb igualtat. Segons les propietats de la desigualtat d'Schwarz, aquest fet es donarà únicament quan els integrands en (2.26) es troben en una relació de proporcionalitat. Per tant, podem escriure que,

$$S_{XX}(f)|H_{T,\mathrm{FTO}}(f)|^2 = S_{NN}(f)|H_{R,\mathrm{FTO}}(f)|^2 \tag{2.29}$$

en totes aquelles freqüències on $S_{XX}(f) \neq 0$. En aquesta equació ens apareixen dues incògnites. Combinant-la amb l'equació de restricció, podem aïllar les respostes de tots dos filtres i arribem a,

$$|H_{T,\mathrm{FTO}}|^2 = \frac{|k|}{|H_c(f)|}\sqrt{\frac{S_{NN}(f)}{S_{XX}(f)}} \tag{2.30}$$

$$|H_{R,\mathrm{FTO}}|^2 = \frac{|k|}{|H_c(f)|}\sqrt{\frac{S_{XX}(f)}{S_{NN}(f)}} \tag{2.31}$$

Finalment, de (2.28), obtenim el factor $\gamma$ associat als FTO,

$$\gamma_{\mathrm{FTO}} = \sigma_X^2 / \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{S_{XX}(f)S_{NN}(f)}}{|H_c(f)|} \mathrm{d}f \right|^2 \tag{2.32}$$

Podem extreure les següents conclusions de l'equació anterior,

1. la relació $\gamma_{\mathrm{FTO}}$ és independent de la potència $\sigma_X^2$ del senyal d'informació. Aquesta propietat resulta fàcil de demostrar passant el factor $\sigma_X^2$ del numerador de $\gamma_{\mathrm{FTO}}$ a l'interior de la integral. D'aquesta forma,

$$\gamma_{\mathrm{FTO}} = \left( \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{S_{XX,\mathrm{norm}}(f)S_{NN}(f)}}{|H_c(f)|} \mathrm{d}f \right|^2 \right)^{-1} \tag{2.33}$$

   on considerem un espectre de densitat de potència del senyal normalitzat a potència unitària,

$$S_{XX,\mathrm{norm}}(f) = \frac{1}{\sigma_X^2} \cdot S_{XX}(f) \tag{2.34}$$

   on resulta immediat verificar que l'àrea subtinguda per aquest espectre és la unitat.

2. la relació $\gamma_{\mathrm{FTO}}$ resulta ser sensible tant a la forma de la densitat espectral de potència de soroll a través del factor $S_{nn}(f)$, com al valor absolut de la seva àrea (potència de soroll), atès que, a diferència del senyal, no és normalitzable per cap altre factor depenent del soroll.

## 2.5 Sistemes de Comunicacions Pas Banda

En aquesta secció examinarem ja el format habitual en que es transmet la informació en els sistemes de ràdio-comunicacions. Veurem un primer anàlisi del senyal de comunicacions pas banda, el qual refinarem posteriorment mitjançant el concepte de **senyal equivalent pas baix**, expressat com un senyal complexe (amb part real i part imaginària). Veurem com el fet de basar la descripció d'aquest tipus de senyals en termes de senyals complexes ens facil·lita les operacions matemàtiques i ens proporciona una intuició valuosa sobre la naturalesa del senyal pas banda.

### 2.5.1 El senyal de comunicacions pas banda

Per introduir la forma definitiva del senyal de comunicacions procedirem en diversos passos, analitzant tant a nivell temporal com freqüencial la forma en que realitzem la transposició freqüencial del senyal (o senyals) d'informació per construir el senyal transmès $x_T(t)$ i la recuperació del mateix (o mateixos) en el receptor.

**Esquema número 1: transmissió**

En tots els casos, proporcionarem la versió temporal del senyal a l'esquerra de les equacions i la seva corresponent freqüencial (Transformada de Fourier del senyal temporal) a la banda dreta. Partim doncs d'un senyal $x(t)$ amb Transformada de Fourier $X(f)$, que suposarem de banda limitada a $|f| \leq B_x$, i generem el següent senyal transmès $x_T(t)$,

$$x_T(t) = x(t) \cdot \cos(2\pi f_c t) \quad \Leftrightarrow \quad X_T(f) = \frac{1}{2}X(f - f_c) + \frac{1}{2}X(f - f_c) \tag{2.35}$$

Veiem doncs que la multiplicació (modulació) pel **senyal portador** $\cos(2\pi f_c t)$ ens genera dos lòbuls freqüencials, un centrat a freqüències positives: $X_T^+(f) = \frac{1}{2}X(f - f_c)$, més un altre centrat a freqüències negatives: $X_T^-(f) = \frac{1}{2}X(f + f_c)$. La banda que ocupa el senyal pas banda $x_T(t)$ equival, per definició, a la ocupada per qualsevol dels dos lòbuls, $X_T^+(f)$ o $X_T^-(f)$, i s'anomena **banda de transmissió** amb la notació $B_T$. En el nostre cas, $B_T = 2B_x$.

**Límits sobre** $f_c$: si representem gràficament els dos components espectrals $X_T^-(f)$ i $X_T^+(f)$ del senyal modulat, i considerem que el senyal original $x(t)$ està limitat en banda: $X(f) = 0, |f| \geq B_x$, llavors cal que es verifiqui que $f_c \geq B_x$ per evitar que totes dues components $X_T^-(f)$ i $X_T^+(f)$ es superposin en algun punt. Com veurem en la part de recepció, aquesta condició és bàsica per garantir la recuperació del senyal original $x(t)$ a partir del senyal modulat.

- **Una interpretació intuïtiva**: el senyal pas baix $x(t)$, de variació lenta, es multiplica per un senyal portador $\cos(2\pi f_c t)$ de variacions molt més ràpides però d'amplitud constant. El senyal producte, o senyal transmès $x_T(t)$, incorpora la informació de $x(t)$ com variacions de l'amplitud originalment constant de la portadora $\cos(2\pi f_c t)$. Considerem els dos exemples següents,

  1. **Exemple 1**: el senyal d'informació és sempre positiu: $x(t) > 0$. Veiem com en aquest cas podem interpretar $x(t)$ directament com l'amplitud variant en el temps d'un senyal cosinus. Fixem-nos també en què els zeros del senyal transmès (instants de temps on s'anul·la $x_T(t)$) coincideixen amb els zeros del senyal portador: és a dir, la multiplicació per $x(t)$ no modifica la posició dels zeros i la informació $x(t)$ viatja únicament en l'amplitud.
  2. **Exemple 2**: el senyal d'informació $x(t)$ pot prendre qualsevol valor, tant positiu com negatiu com zero. En aquest cas no modifiquem únicament l'amplitud del senyal portador, sinó també la seva fase,

$$\begin{aligned} x_T(t) &= x(t) \cdot \cos(2\pi f_c t) && (2.36) \\ &= |x(t)| \cdot \cos(2\pi f_c t + \pi \cdot \text{sgn}[x(t)]) && (2.37) \end{aligned}$$

  Aquest constituirà el cas general.

### Esquema número 1: recepció

En la part de recepció, ens caldrà recuperar el senyal d'informació pas baix $x(t)$ a partir del senyal transmès pas banda $x_T(t)$. Efectuem doncs la següent operació,

$$z(t) = x_T(t) \cdot \cos(2\pi f_c t) \quad \Leftrightarrow \quad Z(f) = \frac{1}{2}X_T(f - f_c) + \frac{1}{2}X_T(f + f_c) \tag{2.38}$$

que és precisament la mateixa operació que havíem realitzat en transmissió !. Ara substituïm en l'equació anterior l'equació (2.35) on apareix $x(t)$ i arribem a,

$$\begin{aligned} z(t) &= x(t) \cdot \cos^2(2\pi f_c t) \\ &= x(t) \cdot \frac{1 + \cos(2\pi(2f_c)t)}{2} \quad \Leftrightarrow \quad Z(f) = \frac{1}{2}X(f) + \frac{1}{4}X(f - 2f_c) + \frac{1}{4}X(f + 2f_c) \end{aligned} \tag{2.39}$$

on hem utilitzat l'identitat trigonomètrica del cosinus de l'angle doble. El senyal $z(t)$ conté ara dos components superposats,

1. **component banda base**: el component,

$$z_{\mathrm{bb}}(t) = \frac{1}{2}x(t) \quad \Leftrightarrow \quad Z_{\mathrm{bb}}(f) = \frac{1}{2}X(f) \tag{2.40}$$

   que constitueix el component útil que intentarem extreure de $z(t)$.

2. **component pas banda**: el component,

$$z_{\mathrm{pb}}(t) = \frac{1}{2}x(t)\cos(2\pi(2f_c)t) \quad \Leftrightarrow \quad Z_{\mathrm{pb}}(f) = \frac{1}{4}X(f - 2f_c) + \frac{1}{4}X(f + 2f_c) \tag{2.41}$$

   que constitueix el component no desitjat constituït per dues rèpliques freqüencials de $x(t)$ centrades a $\pm 2f_c$ que intentarem eliminar.

Com realitzem doncs la recuperació del senyal d'informació ?: si examinem l'aspecte de $Z(f)$, ens caldrà únicament seleccionar la rèplica central $Z_{\mathrm{bb}}(f)$ amb una simple operació de filtrat. Suposem doncs un filtre de resposta impulsional $h(t)$ i resposta freqüencial $H(f)$ que sigui uniforme en la banda ocupada per $X(f)$ (per exemple $H(f) = 1$) i nul ($H(f) = 0$) en totes aquelles freqüències ocupades pel senyal no desitjat $Z_{\mathrm{pb}}(f)$: $H(f) = \Pi(f/2B_x)$. Llavors,

$$z(t) * h(t) = \frac{1}{2}x(t) \quad \Leftrightarrow \quad Z(f)H(f) = \frac{1}{2}X(f) \tag{2.42}$$

i haurem recuperat el senyal original excepte per un factor d'escala 1/2 irrel·levant. Veiem doncs que utilitzant un filtre de recepció ajustat a la banda del senyal $x(t)$ (que suposem de banda limitada a $|f| \le B_x$), podem recuperar el senyal original. A nivell teòric considerem $H(f) = \Pi(f/2B_x)$, tot i que en un esquema real es treballarà amb filtres de banda de transició relaxada per garantir la seva realització física amb una complexitat tecnològica raonable. Sota aquestes condicions, tindrem estrictament que $f_c > B_x$. A la pràctica, en ràdio-comunicacions i si no existeixen senyals en bandes veïnes, tenim que $f_c >> B_x$.

- **Una interpretació intuïtiva**: una forma més intuïtiva de veure el procés consisteix en examinar la següent expressió de $z(t)$,

$$z(t) = x(t) \cdot \cos^2(2\pi f_c t) = \overbrace{\frac{1}{2}x(t)}^{z_{\mathrm{bb}}(t)} + \overbrace{\frac{1}{2}x(t)\cos(2\pi(2f_c)t)}^{z_{\mathrm{pb}}(t)} \tag{2.43}$$

  on gràcies a què la multiplicació de $x_T(t)$ per $\cos(2\pi f_c t)$ realitzada en el receptor introdueix el terme cosinus quadrat, i gràcies a què el cosinus quadrat es descompon en una component (offset) de continua, 1/2, més un terme de mitja zero (to pur a freqüència $2f_c$), $\cos(2\pi(2f_c)t)$, podem efectuar una operació de promitjat temporal (filtre pas baix $H(f)$), que farà que les oscil·lacions positives i negatives induïdes en $z_{\mathrm{pb}}(t)$ pel factor cosinus a $2f_c$ (molt més ràpides que les del senyal $x(t)$) quedin eliminades a la sortida del filtre $H(f)$, mentre que les úniques oscil·lacions que sobreviuen a aquesta operació de promitjat temporal del filtre són les associades a la variació temporal pròpia de $x(t)$, molt més lenta que la del terme cancel·lat.

**Esquema número 1: recepció en presència d'error de fase**

En aquest apartat considerem que tant l'oscil·lador local del transmissor com el del receptor no estan sincronitzats en fase. Aquesta situació és l'habitual atès que en ràdio-comunicacions tots dos oscil·ladors es troben en ubicacions geogràfiques diferents. Deixem per l'estudiant l'anàlisi del problema en presència també d'error de freqüència. Per tant, el senyal transmès ve modelat per,

$$x_T(t) = x(t) \cdot \cos(2\pi f_c t + \theta) \quad \Leftrightarrow \quad X_T(f) = \frac{1}{2}e^{+j\theta}X(f - f_c) + \frac{1}{2}e^{-j\theta}X(f + f_c) \tag{2.44}$$

on $\theta$ modela un desfasament arbitrari en el transmissor. La primera etapa de recepció efectua la següent operació,

$$z(t) = x_T(t) \cdot \cos(2\pi f_c t + \phi) \quad \Leftrightarrow \quad Z(f) = \frac{1}{2}e^{+j\phi}X_T(f - f_c) + \frac{1}{2}e^{-j\phi}X_T(f + f_c) \tag{2.45}$$

on $\phi$ modela un desfasament arbitrari en el receptor. Seguint el mateix procediment que en l'apartat 2.5.1, expressem $z(t)$ en termes de $x(t)$,

$$\begin{aligned} z(t) &= x(t)\cos(2\pi f_c t + \theta)\cos(2\pi f_c t + \phi) \\ &= x(t) \cdot \frac{\cos(2\pi(2f_c)t + \theta + \phi) + \cos(\theta - \phi)}{2} \quad \Leftrightarrow \quad Z(f) = \frac{1}{4}\overbrace{\left(e^{j(\theta-\phi)} + e^{-j(\theta-\phi)}\right)}^{2\cos(\theta-\phi)}X(f) + \\ &\qquad + \frac{1}{4}e^{+j(\theta+\phi)}X(f - 2f_c) + \frac{1}{4}e^{-j(\theta+\phi)}X(f + 2f_c) \end{aligned} \tag{2.46}$$

on, després d'aplicar el filtre $H(f)$ per eliminar les rèpliques a freqüència doble, ens queda,

$$h(t) * z(t) = \frac{1}{2}\cos(\theta - \phi) \cdot x(t) \quad \Leftrightarrow \quad Z(f)H(f) = \frac{1}{2}\cos(\theta - \phi) \cdot X(f) \tag{2.47}$$

Veiem doncs que l'única diferència respecte el cas anterior es troba en el factor $\cos(\theta - \phi)$ (cosinus del desfasament entre l'oscil·lador local de transmissió i l'oscil·lador local de recepció) que afecta l'amplitud del senyal recuperat. En funció del valor del desfasament podem distingir una sèrie de casos,

1. **oscil·ladors coherents**: sincronitzats en fase,

   $$\theta - \phi = 0 \rightarrow h(t) * z(t) = \frac{1}{2}x(t) \tag{2.48}$$

   El senyal es recupera amb màxima potència. Els oscil·ladors també poden quedar en contrafase,

   $$\theta - \phi = \pi \rightarrow h(t) * z(t) = -\frac{1}{2}x(t) \tag{2.49}$$

   i la potència del senyal recuperat també seria màxima.

2. **oscil·ladors en quadratura**: en aquest cas,

   $$\theta - \phi = \pm\pi/2 \rightarrow h(t) * z(t) = 0 \tag{2.50}$$

   i no resulta possible la recuperació del senyal.

3. **oscil·ladors no coherents**: la resta de casos. El senyal es rep però amb potència disminuïda.

**Esquema número 2: transmissió i recepció**

Com hem vist, el desfasament entre oscil·ladors local de transmissió i recepció pot dur a una pèrdua de potència. Passem a veure una segona possibilitat de transmissió de senyals pas banda on utilitzarem les propietats derivades anteriorment. Definim el següent senyal,

$$x_T(t) \quad = \quad x_I(t)\cos(2\pi f_c t) - x_Q(t)\sin(2\pi f_c t) \tag{2.51}$$

on els senyals $x_I(t)$ i $x_Q(t)$ reben el nom de senyals **component en fase** i **en quadratura** del senyal pas banda $x_T(t)$, respectivament. Suposarem també que $x_I(t)$ i $x_Q(t)$, són senyals de banda limitada. Utilitzant les propietats anteriors, podem veure com serà possible recuperar simultàniament tant $x_I(t)$ com $x_Q(t)$ en recepció. Utilitzarem les següents propietat demostrada en el procés de transmissió/recepció,

$$h(t) * (a(t) \cdot \cos(2\pi f_c t + \theta) \cdot \cos(2\pi f_c t + \phi)) = \frac{1}{2}\cos(\theta - \phi) \cdot a(t) \quad (2.52)$$

i derivem els següents casos particulars d'interès,

1. **Cas A (Productes creuats)**: les fases respectives verifiquen $(\theta = 0, \phi = -\pi/2)$ o bé $(\theta = -\pi/2, \phi = 0)$. En aquests dos casos, utilitzant la propietat trigonomètrica $\cos(\beta - \pi/2) = \sin(\beta)$, tenim,

$$\begin{aligned} h(t) * (a(t) \cdot \cos(2\pi f_c t) \cdot \sin(2\pi f_c t)) &= 0 & (2.53) \\ h(t) * (a(t) \cdot \sin(2\pi f_c t) \cdot \cos(2\pi f_c t)) &= 0 & (2.54) \end{aligned}$$

   en ésser $\cos(\theta - \phi) = \cos(\pi/2) = 0$ o bé $\cos(\theta - \phi) = \cos(-\pi/2) = 0$.

2. **Cas B (Productes no creuats)**: les fases respectives verifiquen $(\theta = \phi = 0)$ o bé $(\theta = \phi = -\pi/2)$. En aquests dos casos, $\theta - \phi = 0$ i per tant,

$$\begin{aligned} h(t) * (a(t) \cdot \cos(2\pi f_c t) \cdot \cos(2\pi f_c t)) &= \frac{1}{2}a(t) & (2.55) \\ h(t) * (a(t) \cdot \sin(2\pi f_c t) \cdot \sin(2\pi f_c t)) &= \frac{1}{2}a(t) & (2.56) \end{aligned}$$

Aquests casos particular ens proporcionen un mètode per recuperar tots dos senyals $x_I(t)$ i $x_Q(t)$. Aplicant les propietats del cas A i B, podem veure com,

1. **Recuperació de $x_I(t)$**: efectuem la següent operació,

$$\begin{aligned} h(t) * (x_T(t) \cdot \cos(2\pi f_c t)) &= h(t) * ((x_I(t)\cos(2\pi f_c t) - x_Q(t)\sin(2\pi f_c t)) \cdot \cos(2\pi f_c t)) \\ &= h(t) * (x_I(t) \cdot \cos(2\pi f_c t) \cdot \cos(2\pi f_c t)) - \\ &- h(t) * (x_Q(t) \cdot \sin(2\pi f_c t) \cdot \cos(2\pi f_c t)) \\ &= \frac{1}{2}x_I(t) - 0 & (2.57) \end{aligned}$$

2. **Recuperació de $x_Q(t)$**: efectuem la següent operació,

$$\begin{aligned} h(t) * (x_T(t) \cdot (-\sin(2\pi f_c t))) &= h(t) * ((x_I(t)\cos(2\pi f_c t) - x_Q(t)\sin(2\pi f_c t)) \cdot -\sin(2\pi f_c t))) \\ &= -h(t) * (x_I(t) \cdot \cos(2\pi f_c t) \cdot \sin(2\pi f_c t)) + \\ &+ h(t) * (x_Q(t) \cdot \sin(2\pi f_c t) \cdot \sin(2\pi f_c t)) \\ &= -0 + \frac{1}{2}x_Q(t) & (2.58) \end{aligned}$$



Veiem com, de forma dual a la combinació de la branca $I$ i de la branca $Q$ efectuada pel transmissor, el receptor utilitza dues branques per separar tots dos senyals, sense que cap d'elles interfereixi en la sortida de l'altre.

- **Una interpretació intuïtiva**: sense realitzar cap tipus de càlcul, podem verificar de forma immediata que els senyals $x_I(t)$ i $x_Q(t)$ es poden recuperar tots dos a partir de $x_T(t)$. L'eina que utilitzarem serà el Teorema del Mostratge: anomenem $T_c = 1/f_c$ el periode del to portador i prenem un periode de mostratge $T_s = T_c/4$. Per tant, avaluem $x_T(t)$ en múltiples d'aquest periode,

$$x_T(nT_s) = x_I(nT_s)\cos(2\pi f_c nT_s) - x_Q(nT_s)\sin(2\pi f_c nT_s) \quad (2.59)$$

en ésser $f_c T_c = 1$, podem escriure,

$$x_T(nT_s) \quad = \quad x_I(nT_s)\cos(\pi n/2) - x_Q(nT_s)\sin(\pi n/2) \tag{2.60}$$

Els factors $\cos(\pi n/2)$ i $\sin(\pi n/2)$ van prenent alternativament el valor zero, per $n$ senar i parell, respectivament. D'aqui podem veure com el senyal mostrejat $x_T[n] = x_T(nT_s)$ va prenent successivament els següents valors,

$$\cdots, x_T[0], x_T[1], x_T[2], x_T[3], x_T[4], x_T[5], \cdots = \cdots, x_I(0), -x_Q(T_s), -x_I(2T_s), x_Q(3T_s), x_I(4T_s), -x_Q(5T_s), \cdots$$

Per tant, a partir de les mostres parells de $x_T[n]$ podem recuperar el senyal $x_I(t)$ mostrejat a $T_s' = 2T_s$ (fent una correcció de signe en les mostres que toqui) i de les mostres senars podem recuperar el senyal $x_I(t)$ mostrejat a $T_s' = 2T_s$ (fent una correcció de signe en les mostres que toqui). Tenim doncs,

$$x_T[2k] \quad = \quad (-1)^k \cdot x_I(k(2T_s)) \tag{2.61}$$

$$x_T[2k+1] \quad = \quad (-1)^{k+1} \cdot x_Q(k(2T_s) + T_s) \tag{2.62}$$

Si aquest periode de mostratge verifica el criteri de Nyquist: $1/T_s' \geq 2B_x$, on $B_x$ és l'amplada de banda dels senyals en fase i quadratura, llavors podem recuperar $x_I(t)$ i $x_Q(t)$ a partir de les seves mostres de la forma exposada. Aquesta condició es tradueix en $1/T_s' = 1/2T_s = 2/T_c \geq 2B_x$, la qual efectivament condueix a la condició habitual $f_c = 1/T_c \geq B_x$ sobre la freqüència portadora.

### Esquema número 2: interpretació mòdul i fase

Hem vist com en ràdio-comunicacions la freqüència portadora $f_c$ és sempre molt més gran que l'amplada de banda $B_x$ del senyal d'informació. Això ens porta a pensar si podem expressar el senyal transmès de l'esquema 2 en termes de variacions de l'amplitud i fase del senyal portador. És a dir, anem a veure si podem trobar una amplitud $A(t)$ i una fase $\psi(t)$ tals que sigui possible la següent equivalència,

$$x_I(t)\cos(2\pi f_c t) - x_Q(t)\sin(2\pi f_c t) \quad = \quad A(t) \cdot \cos(2\pi f_c t + \psi(t)) \quad , \quad A(t) \geq 0 \tag{2.63}$$

Podem desenvolupar el terme de la dreta utilitzant l'identitat del cosinus de la suma com,

$$A(t) \cdot \cos(2\pi f_c t + \psi(t)) \quad = \quad A(t) \cdot \cos(\psi(t)) \cdot \cos(2\pi f_c t) - A(t) \cdot \sin(\psi(t)) \cdot \sin(2\pi f_c t) \tag{2.64}$$

De manera que l'equivalìncia amb $x_I(t)$ i $x_Q(t)$ és immediata,

$$A(t) \cdot \cos(\psi(t)) \quad = \quad x_I(t) \tag{2.65}$$

$$A(t) \cdot \sin(\psi(t)) \quad = \quad x_Q(t) \tag{2.66}$$

d'on podem arribar a la següent equivalència,

$$A(t) \quad = \quad +\sqrt{x_I^2(t) + x_Q^2(t)} \tag{2.67}$$

$$\tan(\psi(t)) \quad = \quad x_Q(t)/x_I(t) \tag{2.68}$$

Evidentment, en la **representació polar** (mòdul i fase) del senyal pas banda,

$$x_T(t) \quad = \quad A(t) \cdot \cos(2\pi f_c t + \psi(t)) \quad , \quad A(t) \geq 0 \tag{2.69}$$

podem introduir la informació directament en l'amplitud $A(t)$ i fase $\psi(t)$, enlloc de fer-ho en els components de fase i quadratura $x_I(t)$ i $x_Q(t)$. Alguns sistemes de comunicacions es basen en aquesta representació, com per exemple la ràdio FM comercial. En la representació polar (2.69), els termes $A(t)$ i $\psi(t)$ varien lentament en relació a la freqüència portadora. La informació de $\psi(t)$ viatja en els creuaments per zero de $x_T(t)$.

### 2.5.2 El senyal equivalent pas baix

Els càlculs realitzats en la secció anterior utilitzant propietats trigonomètriques resulten en general bastant farragosos. Veurem com la utilització de senyals complexes ens permet simplificar molt aquests càlculs. Ens definim el senyal **equivalent pas baix** $b_x(t)$ d'un senyal pas banda $x(t)$ com,

$$\begin{aligned} b_x(t) &= x_I(t) + jx_Q(t) \\ &= A(t) \cdot (\cos(\psi(t)) + j\sin(\psi(t))) \\ &= A(t) \cdot \exp\left(j\psi(t)\right) \end{aligned} \tag{2.70}$$

on aquest és un senyal complexe, amb parts real i imaginària els components en fase i en quadratura, respectivament. Resulta immediat verificar que es compleix la següent relació entre els senyals pas banda i equivalent pas baix,

$$\begin{aligned} x_T(t) &= \mathrm{Re}\left[b_x(t) \cdot e^{j2\pi f_c t}\right] \\ &= \mathrm{Re}\left[A(t)e^{j\psi(t)} \cdot e^{j2\pi f_c t}\right] \\ &= A(t) \cdot \cos(2\pi f_c t + \psi(t)) \end{aligned} \tag{2.71}$$

En funció de la relació anterior, el senyal $x(t)$ també el podem expressar com,

$$\begin{aligned} x_T(t) &= \mathrm{Re}\left[b_x(t) \cdot e^{j2\pi f_c t}\right] \\ &= \frac{1}{2}b_x(t) \cdot e^{j2\pi f_c t} + \frac{1}{2}b_x^*(t) \cdot e^{-j2\pi f_c t} \end{aligned} \tag{2.72}$$

on veiem que el senyal $b_x(t)$ es modula a la freqüència $+f_c$, mentre que el seu conjugat $b_x^*(t)$ es modula a la freqüència $-f_c$.

En general, tenim,

$$a_x(t) = b_x(t) \cdot e^{j2\pi f_c t} \tag{2.73}$$

$$= x_T(t) + jh_x(t) \tag{2.74}$$

on $a_x(t)$ (complexe) es coneix com **senyal analític**, de part real i imaginària el senyal pas banda $x_T(t)$ i el senyal $h_x(t)$, respectivament. Aquest últim rep el nom de **Transformada de Hilbert** del senyal $x_T(t)$, que representem amb la notació $h_x(t) = \mathbb{H}[x_T(t)]$. La transformada de Hilbert té certa utilitat en alguns plantejaments, però no es tractarà en aquest document. Per un tractament més ampli de la Transformada de Hilbert es poden consultar la referència indicada a l'inici del capítol.

A nivell freqüencial, si suposem els senyals $x_I(t)$ i $x_Q(t)$ d'energia finita (la seva Transformada de Fourier existeix) resulta fàcil veure que,

$$A_x(f) = B_x(f - f_c) \tag{2.75}$$

el senyal analític només té components no nul·les en la part positiva de l'espectre.

Hem vist fins ara com generar el senyal pas banda $x(t)$ a partir dels seus components $x_I(t)$ i $x_Q(t)$. La tasca del receptor serà realitzar el procés invers. Presentarem de moment el procediment en absència de soroll a l'entrada del receptor. Tot i que podríem arribar al mateix resultat treballant amb nombres reals, podem veure tot seguit com l'ús d'expressions complexes ens estalvia operacions. Multiplicant per l'exponencial complexe a menys la portadora tenim que,

$$x_T(t) \cdot e^{-j2\pi f_c t} = \frac{1}{2}b_x(t) + \frac{1}{2}b_x^*(t) \cdot e^{-j2\pi(2f_c)t} \tag{2.76}$$

on tenim ara el senyal d'interès $b_x(t)$ centrat a banda base, mentre que $b_x(t)$ ens queda centrat a $-2f_c$. Mitjançant un filtre pas baix $H(f)$ podem eliminar el component a freqüència doble, de forma que,

$$(x_T(t) \cdot e^{-j2\pi f_c t}) * h(t) = \frac{1}{2}b_x(t) \tag{2.77}$$

Hem recuperat doncs el senyal equivalent pas baix original, escalat pel factor 1/2.

### 2.5.3 Espectre de Densitat de Potència en Transmissió

En aquesta secció avaluem l'espectre de densitat de potència en transmissió per un sistema de comunicacions analògiques pas banda, en funció dels espectres respectius dels seus senyals component fase i quadratura. La demostració és el·laborada però ens permet arribar a un resultat molt compacte en termes de l'espectre de densitat de potència del senyal equivalent pas baix i que reflexa algunes simetries interessants a nivell espectral. Més endavant utilitzarem les equacions obtingudes per caracteritzar els espectres de densitat de potència en la cadena de transmissió i les relacions senyal a soroll associades. Partim doncs de la funció d'autocorrelació del senyal transmès, definida per,

$$r_{x_T x_T}(t;\tau) \quad = \quad \mathbb{E}[x_T(t) x_T(t+\tau)] \tag{2.78}$$

on hem prescindit del conjugat en tractar-se d'un senyal real. Suposem que els senyals component fase i quadratura són processos estacionaris definits per les següents funcions d'autocorrelació i correlació creuada,

$$\begin{aligned} r_{x_I x_I}(\tau) &= \mathbb{E}[x_I(t) x_I(t+\tau)] && (2.79) \\ r_{x_I x_Q}(\tau) &= \mathbb{E}[x_I(t) x_Q(t+\tau)] && (2.80) \\ r_{x_Q x_Q}(\tau) &= \mathbb{E}[x_Q(t) x_Q(t+\tau)] && (2.81) \end{aligned}$$

Desenvolupant la funció d'autocorrelació del senyal transmès (utilitzem la propietat $\mathrm{Re}[a]\mathrm{Re}[b] = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[ab] + \mathrm{Re}[a^* b]$) arribem a,

$$\begin{aligned} r_{x_T x_T}(t;\tau) &= \mathbb{E}\left[\mathrm{Re}[b_x(t) e^{j2\pi f_c t}]^* \cdot \mathrm{Re}[b_x(t+\tau) e^{j2\pi f_c (t+\tau)}]\right] && (2.82) \\ &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{2} b_x(t) b_x(t+\tau) e^{j2\pi f_c (2t+\tau)}\right] + \mathbb{E}\left[\frac{1}{2} b_x^*(t) b_x(t+\tau) e^{j2\pi f_c \tau}\right] && (2.83) \end{aligned}$$

D'on, en afectar els operadors esperança únicament als senyals aleatoris,

$$r_{x_T x_T}(t;\tau) \quad = \quad \overbrace{\frac{1}{2}\mathrm{Re}[r_{b_x b_x}(\tau) e^{j2\pi f_c \tau}]}^{r_E(\tau)} + \overbrace{\frac{1}{2}\mathrm{Re}[r_{b_x^* b_x}(\tau) e^{j2\pi f_c (2t+\tau)}]}^{r_C(t;\tau)} \tag{2.84}$$

on hem identificat el component estacionari $r_E(\tau)$ i el component ciclo-estacionari $r_C(t;\tau)$ (degut a l'aparició de la dependència periòdica induïda per la presència del factor exponencial complexe en la variable $t$). Podem identificar per separat les següents funcions de correlació,

1. **Autocorrelació de** $b_x(t)$: desenvolupada en funció de les correlacions entre els components fase i quadratura, tenim,

$$\begin{aligned} r_{b_x b_x}(\tau) &= \mathbb{E}[b_x^*(t) b_x(t+\tau)] && (2.85) \\ &= r_{x_I x_I}(\tau) + r_{x_Q x_Q}(\tau) + j(r_{x_I x_Q}(\tau) - r_{x_Q x_I}(\tau)) && (2.86) \end{aligned}$$

   on, segons les propietats de simètria de les correlacions creuades, tenim que $r_{x_Q x_I}(\tau) = r^*_{x_I x_Q}(-\tau)$, i en tractar-se d'un senyal real, $r_{x_I x_Q}(\tau) = r_{x_Q x_I}(-\tau)$. Per tant, la diferència $r_{x_I x_Q}(\tau) - r_{x_Q x_I}(\tau) = r_{x_I x_Q}(\tau) - r_{x_I x_Q}(-\tau)$ és un senyal de simetria senar.

2. **Correlació creuada entre** $b_x^*(t)$ **i** $b_x(t)$: desenvolupada en funció de les correlacions entre els components fase i quadratura, tenim,

$$\begin{aligned} r_{b_x^* b_x}(\tau) &= \mathbb{E}[b_x(t) b_x(t+\tau)] && (2.87) \\ &= r_{x_I x_I}(\tau) - r_{x_Q x_Q}(\tau) + j(r_{x_I x_Q}(\tau) + r_{x_Q x_I}(\tau)) && (2.88) \end{aligned}$$

   on, seguint idèntic raonament que abans, la part imaginària presenta simetria parell en ser $r_{x_I x_Q}(\tau) + r_{x_Q x_I}(\tau) = r_{x_I x_Q}(\tau) + r_{x_I x_Q}(-\tau)$. Veiem que aquesta correlació creuada és la que afecta directament a la component ciclo-estacionària de la correlació. L'únic cas en que s'anul·la és quan es verifiquen simultàniament les següents dues igualtats,

$$r_{x_I x_I}(\tau) = r_{x_Q x_Q}(\tau) \qquad , \qquad r_{x_I x_Q}(\tau) = -r_{x_I x_Q}(-\tau) \tag{2.89}$$

o el seu equivalent en el domini freqüencial,

$$S_{x_I x_I}(f) = S_{x_Q x_Q}(f) \qquad , \qquad S_{x_I x_Q}(f) = -S_{x_I x_Q}(-f) \tag{2.90}$$

És a dir, components fase i quadratura d'idèntica autocorrelació i amb correlació creuada de simetria senar.

Tot i que la funció d'autocorrelació $r_{x_T x_T}(t;\tau)$ pot contenir un terme ciclo-estacionari no nul de no verificar-se la condició examinada anteriorment, habitualment estem interessats en el valor promig (sobre un periode de la freqüència portadora) d'aquesta autocorrelació. Definim per tant **l'autocorrelació promig** de $x_T(t)$,

$$\begin{aligned}
\overline{r}_{x_T x_T}(\tau) &= \frac{1}{T}\int_0^T r_{x_T x_T}(t;\tau)\mathrm{d}t & (2.91)\\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Re}[r_{b_x b_x}(\tau)e^{j2\pi f_c \tau}] & (2.92)\\
&= r_E(\tau) & (2.93)
\end{aligned}$$

en anul·lar-se el component ciclo-estacionari $r_C(t;\tau)$ (de mitja zero). En termes de les correlacions reals dels components de fase i quadratura, podem considerar els següents dos casos de l'equació (2.92),

1. **Cas general de** $\overline{r}_{x_T x_T}(\tau)$:

$$\overline{r}_{x_T x_T}(\tau) = \frac{r_{x_I x_I}(\tau) + r_{x_Q x_Q}(\tau)}{2}\cdot\cos(2\pi f_c \tau) - \frac{r_{x_I x_Q}(\tau) - r_{x_I x_Q}(-\tau)}{2}\cdot\sin(2\pi f_c \tau) \tag{2.94}$$

2. **Cas d'interès de** $\overline{r}_{x_T x_T}(\tau)$: en aquest cas, segons les condicions (2.89) que anul·len el terme ciclo-estacionari $r_C(t;\tau)$ de l'autocorrelació, els senyals de fase i quadratura tenen la mateixa funció d'autocorrelació: $r_{x_I x_I}(\tau) = r_{x_Q x_Q}(\tau)$, i la seva correlació creuada té simetria senar: $r_{x_I x_Q}(\tau) = -r_{x_I x_Q}(-\tau)$. Substituïnt en (2.94), el cas general es simplifica per donar,

$$\overline{r}_{x_T x_T}(\tau) = r_{x_I x_I}(\tau)\cdot\cos(2\pi f_c \tau) - r_{x_I x_Q}(\tau)\cdot\sin(2\pi f_c \tau) \tag{2.95}$$

on el cas $r_{x_I x_Q}(\tau) = 0$ (senyals en fase i en quadratura incorrelats) constitueix un cas de particular interès que ens dóna $\overline{r}_{x_T x_T}(\tau) = r_{x_I x_I}(\tau)\cdot\cos(2\pi f_c \tau)$. Remarquem que en l'expressió anterior no apareix $r_{x_Q x_Q}(\tau) \neq 0$, però hi és present implícitament en ser $r_{x_I x_I}(\tau) = r_{x_Q x_Q}(\tau)$.

Reprenem l'anàlisi del cas general utilitzant la correlació complexe de $b_x(t)$: aplicant la propietat $\mathrm{Re}[z] = (z + z^*)/2$ a (2.92), podem escriure,

$$\overline{r}_{x_T x_T}(\tau) = \frac{1}{4}r_{b_x b_x}(\tau)e^{j2\pi f_c \tau} + \frac{1}{4}r^*_{b_x b_x}(\tau)e^{-j2\pi f_c \tau} \tag{2.96}$$

Efectuant la Transformada de Fourier de l'expressió anterior podem escriure la relació entre els espectres de densitat de potència promig del senyal pas banda i del senyal equivalent pas baix,

$$\begin{aligned}
\overline{S}_{x_T x_T}(f) &= \frac{1}{4}S_{b_x b_x}(f - f_c) + \frac{1}{4}S^*_{b_x b_x}(-\nu)\big|_{\nu = f + f_c}\\
&= \frac{1}{4}S_{b_x b_x}(f - f_c) + \frac{1}{4}S^*_{b_x b_x}(-f - f_c)\\
&= \frac{1}{4}S_{b_x b_x}(f - f_c) + \frac{1}{4}S_{b_x b_x}(-f - f_c) & (2.97)
\end{aligned}$$

on en l'últim pas apliquem que els espectres de densitat de potència són sempre reals (i no negatius). Cal tenir en compte en aquesta expressió que en ser $b_x(t)$ un senyal aleatori (estacionari) complexe de correlació arbitrària, no manté les propietats de simetria manifestades pels espectres de densitat de potència de senyals aleatoris reals. Per tant, caldrà considerar per separat els dos següents casos on utilitzarem les expressions anteriors obtingudes per $r_{b_x b_x}(\tau)$ en funció de les correlacions dels seus components de fase i quadratura,

1. **Cas General**: en aquest cas, aplicant Transformada de Fourier a l'equació (2.86), tenim,

$$S_{b_x b_x}(f) \quad = \quad S_{x_I x_I}(f) + S_{x_Q x_Q}(f) + j(S_{x_I x_Q}(f) - S_{x_I x_Q}(-f)) \tag{2.98}$$

on el terme $S_{x_I x_Q}(f)$ no és necessàriament real (examinem el cas d'interès).

2. **Cas d'interès**: en aquest cas tenim que la correlació creuada té simetria senar i per tant l'espectre creuat corresponent verifica $S_{x_I x_Q}(f) = jS_{IQ}(f)$ amb $S_{IQ}(f)$ real i senar: $S_{IQ}(f) = -S_{IQ}(-f)$, a partir de les propietats de simetria de transformada de Fourier. Per tant,

$$S_{b_x b_x}(f) \quad = \quad 2(S_{x_I x_I}(f) - S_{IQ}(f)) \tag{2.99}$$

d'on també comprovem com $S_{b_x b_x}(f) = S^*_{b_x b_x}(f)$ és real. Per tant, l'espectre de densitat de potència del senyal transmès ve donat per la següent expressió, on identifiquem els components situats en les bandes de freqüències positives, $S_T^+(f)$, i de freqüències negatives, $S_T^-(f)$,

$$\overline{S}_{x_T x_T}(f) = \overbrace{\frac{1}{4} S_{b_x b_x}(f - f_c)}^{S_T^+(f)} + \overbrace{\frac{1}{4} S_{b_x b_x}(-f - f_c)}^{S_T^-(f)} \tag{2.100}$$

on es verifica,

$$S_T^+(f) \quad = \quad \frac{1}{2}(S_{x_I x_I}(f - f_c) - S_{IQ}(f - f_c)) \tag{2.101}$$

$$S_T^-(f) \quad = \quad \frac{1}{2}(S_{x_I x_I}(-f - f_c) - S_{IQ}(-f - f_c)) = \frac{1}{2}(S_{x_I x_I}(f + f_c) + S_{IQ}(f + f_c)) \tag{2.102}$$

aplicant les propietats de simetria dels espectres $S_{x_I x_I}(f)$ i $S_{IQ}(f)$. Per tant, podem fer el càlcul invers,

(a) **Còmput de** $S_{x_I x_I}(f)$:

$$S_{x_I x_I}(f) = S_{x_Q x_Q}(f) = S_T^-(f - f_c) + S_T^+(f + f_c) \tag{2.103}$$

(b) **Còmput de** $S_{IQ}(f)$:

$$S_{IQ}(f) = S_T^-(f - f_c) - S_T^+(f + f_c) \tag{2.104}$$

Si a més a més tenim que $S_{IQ}(f) = 0$ (components de fase i quadratura incorrelats), llavors $S_{b_x b_x}(f) = 2S_{x_I x_I}(f)$ és real i té simetria parell. Per tant,

$$\overline{S}_{x_T x_T}(f) = \overbrace{\frac{1}{4} S_{b_x b_x}(f - f_c)}^{S_T^+(f)} + \overbrace{\frac{1}{4} S_{b_x b_x}(f + f_c)}^{S_T^-(f)} \tag{2.105}$$

Tot i que (2.100) representa el cas general, ens trobarem habitualment (sobretot quan efectuem els anàlisis de potència de soroll en recepció) en el cas de l'equació (2.105).

El procediment invers aplicat en la següent secció 2.6 a la cadena de recepció ens permetrà obtenir els components pas baix de l'espectre de densitat de potència a partir dels components pas banda $S_T^+(f)$ i $S_T^-(f)$.

## 2.6 El Soroll Pas Banda

En aquesta secció analitzarem el soroll present en diferents punts de la cadena de comunicacions pas banda, utilitzant les relacions matemàtiques de la secció anterior referides al còmput d'espectres de densitat de potència de senyals aleatoris pas banda.

### 2.6.1 Espectre de Densitat de Potència en Recepció

L'espectre de densitat de potència del soroll en el punt de recepció, a la sortida del filtre $H_R(f)$, ve donat per,

$$S_{n_R n_R}(f) \quad = \quad \int_{-\infty}^{+\infty} S_{nn}(f)|H_R(f)|^2 \mathrm{d}f \tag{2.106}$$

Les simetries que presenta aquest espectre respecte a la freqüència portadora venen determinades per la forma de l'espectre del soroll de canal i per la forma de la resposta freqüencial de $H_R(f)$. Habitualment considerarem $S_{nn}(f) = N_0/2$, i $H_R(f) = \Pi\left(\frac{f-f_c}{B_T}\right) + \Pi\left(\frac{f-f_c}{B_T}\right)$.

El soroll en el punt de recepció, $n_R(t)$, és també un senyal pas banda. Els components de soroll a la sortida del desmodulador de quadratura, $i_n(t)$ en el canal de fase i $q_n(t)$ en el canal de quadratura són els components del senyal equivalent pas baix de $n_R(t)$, que anomenarem $b_n(t)$,

$$b_n(t) \quad = \quad i_n(t) + jq_n(t) \tag{2.107}$$

En conseqüència, ens permeten reconstruir el soroll en el punt de recepció, $n_R(t)$, de la forma habitual,

$$n_R(t) \quad = \quad \mathrm{Re}\left[b_n(t) \cdot e^{j2\pi f_c t}\right] \tag{2.108}$$

$$\quad = \quad i_n(t)\cos(2\pi f_c t) - q_n(t)\sin(2\pi f_c t) \tag{2.109}$$

En el següent apartat, caracteritzarem estadísticament els components de soroll $i_n(t)$ i $q_n(t)$.

### 2.6.2 Espectre de Densitat de Potència de Soroll en Banda Base

Un senzill raonament ens permetrà avaluar, utilitzant resultats prèviament obtinguts, els espectres de densitat de potència i de potència creuada associats als components de soroll en banda base a la sortida del receptor, $i_n(t)$ i $q_n(t)$, sense haver de repetir els llargs desenvolupaments anteriors realitzats pel càlculs dels espectres de densitat de potència en transmissió. Destaquem la següent cadena de raonaments,

1. El soroll $n_R(t)$ en el punt de recepció és estacionari en haver-se obtingut a partir d'una operació de filtrat amb $H_R(f)$ a partir del soroll de canal $n(t)$ (estacionari).

2. El desmodulador de quadratura permet recuperar els components de fase i quadratura, $i_n(t)$ i $q_n(t)$, respectivament, del soroll pas banda $n_R(t)$: després de multiplicar per l'oscil·lador local (branca de fase o quadratura), la única component ciclo-estacionària és la associada a les freqüències $\pm 2f_c$, que queden eliminades pel filtre pas baix de sortida. En conseqüència, $b_n(t) = i_n(t) + jq_n(t)$ és estacionari.

3. Els components de $b_n(t)$: $i_n(t)$ i $q_n(t)$ (estacionaris), permeten reconstruir el soroll pas banda original $n_R(t)$ utilizant un modulador de quadratura: $n_R(t) = i_n(t)\cos(2\pi f_c t) - q_n(t)\sin(2\pi f_c t)$. El soroll $n_R(t)$ haurà de ser estacionari, tot i que la presència dels senyals $\cos(2\pi f_c t)$ i $\sin(2\pi f_c t)$ sembli indicar ciclo-estacionarietat. Recorrent a l'equació 2.84, on es poden veure els termes estacionari i ciclo-estacionari de l'autocorrelació (fent $b_x(t) = b_n(t)$), podem veure que això es verifica sempre que la relació 2.90 exposada més endavant es compleixi (fent també $b_x(t) = b_n(t)$).

4. Per tant, podem aplicar les equacions anteriorment obtingudes en (2.103-2.104) (les quals comprovarem que verifiquen la condició 2.90) per avaluar els espectres de densitat de potència de $i_n(t)$ i $q_n(t)$, així com el seu espectre creuat.



Utilitzant l'espectre de densitat de potència del soroll en recepció, $S_{n_R n_R}(f)$, podem calcular els espectres en banda base com,

$$S_{i_n i_n}(f) \quad = \quad S^-_{n_R n_R}(f - f_c) + S^+_{n_R n_R}(f + f_c) \tag{2.110}$$

$$S_{q_n q_n}(f) \quad = \quad S_{i_n i_n}(f) \tag{2.111}$$

$$S_{i_n q_n}(f) \quad = \quad S^-_{n_R n_R}(f - f_c) - S^+_{n_R n_R}(f + f_c) \tag{2.112}$$

Verifiquem que es compleix la condició 2.90 perquè $S_{q_n q_n}(f) = S_{i_n i_n}(f)$ (per construcció) i,

$$\begin{aligned} -S_{i_n q_n}(-f) &= -S^{-}_{n_R n_R}(-f - f_c) + S^{+}_{n_R n_R}(-f + f_c) \\ &= -S^{+}_{n_R n_R}(+f + f_c) + S^{-}_{n_R n_R}(f - f_c) \\ &= S_{i_n q_n}(f) \end{aligned} \tag{2.113}$$

on hem utilitzat que en ser $S_{n_R n_R}(f) = S_{n_R n_R}(-f)$ (simetria parell en ser $n_R(t)$ real), això ens implica la simetria $S^{-}_{n_R n_R}(f) = S^{+}_{n_R n_R}(-f)$.

### 2.6.3 Relacions Senyal a Soroll

En sistemes de comunicacions pas banda ens definim dues relacions senyal a soroll per caracteritzar la qualitat del senyal en la cadena de recepció: la relació senyal a soroll en els punts de recepció, $(S/N)_R$, i de detecció, $(S/N)_D$.

**Relació Senyal a Soroll en Recepció**

La relació senyal a soroll en recepció, $(S/N)_R$, és la que definim a la sortida del filtre pas banda frontal de recepció $H_R(f)$,

$$(S/N)_R = \frac{S_R}{N_R} \tag{2.114}$$

on $S_R$ i $N_R$ representen la poténcia de senyal útil i de soroll en el punt de recepció, i $H_R(f)$ representa el filtre frontal pas banda del receptor: $H_R(f) = \Pi\left(\frac{f-f_c}{B_T}\right) + \Pi\left(\frac{f+f_c}{B_T}\right)$. En quines circumstàncies és útil aquesta relació senyal a soroll en un punt intermig de la cadena de recepció ? Essencialment en el fet que segons la modulació utilitzada, la recuperació del senyal d'informació pot efectuar-se únicament dins d'un marge de relacions senyal a soroll a l'entrada del desmodulador banda base. Aquesta especificació resulta útil en algunes modulacions analògiques de naturalesa no-lineal (modulacions de fase, de freqüència i variacions d'aquestes) així com en modulacions digitals per garantir la operació de subsistemes com la recuperació de portadora o la sincronització.

**Relació Senyal a Soroll en Detecció**

La relació senyal a soroll en detecció representa és aquella referida a l'extrem final de la cadena de comunicacions. En el cas que ens ocupa, aquest punt són les dues sortides del desmodulador de quadratura atès que suposem que els compinents $x_I(t)$ i $x_Q(t)$ són directament els senyals d'informació. En un cas més general es refereix a la sortida del desmodulador, l'arquitectura del qual ja depèn del format de modulació utilitzat pel transmissor. Les relacions senyal a soroll a la sortida del desmodulador de quadratura vénen definides per,

$$(S/N)_{D,I} = S_{D,Q}/N_{D,I} \quad , \quad (S/N)_{D,Q} = S_{D,Q}/N_{D,Q} \tag{2.115}$$

amb $S_*$ i $N_*$ les potències de senyal útil i soroll en els punts indicats pels sub-índexos respectius.

# Capítol 3

# Comunicacions Digitals: Modulacions Lineals

En aquest capítol analitzarem l'estructura de la transmissió i recepció de senyals a través de sistemes de comunicacions digitals, on tractarem únicament el cas de **modulacions lineals**. Classifiquem primer els senyals que podem transmetre a través d'aquests sistemes en dos tipus,

1. **Fonts Analògiques**: senyals analògics $x(t)$, d'una amplada de banda màxima. El senyal analògic es converteix a una seqüència binària a través d'un procés de **conversió analògica a digital** (conversió A/D) seguit, habitualment, d'un procés de **compressió** a fi de reduir al màxim el nombre de bits finalment transmès i sense excessives pèrdues pel que fa a la reconstrucció en el receptor del senyal original. La conversió A/D es subdivideix en dues etapes,

   (a) Mostratge: es prenen mostres $x[m]$ del senyal analògic $x(t)$ a una freqüència $f_s$ com a mínim superior al doble de l'amplada de banda $B_x$ del senyal (criteri de Nyquist: $f_s \geq 2B_x$), on $x[m] = x(mT)$, amb $T = 1/f_s$ el periode de mostratge. Aquesta etapa es pot anomenar també de discretització, atès que convertim un senyal analògic $x(t)$ a un senyal discret $x[m]$.

   (b) Quantificació: codifiquem les mostres $x[m]$ amb un determinat nombre de bits de quantificació $b_Q$. En conseqüència, per un marge dinàmic $|x[m]| \leq A_{\max}$, disposem de $2^{b_Q}$ nivells de quantificació de pas $\Delta_Q = 2A_{\max}/2^{b_Q}$. Evidentment, aquest procés introdueix pèrdues irreversibles, tant menors com més gran sigui $b_Q$.

   Un exemple típic el constitueixen els senyals d'àudio i vídeo.

2. **Fonts Digitals**: font de naturalesa pròpiament digital. Un exemple típic el constitueixen els fitxers d'ordinador.



El senyal generat per la font d'informació acabarà codificat en una seqüència binària d'una determinada longitud a la que ens referirem com **missatge**. En aquest capítol considerarem, implícitament, que els missatges estan constituïts per una seqüència binària de longitud infinita i que per tant ens trobem en el segon dels dos següents modes de transmissió,

1. **Transmissió en mode ràfega**: el transmissor envia paquets d'informació contenint un nombre finit de bits entre periodes d'inactivitat. S'utilitza en entorns on diferents usuaris comparteixen el mateix medi de transmissió. Per exemple: usuaris mòbils accedint a un satèl·lit de comunicacions.

2. **Transmissió en mode continuu**: el transmissor envia bits ininterrompudament. S'utilitza en entorns on el transmissor és l'únic usuari del medi de transmissió (per exemple, en aplicacions de ràdio-difusió com la televisió per satèl·lit).

Degut a la naturalesa analògica del canal de transmissió, la seqüència de bits que injectem en un transmissor de comunicacions digital, s'ha de convertir en algun punt de la cadena de procés a senyal analògic. Tal com veurem pel cas de ràdio-comunicacions, la cadena de comunicacions analògica pas banda estudiada en el capítol anterior, s'utilitza com a suport (o cadena interna) dels senyals de comunicació digital.

Classificarem els sistemes de comunicacions digitals segons,

1. **Sistemes de Comunicacions Banda Base**: un exemple típic el constitueixen les comunicacions en busos d'ordinador o els sistemes d'emmagetzamament (discs durs, CD, DVD, codis de barres, etc.) on la informació es transmet com una seqüència de polsos banda base. En aquests casos el canal de comunicacions ve constituït per un medi material: les pistes del bus d'ordinador o el suport magnètic de gravació, en referència als dos exemples anteriors.

2. **Sistemes de Comunicacions Pas Banda**: en els quals classifiquem els sistemes de ràdio-comunicacions (comunicacions inalàmbriques). En general, podrem reduir l'estudi dels sistemes de comunicacions pas banda a un sistema equivalent en banda base. Distingim dos tipus de sistemes de comunicacions pas banda,

   (a) Sistemes de Comunicacions Pas Banda de Banda Estreta: l'amplada de banda dels senyals és molt més petita que la freqüència central del senyal (o freqüència portadora). El cas típic el constitueixen les comunicacions ràdio.

   (b) Sistemes de Comunicacions Pas Banda de Banda Ampla: l'amplada de banda dels senyals és comparable a la seva freqüència central. El cas típic el constitueixen les comunicacions submarines utilitzant ultrassons. Notem que en aquest cas el medi de transmissió no és l'espai buit com en comunicacions ràdio, sino un medi material. En els últims anys han aparegut també les anomenades comunicacions Ultra-Wide Band (UWB), en absència de senyal portador, basades en la transmissió inalàmbrica de polsos de molt curta durada.

La característica diferencial bàsica dels sistemes de comunicacions digitals respecte els analògics la constitueix el fet de que el transmissor únicament injecta en el canal de comunicacions una selecció de tots els senyals possibles (que ocupen una determinada banda de transmissió). De fet, la informació digital, considerada com un seqüència d' 1's i 0's, la podem considerar com una enumeració dins del conjunt de possibles senyals que constitueixen el "diccionari"de transmissió. Consideri, per exemple, que volem transmetre missatges limitats en longitud a 4 digits binaris. Això ens dóna un total de $2^4 = 16$ possibilitats. En conseqüència, el diccionari del transmissor, contindrà únicament 16 senyals, que podem anomenar $m_i(t)$, per $1 \leq i \leq 16$, cadascun associat a un missatge de 4 bits corresponent a la codificació en base binària $\mathbf{b}(i) = [b_0(i)b_1(i)b_2(i)b_3(i)]$ de l'índex $i$ del missatge $m_i(t)$. En aquesta part de l'assignatura veurem la forma mes comú de construir aquest diccionari de senyals: les modulacions lineals. La tasca del receptor serà, sense més detalls, determinar quin dels senyals $m_i(t)$ del diccionari, i per tant quin missatge, s'ha transmès realment.

D'idèntica forma a com vem procedir en la part de comunicacions analògiques, ens caldrà definir paràmetres que ens permetin evaluar la qualitat d'un sistema de comunicacions digital. Aquesta mesura es pot definir en termes de la probabilitat de que el receptor s'equivoqui en decidir quina seqüència binària ha enviat el transmissor. Cal afinar una mica aquesta definició, atès que podem treballar amb dues (o més) definicions,

1. **Probabilitat d'Error de Bit**: probabilitat de que el receptor s'equivoqui en la decisió del bit $b_k(i)$ corresponent a la posició $k$-èssima de la seqüència binària $\mathbf{b}(i)$ transmesa. Aquesta és la mesura de qualitat que de fet adoptarem. Com que treballarem en condicions estacionàries i implícitament considerarem seqüències binàries de longitud infinita, la probabilitat d'error de bit acabarà éssent (habitualment) independent de la posició en la seqüència.

2. **Probabilitat d'Error de Seqüència**: probabilitat de que el receptor s'equivoqui en decidir quin dels senyals del diccionari de transmissió s'ha transmès realment. Evidentment, en la probabilitat d'error de seqüència està implícit no equivocar-se en cap dels bits constituents. És per tant més restrictiva que la primera opció, especialment, per seqüències binàries prou llargues.

Les prestacions o criteri de qualitat d'un sistema de comunicacions digital es poden especificar mitjançant relacions com les corbes de probabilitat d'error de bit $p_e$ que ens mesuren la degradació experimentada pel sistema de comunicacions digital (global) en funció de les prestacions (relació senyal a soroll o magnituds relacionades) del sistema intern de transmissió analògica que actua com a suport. Tot i que aquesta forma de veure-ho és bastant il·lustrativa, en realitat, les corbes de probabilitat d'error es representen en termes d'una magnitud que no és exactament la relació senyal a soroll que hem vist fins aquests moments però que hi està molt relacionada. Aquesta magnitud, la relació entre energia de bit a densitat espectral de soroll ($E_b/N_0$), la veurem en el seu moment quan tractem el càlcul de probabilitats d'error. El que sí és important és tenir present que l'augment de la densitat espectral de soroll $N_0/2$, ens provoca degradacions de SNR en tota la cadena analògica, i això ens fa augmentar la probabilitat d'error de bit degradant les prestacions del sistema global.

Cal tenir en compte que la denominació comunicacions digitals es refereix a la forma en que es transmet la informació, no als senyals en sí: només existeix un nombre finit de missatges possibles $m_i(t)$ a transmetre si la seqüència d'informació binària conté un nombre finit de bits. De fet, tant per comunicacions analògiques com per comunicacions digitals, hem d'utilitzar dispositius i canals físics i els senyals involucrats seran en essència analògics en tots dos casos.

## 3.1 Equivalent Pas Baix del Senyal Digital

En la construcció del senyal digital, ens cal definir un procediment per "mapejar" digits binaris sobre el senyal equivalent pas baix a l'entrada del modulador de quadratura. Aquest procediment constarà de dues etapes,

1. **Constel.lació**: mapejat de bits a símbols. Un símbol $a_i$, és membre d'una constel.lació de $M$ símbols,

$$\mathbb{C} \;=\; \{a_1, a_2, \cdots, a_M\} \tag{3.1}$$

   de tal forma que cada símbol de la constel.lació necessita $b = \log_2 M$ bits per identificar-lo (etiqueta binària del símbol). D'aquesta forma, empaquetem grups de $b$ bits consecutius del senyal digital d'entrada per generar una seqüència de símbols de la constel.lació. Els símbols poden ésser nombres reals o complexes. Tot i que en principi podríem assignar etiquetes binàries a símbols de la constel-lació de forma arbitrària, veurem més endavant que la forma en què es faci ens afecta la probabilitat d'error de bit del sistema de comunicacions.

2. **Conformació de pols**: s'utilitza un pols $p(t)$ d'energia finita per transmetre cada símbol específic generat en l'etapa anterior. La conformació de pols es realitza segons la següent operació,

$$b_x(t) \;=\; \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a[k] \cdot p(t - kT_s) \tag{3.2}$$

   on $T_s$ és el temps de símbol i $a[k]$ el símbol transmès en l'instant $k$, d'entre tots els $M$ símbols possibles de la contel·lació $\mathbb{C}$. Observi que a partir d'una seqüència en temps discret, $a[k]$, generem un senyal $b_x(t)$ en temps continuu. Observi que cada símbol $a[k]$ viatja sobre una versió desplacada, centrada a $kT_s$, del pols $p(t)$. Aquest procediment s'anomena **modulació lineal**, en superposar diferents símbols $a[k]$ segons el sumatori anterior. En general, el pols $p(t)$ no ha d'estar necessàriament limitat al periode de símbol $T_s$, sino que les seves cues es poden extendre sobre els símbols veïns. Més endavant tractarem el disseny d'aquests polsos de conformació.

El senyal $b_x(t)$ anterior s'injecta en un modulador de quadratura. Si descomposem cada símbol en la seva part real i imaginària, $a[k] = I[k] + jQ[k]$ i considerem que el pols $p(t)$ és real (en la gran majoria de casos), tenim que els components en fase i quadratura venen expressats per,

$$x_I(t) \;=\; \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I[k] \cdot p(t - kT_s) \tag{3.3}$$

$$x_Q(t) \;=\; \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Q[k] \cdot p(t - kT_s) \tag{3.4}$$

### 3.1.1 Paràmetres d'Interès

Ens definim tot seguit els següents parametres d'interès,

1. **Velocitat de Bit**: nombre de bits transmesos per unitat de temps. Si definim $T_b$ com la duració d'un bit, llavors,

$$R_b = 1/T_b \tag{3.5}$$

Les unitats són bps (bits per segon), Kbps (Kilobits per segon), Mbps (Megabits per segon), Gbps (Gigabits per segon), etc.

2. **Bits per Símbol**: nombre de bits necessaris per identificar un símbol de la constel.lació,

$$b = \log_2 M \tag{3.6}$$

on $M$ és el nombre de punts (símbols) de la constel.lació.

3. **Velocitat de Símbol**: també anomenada **Velocitat de Senyalització** o nombre de símbols transmesos per unitat de temps,

$$R_s = 1/T_s = R_b/b \tag{3.7}$$

on el temps de símbol $T_s$ compleix $T_s = bT_b$, atès que cada símbol conté $b$ bits. Les unitats són símbols per segon o bauds. D'aquí podem utilitzar els múltiples Kbaud, Mbaud, etc.

### 3.1.2 Constel.lacions Típiques

Definim les següents constel.lacions per realitzat el mapejat de bits a símbol en la primera etapa de la modulació lineal,

1. **OOK**: o *On-Off Keying*. S'utilitza en comunicacions per fibra òptica. Els estats *on* i *off* es corresponen a l'activació i desactivació del làser, respectivament. Es pot utilitzar també com una constel.lació BPSK amb pilot de portadora.

$$\mathbb{C}_{\text{OOK}} = \{0, 1\} \tag{3.8}$$

Per aquesta constel·lació: $M = 2, b = 1$.

2. **BPSK**: o *Binary Phase Shift Keying*. D'àmplia utilització. No utilitza el canal de quadratura.

$$\mathbb{C}_{\text{BPSK}} = \{-1, +1\} \tag{3.9}$$

Per aquesta constel·lació: $M = 2, b = 1$.

3. **QPSK**: o *Quadrature Phase Shift Keying*. D'àmplia utilització. És equivalent a la utilització simultània de BPSK en els canals de fase i quadratura.

$$\mathbb{C}_{\text{QPSK}} = \{+1 + j, -1 + j, -1 - j, +1 - j\} = \{\pm 1 \pm j\} \tag{3.10}$$

Per aquesta constel·lació: $M = 4, b = 2$.

4. **M-PSK**: o *M-ary Phase Shift Keying*. Els símbols de la constel·lació es troben equi-distribuïts sobre un cercle de radi unitari. Per $M = 2$ i per $M = 4$, les constel·lacions 2-PSK i 4-PSK coincideixen amb les constel·lacions BPSK i QPSK, respectivament (deixant apart un factor d'escala irrel·levant), éssent aquesta última denominació la més habitual. Per $M = 8$ ($b = 3$) la denominació habitual és la de 8-PSK. $M = 16$ ($b = 4$) rarament s'utilitza. $M > 16 (b > 4)$ no s'utilitza.

$$\mathbb{C}_{M-\text{PSK}} = \{\exp(j(\pi/M + 2\pi i/M)), 0 \leq i \leq M - 1\} \tag{3.11}$$

5. **M-ASK**: o *M-ary Amplitude Shift Keying*. No utilitza el canal de quadratura. Els símbols es troben equi-espaciats en el canal de fase. Aquesta constel·lació no s'utilitza actualment. Pel cas $M = 2$ coincideix amb BPSK. Pel cas $M = 3$ ens dóna la constel·lació del sistema duobinari (aquesta constel·lació, ja en desús, es caracteritza per una distribució no equiprobable dels símbols).

$$\mathbb{C}_{M-\mathrm{ASK}} = \{2i - (M+1), 0 \leq i \leq M-1\} = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \cdots, \pm(M-1)\} \tag{3.12}$$

   La constel·lació M-ASK s'utilitza realment per construir la constel.lació M-QAM.

6. **M-QAM**: o *M-ary Quadrature Amplitude Modulation*. S'utilitza en ràdio-enllacos o en comunicacions per cable. Constitueix un exemple típic de constel.lació multi-nivell per assolir altes transferències d'informació sota restriccions d'amplada de banda: per $M$ elevat, permet empaquetar molts bits per símbol. Habitualment, $M \leq 1024$. Els punts d'aquesta constel·lació estan inclosos en la retícula quadrada definida per dues constel·lacions $M'$-ASK en el canal de fase i de quadratura, respectivament. Definint $M' = \lceil\sqrt{M}\rceil$, tenim, en general que

$$\mathbb{C}_{M-\mathrm{QAM}} \subseteq \mathbb{C}_{M'-\mathrm{ASK}} + j\mathbb{C}_{M'-\mathrm{ASK}} \tag{3.13}$$

   És a dir, els $M \leq M'^2$ punts de la constel·lació $\mathbb{C}_{M-\mathrm{QAM}}$ estan inclosos en els $M'^2$ punts de la constel·lació $\mathbb{C}_{M'-\mathrm{ASK}} + j\mathbb{C}_{M'-\mathrm{ASK}}$, però no a la inversa. Només en el cas en que $M$ és potència de 4: $M = 2^{2n}, M' = \sqrt{M} = 2^n$, tenim una constel·lació $M$-QAM exactament quadrada. Llavors,

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}_{2^{2n}-\mathrm{QAM}} &= \mathbb{C}_{2^n-\mathrm{ASK}} + j\mathbb{C}_{2^n-\mathrm{ASK}} && (3.14)\\
&= \{2i_I - (2^n+1) + j(2i_Q - (2^n+1)), 0 \leq i_I, i_Q \leq 2^n - 1\} && (3.15)\\
&= \{\pm 1 \pm j, \pm 1 \pm 3j, \pm 3 \pm j, \pm 3 \pm 3j, \cdots, \pm(2^n-1) \pm (2^n-1)j\} && (3.16)
\end{aligned}$$

   on els índexos $i_I, i_Q$ enumeren les posicions del símbol respecte els canals $I$ i $Q$, respectivament. Quan $M$ no és potència de 4, la constel·lació $M$-QAM es pot formar a partir de la retícula quadrada definida per $\mathbb{C}_{M'-\mathrm{ASK}} + j\mathbb{C}_{M'-\mathrm{ASK}}$ eliminant els símbols complexes de mòdul més elevat, els quals es situen en la zona propera als vèrtex de la retícula quadrada.

7. **M-APSK**: o *M-ary Amplitude Phase Shift Keying*. Històricament, la més recent, introduïda en l'estàndard de comunicacions DVB-S2. S'utilitza per optimitzar el rendiment dels amplificadors de radio-freqüència en comunicacions satèl.lit i es basa en la distribució dels $M$ símbols en una sèrie d'anells concèntrics. Permet la modificació dels diferents radis i els desplacaments relatius de fase dels símbols entre els diferents anells segons el tipus d'amplificador. La seva expressió general és,

$$\mathbb{C}_{\mathrm{M-APSK}} = \{\rho_k \cdot \exp(j(\phi_k + 2\pi i/M_k)), 1 \leq k \leq N_k, 0 \leq i \leq M_k - 1\} \tag{3.17}$$

   on $N_k$ correspon al nombre d'anells concèntrics de la constel·lació M-APSK, cadascun de radi $\rho_k$, i $M_k$ correspon al nombre de fases equi-espaciades $2\pi i/M_k$ que assignem al símbol $i$-èssim de l'anell $k$-èssim de la constel·lació. Apliquem també una rotació de fase $\phi_k$ adequada a l'anell $k$-èssim de la constel·lació. Cada símbol ve determinat per la parella d'índexos $(k, i)$. En funció de com es distribueixen els $M$ símbols en cadascun dels anells, es defineixen, per exemple, les constel·lacions (4+12)-APSK i (4+12+16)-APSK, con constel·lacions 16-APSK i 32-APSK, respectivament, en ser $M = 16 = M_1 + M_2$ per la primera ($M_1 = 4$ ímbols en l'anell interior i $M_2 = 12$ en l'anell exterior: $\rho_1 > \rho_2$) i $M = 32 = M_1 + M_2 + M_3$ per la segona constel·lació ($M_1 = 4$ símbols en l'anell interior, $M_2 = 12$ símbols en l'anell intermedi i $M_3 = 16$ símbols en l'anell exterior: $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$).



## 3.2 Espectre del Senyal Transmès

En aquesta secció determinarem la relació entre el pols de conformació $p(t)$ i la densitat espectral de potència del senyal digital pas banda. Ens cal abans de tot determinar la funció d'autocorrelació del senyal $b_x(t)$. En conseqüència,

$$\begin{aligned} r_{b_x b_x}(t;\tau) &= \mathbb{E}\left[b_x^*(t) b_x(t+\tau)\right] && (3.18)\\ &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^*[k]p^*(t-kT_s)\right)\left(\sum_{k'=-\infty}^{+\infty} a[k']p(t+\tau-k'T_s)\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{k,k'=-\infty}^{+\infty} a^*[k]a[k']\cdot p^*(t-kT_s)p(t+\tau-k'T_s)\right] && (3.19)\end{aligned}$$

Ara podem intercanviar el doble sumatori amb l'operador esperanca per obtenir,

$$r_{b_x b_x}(t;\tau) = \sum_{k,k'=-\infty}^{+\infty} \left(\mathbb{E}[a^*[k]a[k']]\right)\cdot p^*(t-kT_s)p(t+\tau-k'T_s) \qquad (3.20)$$

atès que els símbols $a[k]$ són els únics termes aleatoris de l'expressió anterior. En la majoria de casos en comunicacions digitals tenim que els símbols es troben incorrelats. És a dir, definint-nos la potència de la constel.lació com $\sigma_a^2 = \mathbb{E}[|a[k]|^2]$, tenim que,

$$\mathbb{E}[a^*[k]a[k']] = \sigma_a^2 \cdot \delta[k-k'] \qquad (3.21)$$

en termes de la delta discreta $\delta[k]$: $\{\delta[0]=1, \delta[k\neq 0]=0\}$. Per tant, $\mathbb{E}[a^*[k]a[k']]=0$ quan $k\neq k'$. En la reste de casos (símbols correlats), que no tractarem en aquest document, es pot dissenyar una correlació especfica pels símbols $a[k]$ que ens ajuda a controlar la forma de l'espectre de densitat de potència del senyal de comunicacions (codis de línea). De l'equació (3.21) es verifica que el doble sumatori en (3.20) es converteix en un sumatori simple (els termes associats a $k\neq k'$ queden ponderats per 0) i,

$$r_{b_x b_x}(t;\tau) = \sigma_a^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p^*(t-kT_s)p(t+\tau-kT_s) \qquad (3.22)$$

On $r_{b_x b_x}(t;\tau)$ constitueix un senyal periòdic en $t$, de periode el temps de símbol $T_s$, com resulta senzill verificar: $r_{b_x b_x}(t;\tau) = r_{b_x b_x}(t+nT_s;\tau)$ per qualsevol sencer $n$. En conseqüència, es pot expressar com un desenvolupament en sèrie de Fourier de la forma,

$$r_{b_x b_x}(t;\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(\tau)\cdot e^{j2\pi nt/T_s} \qquad (3.23)$$

Estem interessats únicament en la component de continua, $c_0(\tau)$, atès que és la única que influeix en la potència promig temporal (la resta de components per $n\neq 0$ tenen un promig temporal igual a zero). Llavors podem obtenir la funció d'autocorrelació sobre un periode com segueix,

$$\begin{aligned} \overline{r}_{b_x b_x}(\tau) &= c_0(\tau) && (3.24)\\ &= \frac{1}{T_s}\int_0^{T_s} r_{b_x b_x}(t;\tau)dt && (3.25)\end{aligned}$$

Podem avaluar aquesta expressió si ens adonem que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_s}\int_0^{T_s} r_{b_x b_x}(t;\tau)dt &= \frac{\sigma_a^2}{T_s}\int_0^{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} p^*(t-kT_s)p(t+\tau-kT_s)dt && (3.26)\\ &= \frac{\sigma_a^2}{T_s}\int_{-\infty}^{+\infty} p^*(t)p(t+\tau)dt && (3.27)\\ &= \frac{\sigma_a^2}{T_s} r_{pp}(\tau) && (3.28)\end{aligned}$$

On la magnitud $r_{pp}(\tau)$ és l'autocorrelació determinista d'un senyals (pols) d'energia finita, i que té la següent transformada de Fourier,

$$\begin{aligned} r_{pp}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p^*(t)p(t+\tau)dt & (3.29) \\ &= p(\tau) * p^*(-\tau) & (3.30) \\ R_{pp}(f) &= \mathbb{F}[r_{pp}(\tau)] & (3.31) \\ &= |P(f)|^2 & (3.32) \end{aligned}$$

Éssent $P(f) = \mathbb{F}[p(t)]$ la transformada de Fourier del pols de conformació $p(t)$. L'espectre de densitat de potència promig ve expressat llavors per,

$$\begin{aligned} \overline{S}_{b_x b_x}(f) &= \mathbb{F}[\overline{r}_{b_x b_x}(\tau)] & (3.33) \\ &= \frac{\sigma_a^2}{T_s}|P(f)|^2 & (3.34) \end{aligned}$$

Aquesta expressió ens permet relacionar de forma molt senzilla la densitat espectral de potència promig d'un senyal de comunicacions digitals amb la transformada de Fourier del pols de conformació.

El senyal pas banda transmès $x_T(t)$ tindrà doncs un espectre de densitat de potència promig que s'avaluarà com,

$$\begin{aligned} \overline{S}_{x_T x_T}(f) &= \frac{1}{4}\overline{S}_{b_x b_x}(f-f_c) + \frac{1}{4}\overline{S}_{b_x b_x}(f+f_c) & (3.35) \\ &= \frac{\sigma_a^2}{4T_s}\left(|P(f-f_c)|^2 + |P(f+f_c)|^2\right) & (3.36) \end{aligned}$$

**Exemple**: anem a veure com es calcula l'espectre de densitat de potència promig d'un senyal que utilitza un pols de conformació rectangular. Podem agafar un pols $p(t) = A_p\Pi(t/T_s)$ o bé un pols decalat que comenci en $t = 0$, $p(t) = A_p\Pi((t-T_s/2)/T_s)$. En qualsevol dels dos casos, l'espectre ens donarà el mateix: la distribució freqüencial de potència no es veu afectada pels retards temporals del senyal. Sota aquestes condicions, tenim,

$$|P(f)| = A_p \cdot |T_s \mathrm{sinc}(T_s f)| \tag{3.37}$$

i en conseqüència,

$$\overline{S}_{x_T x_T}(f) = \frac{1}{4}\sigma_a^2 A_p^2 T_s \left(|\mathrm{sinc}(T_s(f-f_c))|^2 + |\mathrm{sinc}(T_s(f+f_c))|^2\right) \tag{3.38}$$

Veiem doncs que l'espectre de densitat de potència promig es construeix com dues sincs centrades a $\pm f_c$. Habitualment tindrem $f_c >> R_s = 1/T_c$, de manera que les cues de la sinc a $+f_c$ no afectaran pràcticament a les cues de la sinc a $-f_c$. Es pot obervar també que l'amplada de banda de transmissió efectiva ve controlada pel decreixement de les cues de $|P(f)|$. En aquest sentit, el pols rectangular és bastant ineficient en la utilització de la banda: les seves cues decreixen molt lentament, de l'ordre de $|P(f)| \simeq 1/|f|$. Tal fet ve motivat precisament per les discontinuïtats que presenta el pols rectangular. Per aquest motiu, es tendeix sempre a utilitzar polsos $p(t)$ amb una variació temporal més suau i que per tant tinguin un decreixement més ràpid de les cues.

Examinant el màxim de l'espectre de densitat de potència, observem que pren el valor $\sigma_a^2 E_p/4$. El terme $\sigma_a^2 E_p$ és precisament l'energia del símbol de la constel.lació en la representació banda base,

$$E_a = \sigma_a^2 E_p \tag{3.39}$$

Les dimension de l'espectre de densitat de potència són de Volts eficaços al quadrat per Hertz, que són precisament dimensions d'energia. No és d'extranyar doncs que els nivells espectrals resultin ésser proporcionals a l'energia de símbol.

### 3.2.1 Potència del Senyal Transmès

Podem obtenir la potència del senyal transmès simplement integrant el seu espectre de densitat de potència promig,

$$S_T = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{S}_{x_T x_T}(f)\mathrm{d}f \tag{3.40}$$

$$= \frac{\sigma_a^2}{4T_s} 2 \int_{-\infty}^{+\infty} |P(f)|^2 \mathrm{d}f \tag{3.41}$$

atès que els dos termes $|P(f-f_c)|^2$ i $|P(f+f_c)|^2$ contribueixen amb idèntica area (estem suposant que les cues de $P(f \pm f_c)$ s'han reduït pràcticament a zero en $f=0$). Ara bé, tenim que,

$$r_{pp}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |P(f)|^2 \mathrm{d}f \tag{3.42}$$

però $r_{pp}(0)$ és precisament l'energia $E_p$ del pols $p(t)$,

$$r_{pp}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |p(t)|^2 \mathrm{d}t \tag{3.43}$$

$$= E_p \tag{3.44}$$

En conseqüència, la potència transmesa ve expressada per,

$$S_T = \frac{1}{2} \cdot \sigma_a^2 \cdot \frac{E_p}{T_s} \tag{3.45}$$

on tots tres factors provenen de: (i) el factor 1/2 degut a la modulació pas banda a la freqüència portadora $f_c$; (ii) el factor $\sigma_a^2$ degut a estar utilitzant una determinada constel.lació; (iii) el factor $E_p/T_s$ degut a estar enviant un pols d'energia $E_p$ cada $T_s$ segons (un símbol).

La potència de la constel.lació la podem expressar com,

$$\sigma_a^2 = \sum_{i=1}^{M} p_i \cdot |a_i|^2 \tag{3.46}$$

on $p_i$ representa la probabilitat de que es generi el símbol $a_i$. Habitualment, els símbols seran equiprobables, amb $p_i = 1/M$. El mòdul quadrat de cada símbol es pot expressar en termes de la suma del quadrat de la seves parts real i imaginària, respectivament: $|a_i|^2 = I_i^2 + Q_i^2$. Podem definir doncs,

$$\sigma_{a,I}^2 = \mathbb{E}[I_i^2] = \sum_{i=1}^{M} p_i \cdot I_i^2 \tag{3.47}$$

$$\sigma_{a,Q}^2 = \mathbb{E}[Q_i^2] = \sum_{i=1}^{M} p_i \cdot Q_i^2 \tag{3.48}$$

com els components de potència de la constel·lació corresponents als canals de fase i de quadratura, respectivament. Per tant, $\sigma_a^2 = \sigma_{a,I}^2 + \sigma_{a,Q}^2$. En conseqüència, podem calcular la potència total com la suma de les potències de les components en fase i quadratura, respectivament,

$$S_T = S_{T,I} + S_{T,Q} \tag{3.49}$$

on ens definim,

$$S_{T,I} = \frac{1}{2} \cdot \sigma_{a,I}^2 \cdot \frac{E_p}{T_s} \tag{3.50}$$

$$S_{T,Q} = \frac{1}{2} \cdot \sigma_{a,Q}^2 \cdot \frac{E_p}{T_s} \tag{3.51}$$

Definim les següents magnituds que resultaran d'interès més endavant,

1. **Energia de símbol (en el canal)**: a partir de l'equació (3.45) podem definir-nos l'energia de símbol (en el canal) $E_{s,c}$ com la quantitat d'energia assignada a la transmissió de cada símbol a través del canal. En durar cada símbol $T_s$ segons, el càlcul és immediat a partir de $S_T$,

$$E_{s,c} \quad = \quad S_T \cdot T_s = \frac{1}{2}\sigma_a^2 E_p \tag{3.52}$$

   Observi que en el procés de modulació, l'energia de símbol (en banda base) $E_a$ mencionada anteriorment verifica $E_{s,c} = E_a/2$.

2. **Energia de bit (en el canal)**: és la quantitat d'energia $E_{b,c}$ assignada a la transmissió de cada bit a través del canal. En constar cada símbol de $b$ bits, el càlcul resulta immediat,

$$E_{b,c} \quad = \quad \frac{E_{s,c}}{b} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_a^2 E_p}{b} \tag{3.53}$$

**Exemple**: per l'exemple anterior (pols rectangular), el càlcul és molt senzill en ésser $E_p = A_p^2 T_s$. Per tant,

$$S_T \quad = \quad \frac{1}{2} \cdot \sigma_a^2 \cdot A_p^2 \tag{3.54}$$

Veiem doncs que la potència transmesa $S_T$ és independent de la velocitat de símbol $R_s = 1/T_s$. De fet, depèn només de ls potència del pols, $\sigma_p^2 = E_p/T_s$, igual a $A_p^2$ en el cas particular de pols rectangular.

## 3.3 Recuperació de Símbol en el Receptor

La tasca del receptor serà la reconstrucció de la trama de bits original. Tal procediment s'haurà de realitzar per maximitzar algun criteri de qualitat adequat. Plantejarem el procediment en dues etapes de processament en banda base, a la sortida del desmodulador de quadratura,

1. **Recuperació de Símbol**: Ens plantejarem trobar un filtre pel receptor, de resposta impulsional $h_D(t)$, que s'aplicarà a la sortida del desmodulador de quadratura, que ens permeti *observar* una versió dels símbols $a[k]$ transmesos (degradats pel soroll que introdueix el canal) de forma òptima. És a dir, intentarem minimitzar la potència del soroll que afecta la nostra observació del símbol $a[k]$ en el receptor, sota unes determinades restriccions per aquest filtre.

2. **Recuperació de Bit**: ens plantejarem quin és el procediment òptim per decidir quin dels símbols transmesos és el més probable, donada la observació que realitza el receptor del símbol actual segons el procediment anterior. Aquesta segona etapa caldrà realitzar-la per minimitzar la probabilitat d'error de símbol, o bé la probabilitat d'error de bit. Més endavant distingirem entre aquests dos casos.

Analitzarem la recuperació de símbol en condicions ideals, suposant que el receptor coneix perfectament el valor de paràmetres del senyal rebut com freqüència i fase de la portadora (en una situació real, l'estimació d'aquests paràmetres forma part del procés de desmodulació del senyal), i avaluarem les prestacions de l'esquema proposat.

### 3.3.1 El filtre de detecció $h_D(t)$

Com vàrem veure a la part de comunicacions analògiques, el senyal complexe a la sortida del desmodulador de quadratura es pot expressar com,

$$z(t) \quad = \quad \frac{1}{2}b_x(t) + \frac{1}{2}b_n(t) \tag{3.55}$$

amb $b_n(t)$ l'equivalent pas baix del soroll en el punt de recepció. En l'etapa de recuperació de símbol, proposem utilitzar un filtre de detecció de símbol de forma que la observació del símbol transmès es realitzi com,

$$y[m] \quad = \quad \left.(z(t) * h_D(t))\right|_{t=mT_s} \tag{3.56}$$

És a dir, filtrem el senyal $z(t)$ amb un filtre de resposta impulsional $h_D(t)$, d'on la sortida $y(t)$ s'expressa com $y(t) = z(t) * h_D(t)$ mitjançant l'operació de convolució, i mostrejem $y(t)$ en l'instant $t_m = mT_s$: $y[m] = y(mT_s)$. D'aquesta forma passem de temps continuu a temps discret. Anem a veure ara com queda l'expressió de la observació $y[m]$ en funció de la seqüència de símbols transmesa. A partir d'aquí veurem quines restriccions ens cal imposar sobre la resposta impulsional $h_D(t)$ per facilitar la recuperació de la trama de bits original al mateix temps que minimitzem la degradació deguda al soroll. De moment ens fixarem únicament en el terme de senyal útil. És a dir, considerem $b_n(t) = 0$ en l'equació (3.55).

Tenim,

$$\begin{aligned} y(t) &= h_D(t) * \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a[k] \cdot p(t - kT_s) && (3.57) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a[k] \cdot (h_D(t) * p(t - kT_s)) && (3.58) \end{aligned}$$

ens definim doncs el pols en detecció $p_D(t)$ com,

$$p_D(t) = h_D(t) * p(t) \qquad (3.59)$$

de forma que podem expressar l'equació (3.58) com,

$$y(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a[k] \cdot p_D(t - kT_s) \qquad (3.60)$$

Finalment, mostrejant en $t_m = mT_s$, obtenim el valor de $y[m] = y(mT_s)$,

$$\begin{aligned} y[m] &= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a[k] \cdot p_D((m - k)T_s) && (3.61) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a[k] \cdot p_D[m - k] && (3.62) \end{aligned}$$

que és precisament l'expressió de la convolució discreta entre la seqüència de símbols $a[k]$ i el pols discret $p_D[n] = p_D(nT_s)$ (mostrejat del pols de detecció analògic en múltiples del temps de símbol).

En l'expressió anterior, podem distingir la part útil del símbol $a[m]$ present en la observació $y[m]$, i la part deguda a la interferència dels símbols veïns,

$$y[m] = \frac{1}{2} a[m] + \frac{1}{2} \sum_{k \neq m} a[k] \cdot p_D[m - k] \qquad (3.63)$$

que també podem expressar amb un canvi d'índex $k' = m - k$ com,

$$y[m] = \frac{1}{2} a[m] + \frac{1}{2} \sum_{k' \neq 0} p_D[k'] \cdot a[m - k'] \qquad (3.64)$$

És a dir, el segon terme ens degrada l'observació del símbol $a[m]$, fins i tot en absència de soroll. Aquest terme rep precisament el nom de: **Interferència Inter-Simbòlica** (**ISI**:*Inter-Symbol Interference*).

Observem doncs que una restricció a imposar al pols $p_D(t)$ consisteix en evitar que generi el segon terme. És a dir, fer que la resposta impulsional discreta del filtre de detecció $p_D[n]$ sigui la seqüència delta discreta,

$$p_D[k'] = \delta[k'] \qquad (3.65)$$

Sota aquestes condicions tenim que, en absència de soroll,

$$y[m] = \frac{1}{2} a[m] \qquad (3.66)$$

El pols $p_D(t)$ i la seva versió discreta $p[n] = p_D(nT_s)$ constitueixen la resposta impulsional del sistema banda base equivalent, en les seves versions analògica i discreta, respectivament. Si es compleix la condició (3.65), els polsos $p_D(t)$ es coneixen com **Polsos de Nyquist**.

## 3.4 El Filtre Adaptat

En aquesta secció determinarem quin pols de conformació $p(t)$ convé utilitzar i quin és el filtre de detecció associat $h_D(t)$. Observi que el plantejament no és essencialment diferent del de Filtres Terminals Òptims adoptat en comunicacions analògiques, on $p(t)$ juga el paper del filtre de pre-èmfasi (filtre de transmissió) i $h_D(t)$ juga el paper de filtre de de-èmfasi (filtre de detecció). El disseny haurà de verificar que $p_D(t) = p(t) * h_D(t)$ (o bé el seu equivalent en freqüència: $P_D(f) = P(f)H_D(f)$), on $p_D(t)$ ens ve donat. Evidentment, existeixen una infinitud de solucions. Només caldria fer,

$$P(f) = P_D^{\theta}(f) \tag{3.67}$$

$$H_D(f) = P_D^{1-\theta}(f) \tag{3.68}$$

Llavors, per $0 \leq \theta \leq 1$ garantim $P_D(f) = P(f)H_D(f)$. No obstant, ens cal un criteri objectiu per decidir una parella adequada de filtres. Per tant, adoptem el següent,

Realitzarem el disseny per garantir,

- **Criteri**: sota la restricció $p_D(nT_s) = \delta[n]$ (Interferència Inter-Simbòlica nul.la), s'escull una parella de filtres $p(t)$ i $h_D(t)$ de forma que es minimitzi la potència de soroll en l'observació del símbol.

De fet, el criteri anterior serà equivalent a maximitzar la relació senyal a soroll en el punt de detecció. Ens centrarem en la component en fase. El tractament de la component en quadratura és exactament idèntic. La potència de soroll a la sortida del filtre es calcula en termes de la densitat espectral de potència del soroll d'entrada $i_n(t)/2$ i del mòdul quadrat de la resposta en freqüència del filtre com,

$$\sigma_\eta^2 = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} S_{i_n i_n}(f)|H_D(f)|^2 \mathrm{d}f \tag{3.69}$$

Mentre que la potència de senyal útil ve donada per

$$\mathbb{E}[|y_I[m]|^2] = \frac{1}{4}\mathbb{E}[|I[m]|^2] \cdot |p_D[0]|^2 \tag{3.70}$$

on tenim que $\sigma_{a,I}^2 = \mathbb{E}[|I[m]|^2]$ és la potència de la component en fase de la constel.lació i $p_D[0]$ es pot calcular com,

$$p_D[0] = \left(p(t) * h_D(t)\right)\Big|_t = 0 \tag{3.71}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} P(f)H_D(f)\mathrm{d}f \tag{3.72}$$

Llavors, la relació potència de senyal útil a potència de soroll és pot afitar superiorment segons la desigualtat d'Schwartz,

$$\frac{\mathbb{E}[|y_I[m]|^2]]}{\sigma_\eta^2} = \frac{\sigma_{a,I}^2 \left|\int_{-\infty}^{+\infty} P(f)H_D(f)\mathrm{d}f\right|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} N_0|H_D(f)|^2\mathrm{d}f} \leq \frac{\sigma_{a,I}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |P(f)|^2\mathrm{d}f \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |H_D(f)|^2\mathrm{d}f}{\int_{-\infty}^{+\infty} N_0|H_D(f)|^2\mathrm{d}f} \tag{3.73}$$

El màxim es dóna únicament quan tenim proporcionalitat. És a dir,

$$H_D(f) = P^*(f) \quad \rightarrow \quad h_D(t) = p^*(-t) \tag{3.74}$$

Quan $h_D(t) = p^*(-t)$, $h_D(t)$ rep el nom de **Filtre Adaptat**. Com que hem vist que $P_D(t) = H_D(f)P(f) = |P(f)|^2 = |H_D(f)|^2$, podem determinar l'expressió de $p(t)$ a partir de,

$$p(t) = \mathbb{F}^{-1}[\sqrt{P_D(f)}] \tag{3.75}$$

La resposta $P_D(f)$ es construeix habitualment com una resposta real i de simetria parell, el pols temporal obtingut segons l'equació anterior serà també real i de simetria parell: $p(t) = p^*(-t) = h_D(t)$.

### 3.4.1 Relació SNR a la sortida del filtre adaptat

La relació senyal a soroll màxima esdevé,

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{D,I} = \frac{\mathbb{E}[|y_I[m]|^2]}{\sigma_\eta^2} = \frac{\sigma_{a,I}^2 \cdot E_p}{N_0} \tag{3.76}$$

Podem considerar dos casos, depenent de si s'utilitzen constel.lacions reals o constel.lacions complexes,

1. **Constel.lacions Reals**: en aquest cas tenim $\sigma_{a,Q}^2 = 0$ (per exemple, BPSK o $M$-ASK). Per tant, tota la potència transmesa s'injecta pel canal de fase i l'energia de símbol en el canal ve donada per $E_{s,c} = \frac{1}{2}\sigma_{a,I}^2 E_p$, d'on es dedueix la següent relació,

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{D,I} = \frac{2E_{s,c}}{N_0} \tag{3.77}$$

2. **Constel.lacions Complexes (simètriques)**: en aquest cas, injectem idèntica potència pels canals de fase i quadratura: $\sigma_{a,I}^2 = \sigma_{a,Q}^2$ (direm que la constel.lació està balancejada en potència). Això implica que l'energia de símbol en el canal doni: $E_{s,c} = \frac{1}{2}(\sigma_{a,I}^2 + \sigma_{a,Q}^2)E_p = \sigma_{a,I}^2 E_p$. Per tant,

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{D,I} = \frac{E_{s,c}}{N_0} \tag{3.78}$$

   Aquest constitueix el cas de les constel·lacions QPSK, $M$-PSK, $M$-QAM o $M$-APSK.

Habitualment es dóna per entès que l'energia de símbol es refereix a la que s'injecta en el canal. Podem prescindir doncs del sub-índex $c$ i fer $E_s = E_{s,c}$ en les expressions anteriors. La relació $E_s/N_0$ es coneix també com la relació EsNo (pronunciat "éssenezero").

### 3.4.2 Construcció de Polsos de Nyquist

La determinació de polsos de Nyquist es pot fer de forma bastant senzilla en el domini freqüencial, basant-nos en una propietat que ha de complir la transformada de Fourier del pols en detecció, $P_D(f)$. De mostrarem que si es verifica,

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} P_D(f - kR_s) = P_0 \tag{3.79}$$

llavors $p_D(t) = \mathbb{F}^{-1}[P_D(f)]$ constitueix un pols de Nyquist. La demostració es duu a terme a partir del Teorema del Mostratge. Sabem que per una seqüència discreta $x[n]$ provinent de mostrejar un senyal analògic $x(t)$: $x[n] = x(nT_s)$, on $T_s$ constitueix el periode de mostratge (igual al temps de símbol en el nostre cas), es verifica que la seva Transformada Discreta de Fourier compleix,

$$X(e^{j2\pi\nu}) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(\frac{\nu - k}{T_s}\right) \tag{3.80}$$

on $\nu = f/R_s = f \cdot T_s$ representa la freqüència normalitzada discreta associada a la freqüència analògica $f$ (quan la freqüència de mostratge és la velocitat de símbol $R_s$). Per tant, si es compleix que $X(e^{j2\pi\nu}) = P_0$, això implica,

$$x[n] = P_0 \cdot \delta[n] \tag{3.81}$$

que és precisament la condició de ISI nul·la. La determinació d'un conjunt de $P(f)$'s vàlides té lloc de forma gràfica. Defininit el factor de *roll-off* $\alpha$ an el marge $0 \leq \alpha \leq 1$, l'expressió de la resposta $P_D(f)$ **cosinus alçat** ve donada per,

$$P_D(f) = \begin{cases} P_0 & , \quad |f| \leq R_s\frac{1-\alpha}{2} \\ \frac{1}{2}P_0 \cdot \left(1 - \sin\left(\frac{\pi}{2\alpha}(2f/R_s - 1)\right)\right) & , \quad R_s\frac{1-\alpha}{2} \leq |f| \leq R_s\frac{1+\alpha}{2} \\ 0 & , \quad |f| \geq R_s\frac{1+\alpha}{2} \end{cases} \tag{3.82}$$

i la resposta temporal, calculada a partir de la Transformada Inversa de Fourier, per,

$$p_D(t) \quad = \quad P_0 R_s \cdot \frac{\sin(\pi R_s t)}{\pi R_s t} \cdot \frac{\cos(\pi R_s \alpha t)}{1 - 4\alpha^2 R_s^2 t^2} \tag{3.83}$$

Observem que el decreixement de les cues del pols $p_D(t)$ és del tipus $|p_D(t)| \sim (P_0 R_s / 4\pi\alpha^2) \cdot (T_s/t)^3$. Aquest decreixement és ja prou ràpid com per a que resulti factible tecnològicament la utilització d'aquests polsos.

Un cop determinat $p_D(t)$, la resposta impulsional de la cadena de comunicacions equivalent en banda base, ens cal determinar el pols de conformació $p(t)$ a partir de la relació (3.75). Pel cas del pols cosinus alçat, s'obté el pols $p(t)$ **arrel quadrada del cosinus alçat**,

$$p(t) \quad = \quad R_s \sqrt{P_0} \cdot \frac{\sin(\pi R_s (1-\alpha) t) + 4\alpha R_s t \cdot \cos(\pi R_s (1+\alpha) t)}{\pi R_s t \cdot (1 - (4\alpha R_s t)^2)} \tag{3.84}$$

Tant el pols de conformació com el seu filtre adaptat s'extenen sobre tot l'eix temporal. Són evidentment polsos no causals amb els que podem treballar a nivell teòric. En un sistema real, ens veiem obligats a utilitzar aproximacions als polsos teòrics, que siguin tecnològicament realitzables i que tinguin una degradació poc apreciable respecte el seu comportament ideal. És a dir, el filtre adaptat de recepció el podríem construir de forma aproximada com,

$$\tilde{h}_D(t) \quad = \quad p(t-T) \cdot \Pi\left(\frac{t-T}{2T}\right) \tag{3.85}$$

per un retard $T$ suficientment gran, truncant la seva duració a $2T$.

## 3.5 Relacions S/N en la Cadena de Recepció

En aquesta secció calcularem relacions senyal a soroll i magnituds relacionades en diferents punts de la cadena de recepció.

### 3.5.1 La Relació $(S/N)_R$

El càlcul de la relació SNR en el punt de recepció es fa de forma idèntica a com havíem vist en el capítol de comunicacions analògiques. Suposant que el canal presenta una atenuació $\alpha_c$, la potència en el punt de recepció ve donada per $S_R = \alpha_c^2 S_T$. Per tant, definint $C = S_R$, tenim

$$\left(\frac{S}{N}\right)_R \quad = \quad \frac{S_R}{N_R} = \frac{S_R}{N_0 B_T} = \frac{C}{N_0} \cdot \frac{1}{B_T} \tag{3.86}$$

Veiem doncs que coneixent la **relació** $C/N_0$ (pronunciada "cénezero"), o relació de potència rebuda a densitat espectral de soroll, ens permet calcular la relació senyal a soroll en el punt de recepció. Aquesta és una relació curiosa, atès que ens mesura en quina proporció es troba l'àrea sota l'espectre de densitat de potència promig del senyal útil (és a dir, la potència del senyal útil), respecte el nivell de soroll. Dimensionalment, la relació $C/N_0$ té unitats d'Hz en escala lineal. El seu equivalent en escala logarítmica ve donat per,

$$10 \cdot \log_{10} \frac{C}{N_0} \quad [\text{dBHz}] \tag{3.87}$$

i les seves unitats són els dBHz (dB-Hertz), que constitueixen una escala logarítmica alternativa per l'eix freqüencial. Podríem parlar doncs d'una banda de transmissió d'1 MHz com una banda de magnitud $10 \cdot \log_{10}(10^6) = 60$ dBHz.

La relació $C/N_0$ es pot interpretar com una mesura de qualitat del senyal a l'entrada del receptor que és independent de la banda del senyal, a diferència de la relació SNR. De fet, aquest nova mesura ens permetrà calcular totes les relacions SNR d'interès al llarg de la cadena de recepció, sabent únicament quina és la banda efectiva per la qual cal dividir la $C/N_0$. I aquesta banda efectiva, resulta ser l'amplada de banda equivalent de soroll entre l'entrada del receptor i el punt considerat.

La relació $(S/N)_R$ es pot mesurar directament amb un analitzador d'espectres que visualitzi una estimació de l'espectre de densitat de potència a l'entrada del receptor. La relació entre el màxim de l'espectre (per modulació basada en polsos de Nyquist) i el fons de soroll $N_0/2$, ve donada per,

$$\Gamma = \frac{\sigma_a^2|P(0)|^2/4T_s}{N_0/2} \tag{3.88}$$

on $P(0)$ verifica $|P(0)|^2 = E_pT_s/(1+\alpha) = E_p/B_T$. Llavors,

$$\Gamma = \frac{1}{2}\sigma_a^2\frac{E_p}{N_0(1+\alpha)} = \frac{1}{1+\alpha}\cdot\frac{E_s}{N_0} = \left(\frac{S}{N}\right)_R \tag{3.89}$$

que és precisament la relació SNR en el punt de recepció.

### 3.5.2 La Relació $(S/N)_{D,I}$

Havent calculat (pel cas de constel.lacions balancejades) la relació SNR en el punt de detecció: $(S/N)_{D,I} = E_s/N_0$, podem expressar-ho ara en termes de la $C/N_0$. L'energia de símbol en el canal es relaciona de forma molt senzilla amb la potència: $E_s = C\cdot T_s$. En conseqüència,

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{D,I} = \frac{C\cdot T_s}{N_0} = \frac{C}{N_0}\cdot\frac{1}{R_s} \tag{3.90}$$

És a dir, l'amplada de banda equivalent de soroll en el punt de detecció és precisament la velocitat de senyalització $R_s$. Per tant, entre el punt de recepció i el punt de detecció el senyal experimenta una millora de SNR avaluada en,

$$\frac{(S/N)_{D,I}}{(S/N)_R} = \frac{B_T}{R_s} \geq 1 \tag{3.91}$$

la qual cosa ens permet mesurar indirectament $(S/N)_{D,I}$ a partir de la mesura anterior de $(S/N)_R$ utilitzant un analitzador d'espectres.

## 3.6 La Relació $E_b/N_0$

Fins ara ens ha sortit la relació $E_b/N_0$ en diversos punts de l'exposició. Resulta habitual referir-se a la relació $E_b/N_0$ com $EbNo$ (pronunciat "ébenezero"). Ens definim aquesta relació com,

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{1}{b}\cdot\frac{E_s}{N_0} \tag{3.92}$$

És a dir, l'energia transmesa per bit, on $b$ representa el nombre de bits per símbol. Com veurem més endavant, aquesta relació resulta crucial en la determinació de la probabilitat d'error de bit: constitueix una mesura de "qualitat"del bit davant els efectes del soroll.



## 3.7 El Canal Discret Equivalent

L'anàlisi de prestacions d'un sistema de comunicacions digital en termes de la probabilitat d'error es realitza habitualment utilitzant un model simplificat de tota la cadena de transmissió-recepció. Aquest model, anomenat el canal discret equivalent, opera en temps discret i a nivell de símbol: s'eliminem les etapes de conformació de pols i modulació de quadratura del transmissor així com les seves corresponents en recepció (desmodulació de quadratura i filtrat adaptat). Podem formular aquest model a partir de les observacions de símbol $y[m] = y_I[m] + jy_Q[m]$ efectuades a la sortida del filtre adaptat. Les observacions de símbol, que escalem per un factor 2 irrel·levant en termes de la SNR, vénen donades per les expressions,

$$z_I[m] = 2y_I[m] = I[m] + \eta_I[m] \tag{3.93}$$

$$z_Q[m] = 2y_Q[m] = Q[m] + \eta_Q[m] \tag{3.94}$$

on $\eta_I[m]$ i $\eta_Q[m]$ representen el soroll d'observació en el canal de fase i quadratura de l'observació escalada $z[m] = z_I[m] + jz_Q[m]$, respectivament. Segons el tipus de constel·lació, tenim les següents relacions,

1. **Constel.lacions Reals**: per constel·lacions reals tenim la següent relació,

$$\sigma_{\eta_I}^2 = \frac{1}{2E_{s,c}/N_0} \cdot \sigma_{a,I}^2 \tag{3.95}$$

2. **Constel.lacions Complexes (Balancejades)**: per constel.lacions balancejades (suposant $\sigma_a^2 = 1$), obtenim la següent relació per la poténcia del soroll,

$$\sigma_{\eta_I}^2 = \sigma_{\eta_Q}^2 = \sigma_\eta^2 = \frac{1}{E_{s,c}/N_0} \cdot \sigma_{a,I}^2 \tag{3.96}$$

El soroll és Gaussià i blanc.

## 3.8 Probabilitat d'Error

La probabilitat d'error és la mesura de qualitat més important en un sistema de comunicacions digital. Aquest tipus d'anàlisi es realitza sempre a nivell de símbol, utilitzant les observacions $z_I[m]$ i $z_Q[m]$ proporcionades en (3.94) pel canal discret equivalent. Treballarem amb les dues següents probabilitats d'error,

1. **Probabilitat d'Error de Símbol**: donat un procediment de decisió $\mathbb{D}[\cdot]$ que actua sobre les observacions $z[m]$, la probabilitat d'error de símbol és la probabilitat de decidir que s'ha transmés un símbol $\hat{a}[m] = \mathbb{D}[z[m]] = \hat{I}[m] + j\hat{Q}[m]$ diferent del realment transmès: $a[m] = I[m] + jQ[m]$. Per tant, en una constel.lació de $M$ símbols, podem tenir $M - 1$ decisions errònies possibles per cadascun dels símbols.

2. **Probabilitat d'Error de Bit**: donat un procediment de decisió $\mathbb{D}$, la relació entre les probabilitats d'error de símbol i de bit no és immediata. Per una probabilitat d'error de símbol donada, la probabilitat d'error de bit depèn de l'etiquetat binari de cada símbol.

Ens caldrà trobar un procediment de decisió $\mathbb{D}$ dels bits o símbols transmesos que minimitzi una de les dues probabilitats d'error anteriors, així com la seva probabilitat d'error associada. Partirem d'un exemple senzill: la modulació BPSK, a generalitzar més endavant per altres constel·lacions.

### 3.8.1 Introducció: la probabilitat d'error en BPSK

En aquest cas, la probabilitat d'error de símbol coincideix amb la probabilitat d'error de bit (la constel.lació té un etiquetat d'1 bit per símbol). El problema de decisió consisteix en què a partir d'una observació $z_I[m]$, tenim dues opcions de soroll: $\eta_I[m; -1]$ i $\eta_I[m; +1]$, que poden haver produït la mateixa observació,

$$z_I[m] = -1 + \eta_I[m; -1] \tag{3.97}$$

$$z_I[m] = +1 + \eta_I[m; +1] \tag{3.98}$$

Per tant, de les dues opcions de soroll anteriors, hem de decidir aquella que ens minimitzi la probabilitat d'error, la qual cosa equival a suposar que s'ha donat la desviació de soroll més probable (si decidíssim sempre aquella opció de soroll menys probable, ens equivocaríem més vegades: sempre suposant que tant el símbol $-1$ com el símbol $+1$ tenen idèntica probabilitat, $\Pr[\pm 1] = 1/2$). La caracterització estadística del soroll a partir de la seva funció de densitat de probabilitat ens proporciona la informació necessària per prendre aquesta decisió: pel soroll Gaussià, són més probables aquelles realitzacions de soroll de menor valor absolut. De fet, no ens cal conèixer la potència de soroll per determinar el símbol transmès més probable: podem veure que l'esquema de decisió equival a prendre el signe de l'observació,

$$\hat{I}[m] = \mathbb{D}[z_I[m]] = \text{sign}(z_I[m]) \tag{3.99}$$

En el cas més general de qualsevol constel·lació, es pot demostrar que la millor decisió del símbol transmés $a[m]$ consisteix en aquell símbol de la constel·lació més proper al valor complexe de l'observació $z[m]$, atès que és el valor més probable (aquell obtingut amb un valor de soroll més petit).

El procediment de decisió anterior, equival a dividir l'eix de fase $I$ en dues **regions de decisió** de l'observació $z_I[m]$ associades cadascuna a decidir $\hat{a}[m] = +1$ o bé $\hat{a}[m] = -1$, respectivament. Podem determinar aquestes regions de decisió observant quins són els valors de soroll $\eta_I[m]$ que no indueixen a error. És a dir, que segons el procediment de decisió (3.99), no ens generen una estimació de símbol de signe contrari. Per tant, establim,

1. **Regió de Decisió 1**: valors de $z_I[m] = I[m]+\eta_I[m]$ pels quals decidim $\hat{a}[m] = +1$ quan $a[m] = +1$,

$$z_I[m] > 0 \tag{3.100}$$

   Equival als valors de soroll $\eta_I[m] > -1$.

2. **Regió de Decisió 2**: valors de $z_I[m] = I[m]+\eta_I[m]$ pels quals decidim $\hat{a}[m] = -1$ quan $a[m] = -1$,

$$z_I[m] < 0 \tag{3.101}$$

   Equival als valors de soroll $\eta_I[m] < +1$.

Veiem que en el cas BPSK, les regions de decisió són senzillament intèrvals de la recta $I$, atès que únicament ens interessen els valors observats en el canal en fase. La línia divisòria entre dues regions de decisió contigües s'anomena **frontera de decisió**. En aquest cas, tenim una sola frontera de decisió que equival al punt $z_I[m] = 0$ que ens separa les dues regions (intèrvals) de decisió. Com veurem més endavant, pel cas de constel·lacions complexes tindrem que les regions de decisió són regions del pla complexe $I + jQ$ i que les fronteres de decisió estan constituïdes per segments de línies rectes.

### 3.8.2 Còmput de la probabilitat d'error en BPSK

Per avaluar la probabilitat d'error de bit en BPSK, $p_{\text{BPSK}}(\epsilon_b) = \Pr[\hat{a}[m] \neq a[m]]$, cal considerar primer tots els events que poden donar lloc a error:

1. **Event 1**: decidim $\hat{a}[m] = -1$ quan hem transmès $a[m] = +1$. Aquest event es dóna amb probabilitat,

$$P_1 = \Pr[a[m] = +1, \hat{a}[m] = -1] \tag{3.102}$$

2. **Event 2**: decidim $\hat{a}[m] = +1$ quan hem transmès $a[m] = -1$. Aquest event es dóna amb probabilitat,

$$P_2 = \Pr[a[m] = -1, \hat{a}[m] = +1] \tag{3.103}$$

La probabilitat d'error de bit ve donada per la suma de probabilitats de tots dos events. Utilitzant probabilitats condicionades podem escriure,

$$\begin{aligned} p_{\text{BPSK}}(\epsilon_b) &= P_1 + P_2 \qquad (3.104) \\ &= \Pr[\hat{a}[m] = -1|a[m] = +1] \cdot \Pr[a[m] = +1] + \Pr[\hat{a}[m] = +1|a[m] = -1] \cdot \Pr[a[m] = -1] \end{aligned}$$

Que podem abreviar com,

$$p_{\text{BPSK}}(\epsilon_b) = \Pr[-1| + 1] \cdot \Pr[+1] + \Pr[+1| - 1] \cdot \Pr[-1]$$

Pràcticament sempre tindrem símbols equiprobables, amb $\Pr[+1] = \Pr[-1] = 1/2$. Per tant,

$$p_{\text{BPSK}}(\epsilon_b) = \frac{1}{2} \cdot \Pr[-1| + 1] + \frac{1}{2} \cdot \Pr[+1| - 1] \tag{3.105}$$

Tot seguit avaluem les probabilitats condicionades anteriors,

1. **Còmput de** $\Pr[-1| + 1]$: en termes del soroll $\eta_I[m]$ i recorrent a l'expressió (3.99), la probabilitat d'error vindrà generada per la probabilitat de que el soroll verifiqui,

$$-1 = \operatorname{sign}(+1 + \eta_I[m]) \quad \rightarrow \quad \eta_I[m] < -1 \tag{3.106}$$

   Com podem veure, *aquests valors de soroll són els complementaris dels que ens defineixen la regió de decisió 1* associada a l'absència d'error en la transmissió de $a[m] = +1$. Per tant,

$$\Pr[-1| + 1] = \Pr[\eta_I[m] < -1] \tag{3.107}$$

2. **Còmput de** $\Pr[+1|-1]$: en termes del soroll $\eta_I[m]$ i recorrent a l'expressió (3.99), la probabilitat d'error vindrà generada per la probabilitat de que el soroll verifiqui,

$$+1 \quad = \quad \mathrm{sign}(-1+\eta_I[m]) \quad \rightarrow \quad \eta_I[m] > +1 \tag{3.108}$$

   Com podem veure, *aquests valors de soroll són els complementaris dels que ens defineixen la regió de decisió 2* associada a l'absència d'error en la transmissió de $a[m] = -1$. Per tant,

$$\Pr[+1|-1] \quad = \quad \Pr[\eta_I[m] > +1] \tag{3.109}$$

El terme de soroll Gaussià $\eta_I[m]$ té una funció de densitat de probabilitat simètrica, centrada en $\eta_I = 0$. Aquest fet combinat amb (3.105) ens condueix a,

$$\Pr[+1|-1] = \Pr[-1|+1] \quad \rightarrow \quad p_{\mathrm{BPSK}}(\epsilon_b) = \Pr[-1|+1] \tag{3.110}$$

I en conseqüència, utilitzant la funció de densitat de probabilitat del soroll Gaussià,

$$p_{\mathrm{BPSK}}(\epsilon_b) \quad = \quad \Pr[\eta_I[m] > +1] \tag{3.111}$$

$$= \int_{+1}^{+\infty} p_{\eta_I}(\eta)\mathrm{d}\eta$$

$$= \int_{+1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\eta_I}} \exp\left(-\eta^2/2\sigma_{\eta_I}^2\right) \mathrm{d}\eta \tag{3.112}$$

Aplicant el canvi de variable $\xi = \eta/\sigma_{\eta_I}$, tenim,

$$p_{\mathrm{BPSK}}(\epsilon_b) \quad = \quad \int_{1/\sigma_{\eta_I}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\xi^2/2\right) \mathrm{d}\xi \tag{3.113}$$

$$= \quad Q\left(\frac{1}{\sigma_{\eta_I}}\right) \tag{3.114}$$

On definim la funció $Q(x)$ com,

$$Q(x) \quad = \quad \int_{x}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\xi^2/2\right) \mathrm{d}\xi \tag{3.115}$$

Finalment, per BPSK tenim que l'energia de bit coincideix amb l'energia de símbol: $E_{b,c} = E_{s,c}$, que combinat amb (3.95) ens dóna l'expressió que cercàvem per la probabilitat d'error de bit en BPSK,

$$p_{\mathrm{BPSK}}(\epsilon_b) \quad = \quad Q\left(\sqrt{2\frac{E_{b,c}}{N_0}}\right) \tag{3.116}$$

Com veiem doncs, les prestacions del sistema de comunicacions depenen de: (a) l'energia assignada a la transmissió de cada bit a través del canal, $E_{b,c}$, i (b) la densitat espectral de potència de soroll en el canal, $N_0$. Podem veure a més a més, que la relació $E_{b,c}/N_0$ és adimensional: [Joule]/[Watt/Hz] equival a [Watt][segon][Hz]/[Watt], on es cancel·len totes les dimension mútuament.

### 3.8.3 Introducció: la probabilitat d'error en QPSK

Hem vist com en la modulació BPSK la probabilitat d'error de bit coincideix amb la probabilitat d'error de símbol degut a què l'etiquetat binari dels símbols era trivial. Aquesta igualtat no es manté necessàriament en QPSK: existeixen etiquetats binaris dels símbols QPSK pels quals $p_{\mathrm{QPSK}}(\epsilon_s) = p_{\mathrm{QPSK}}(\epsilon_b)$ o bé $p_{\mathrm{QPSK}}(\epsilon_s) \neq p_{\mathrm{QPSK}}(\epsilon_b)$. Per tant, distingirem entre totes dues probabilitats, la de símbol i la de bit.

### La probabilitat d'error de símbol en QPSK

Considerem la constel·lació QPSK habitual on els símbols complexes transmesos $a[m]$ pertanyen a la constel·lació $\mathbb{C} = \{\pm 1 \pm j\}$. Llavors, tal com hem vist en BPSK, la observació de símbol a la sortida del filtre adaptat, $z[m] = 2y[m]$, es pot expressar com $z[m] = z_I[m] + jz_Q[m]$,

$$\begin{aligned} z_I[m] &= I[m] + \eta_I[m] && (3.117) \\ z_Q[m] &= Q[m] + \eta_Q[m] && (3.118) \end{aligned}$$

on els termes de soroll $\eta_I[m]$ i $\eta_Q[m]$ són independents, Gaussians i de mitja zero, i els termes de senyal poden prendre únicament els valors $I[m] = \pm 1, Q[m] = \pm 1$. A diferència del cas BPSK, on teniem únicament el terme de soroll en fase $\eta_I[m]$, ara ens cal incorporar també el terme de soroll en quadratura $\eta_Q[m]$. Per determinar el símbol transmès utilizarem el mateix criteri que en BPSK: considerarem, donada la observació $z[m]$ i les quatre possibles opcions del símbol transmès $a[m]$, quin és el terme de soroll complexe $\eta[m] = \eta_I[m] + j\eta_Q[m]$ que amb major densitat de probabilitat pot haver generat $z[m]$. Escrivim, doncs, la funció de densitat de probabilitat del soroll complexe. En ésser totes dues components de soroll independents, Gaussianes, de idèntica potència $\mathbb{E}[\eta_I^2[m]] = \mathbb{E}[\eta_Q^2[m]] = \sigma_1^2$ i de mitja zero, tenim,

$$\begin{aligned} p_{\eta_I,\eta_Q}(\eta_I, \eta_Q) &= p_{\eta_I}(\eta_I) \cdot p_{\eta_Q}(\eta_Q) && (3.119) \\ &= \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\eta_I^2/2\sigma_1^2\right) \cdot \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\eta_I^2/2\sigma_1^2\right) \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1^2} \exp\left(-\frac{\eta_I^2 + \eta_Q^2}{2\sigma_1^2}\right) && (3.120) \\ &= \frac{1}{\pi\sigma_\eta^2} \exp\left(-\frac{\eta_I^2 + \eta_Q^2}{\sigma_\eta^2}\right) && (3.121) \end{aligned}$$

on definim la potència del soroll complexe $\sigma_\eta^2 = \mathbb{E}[|\eta[m]|^2] = \mathbb{E}[\eta_I^2[m] + \eta_Q^2[m]] = 2\sigma_1^2$. Per tant, el soroll $\eta[m] = \eta_I[m] + j\eta_Q[m]$ amb major densitat de probabilitat, és aquell pel qual el mòdul del soroll, $|\eta[m]|^2 = \eta_I^2[m] + \eta_Q^2[m]$, és mìnim (maximitza $p_{\eta_I,\eta_Q}(\eta_I, \eta_Q)$ en l'equació (3.121)). Per tant, com que $z[m] = a[m] + \eta[m]$, decidim com a símbol transmès, $\hat{a}[m]$, el que minimitza $|z[m] - \hat{a}[m]|^2$. És a dir, el més proper en el pla omplexe i per tant el que es troba en el mateix quadrant que la observació realitzada,

$$\begin{aligned} \hat{a}[m] &= \hat{I}[m] + j\hat{Q}[m] && (3.122) \\ \hat{I}[m] &= \mathrm{sign}(z_I[m]) \\ \hat{Q}[m] &= \mathrm{sign}(z_Q[m]) \end{aligned}$$

### La probabilitat d'error de bit en QPSK

En QPSK ens centrarem en aquell etiquetat binari en el qual el procediment de decisió de cada bit constituent de la parella amb què etiquetem cadascun dels 4 símbols QPSK es pot realitzar de forma independent sobre el canal de fase i sobre el canal de quadratura. És a dir, considerant el símbol QPSK expressat com $a_i = I_i + jQ_i$ i la parella de bits $[b_1 b_2]$, efectuem la següent codificació de bit a símbol,

$$\begin{aligned} I &= I(b_1) = 1 - 2b_1 && (3.123) \\ Q &= Q(b_2) = 1 - 2b_2 && (3.124) \end{aligned}$$

on qualsevol dels dos bits $b_1$ o $b_2$ pren valors 0 o 1. Amb aquesta estratègia, obtenim la següent assignació entre símbols i etiquetes binàries,

$$\begin{aligned} a_1 = +1 + j \quad &\Leftrightarrow \quad [b_1 b_2] = [00] \\ a_2 = -1 + j \quad &\Leftrightarrow \quad [b_1 b_2] = [10] \\ a_3 = -1 - j \quad &\Leftrightarrow \quad [b_1 b_2] = [11] \\ a_4 = +1 - j \quad &\Leftrightarrow \quad [b_1 b_2] = [01] \end{aligned}$$

Aquest etiquetat rep el nom de **codificació Gray**. Podem observar com amb aquesta codificació, l'el·lecció del símbol més proper es correspon també amb l'el·lecció del bit més probable.

### 3.8.4 Còmput de la probabilitat d'error en QPSK

**Còmput de la probabilitat d'error de símbol en QPSK**

La probabilitat d'error de símbol en QPSK, $p_{\text{QPSK}}(\epsilon_s)$, és independent del símbol transmès degut a la caracterització estadística del soroll i a les simetries de la constel·lació (podem efectuar girs de $\pi/2$ i la constel·lació roman invariant). Si prenem com a símbol transmès $a[m] = a_1 = +1 + j$ (situat en el primer quadrant del pla IQ), es produirà un event d'error en qualsevol dels tres casos següents,

1. **(error 1-2) Salt al *segon* quadrant del pla IQ**: es produeix quan,

$$\eta_I[m] < -1 \qquad , \qquad \eta_Q[m] \geq -1 \tag{3.125}$$

2. **(error 1-3) Salt al *tercer* quadrant del pla IQ**: es produeix quan,

$$\eta_I[m] < -1 \qquad , \qquad \eta_Q[m] < -1 \tag{3.126}$$

3. **(error 1-4) Salt al *quart* quadrant del pla IQ**: es produeix quan,

$$\eta_I[m] \geq -1 \qquad , \qquad \eta_Q[m] < -1 \tag{3.127}$$

Definint $\gamma = \sqrt{2E_{b,c}/N_0}$, cadascun d'aquests events d'error ocorre amb les següents probabilitats,

1. **error 1-2**:

$$\begin{aligned} \text{P}_{12} &= \Pr[\eta_I[m] < -1] \cdot \Pr[\eta_Q[m] \geq -1] && (3.128)\\ &= Q(\gamma) \cdot (1 - Q(\gamma)) && (3.129) \end{aligned}$$

2. **error 1-3**:

$$\begin{aligned} \text{P}_{13} &= \Pr[\eta_I[m] < -1] \cdot \Pr[\eta_Q[m] < -1] && (3.130)\\ &= Q(\gamma) \cdot Q(\gamma) && (3.131) \end{aligned}$$

3. **error 1-4**:

$$\begin{aligned} \text{P}_{14} &= \Pr[\eta_I[m] \geq -1] \cdot \Pr[\eta_Q[m] < -1] && (3.132)\\ &= (1 - Q(\gamma)) \cdot Q(\gamma) && (3.133) \end{aligned}$$

En els resultats anteriors veiem que els errors dominants (de major probabilitat) són l'error 1-2 i l'error 1-3,

$$\text{P}_{12} = \text{P}_{14} = Q(\gamma) \cdot (1 - Q(\gamma)) \quad > \quad \text{P}_{13} = Q^2(\gamma) \tag{3.134}$$

en ser $Q(\gamma) << 1$ pel marge de valors habituals de $\gamma$.

Podem calcular la probabilitat d'error associada a la transmissió del símbol $a_1$ com la probabilitat del següent event,

- **Event de no-error**: en aquest cas, el soroll no provoca un salt de quadrant i tenim,

$$\eta_I[m] > -1 \qquad , \qquad \eta_Q[m] > -1 \tag{3.135}$$

  on la probabilitat associada ve donada per $\text{P}_{11} = (1 - Q(\gamma))^2$.

Per tant, la probabilitat d'error de símbol associada a la transmissió del símbol $a_1$ es pot calcular com la complementària de la probabilitat de no-error ($\text{P}_{11}$),

$$\begin{aligned} \Pr[\epsilon_s | a[m] = a_1] &= 1 - \text{P}_{11} && (3.136)\\ &= 1 - (1 - Q(\gamma))^2 \\ &= 2Q(\gamma) - Q^2(\gamma) && (3.137) \end{aligned}$$

La probabilitat d'error de símbol, sense condicionar a quin símbol s'ha transmès, ve donada per,

$$\Pr[\epsilon_s] = \sum_{i=1}^{M=4} \Pr[\epsilon_s | a[m] = a_i] \cdot \Pr[a[m] = a_i] \tag{3.138}$$

Ara bé, com que partim de l'hipòtesi de què tots els símbols són equiprobables, tenim que $\Pr[a[m] = a_i] = p_i = 1/M = 1/4$. A més a més, com hem mencionat anteriorment, degut a la simetria de la constel·lació QPSK i a les característiques del soroll, tindrem que,

$$\Pr[\epsilon_s | a[m] = a_i] = \Pr[\epsilon_s | a[m] = a_1] \tag{3.139}$$

En conseqüència,

$$\begin{aligned} \Pr[\epsilon_s] &= \frac{1}{M} \cdot M \cdot \Pr[\epsilon_s | a[m] = a_1] = \Pr[\epsilon_s | a[m] = a_1] && (3.140) \\ &= 2Q(\gamma) - Q^2(\gamma) && (3.141) \end{aligned}$$

Pels valors habituals de $\gamma$, serà vàlida l'aproximació,

$$\Pr[\epsilon_s] \simeq 2Q(\gamma) \tag{3.142}$$

Per tant, la probabilitat d'error de símbol en QPSK és aproximadament el doble que per BPSK. D'entre els errors que es produeixen, la gran majoria són errors de quadrant adjacent i la resta (comparativament molts menys), errors de quadrant oposat. Respectivament, errors 1-2 i 1-4 (majoria, quadrant adjacent) i 1-3 (minoria, quadrant oposat), en el cas de $a[m] = a_1$. Tot seguit proporcionem un llistat complet de tots els errors (de les seves probabilitats $\mathrm{P}_{ik}$) que es poden produir segons el símbol transmès,

$$\begin{aligned} a[m] = a_1 = +1 + j \quad &, \quad \mathrm{P}_{12} = \mathrm{P}_{14} > \mathrm{P}_{13} \\ a[m] = a_2 = -1 + j \quad &, \quad \mathrm{P}_{21} = \mathrm{P}_{23} > \mathrm{P}_{24} \\ a[m] = a_3 = -1 - j \quad &, \quad \mathrm{P}_{32} = \mathrm{P}_{34} > \mathrm{P}_{31} \\ a[m] = a_4 = +1 - j \quad &, \quad \mathrm{P}_{41} = \mathrm{P}_{43} > \mathrm{P}_{42} && (3.143) \end{aligned}$$

on es verifiquen les igualtats,

1. **Errors de quadrant adjacent**: per $(k, i)$ índexos corresponents a quadrants adjacents,

$$\mathrm{P}_{ik} = \mathrm{P}_{ki} = \mathrm{P}_{12} = Q(\gamma) \cdot (1 - Q(\gamma)) \tag{3.144}$$

2. **Errors de quadrant oposat**: per $(k, i)$ índexos corresponents a quadrants oposats,

$$\mathrm{P}_{ik} = \mathrm{P}_{ki} = \mathrm{P}_{13} = Q^2(\gamma) \tag{3.145}$$

### Còmput de la probabilitat d'error de bit en QPSK

Considerarem únicament la probabilitat d'error de bit associada a la codificació Gray. En aquest cas, podem considerar el sistema de comunicacions QPSK com dos sistemes de comunicacions BPSK independents en paral·lel, on la parella de bits recuperats en el receptor, $[\hat{b}_1[m]\hat{b}_2[m]]$, a partir de la observació de símbol $z[m]$, vindrien donats per,

$$\begin{aligned} \hat{b}_1[m] &= \frac{1}{2}\left(1 - \hat{I}[m]\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \mathrm{sign}(z_I[m])\right) && (3.146) \\ \hat{b}_2[m] &= \frac{1}{2}\left(1 - \hat{Q}[m]\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \mathrm{sign}(z_Q[m])\right) && (3.147) \end{aligned}$$

on el soroll que afecta a la obseració $z_I[m]$ és independent del soroll que afecta a la observació $z_Q[m]$. Per tant, tots dos han de tenir idèntica probabilitat d'error de bit. És a dir,

$$\begin{aligned} p_{\mathrm{QPSK,Gray}}(\epsilon_b) &= p_{\mathrm{BPSK}}(\epsilon_b) && (3.148) \\ &= Q\left(\sqrt{2\frac{E_{b,c}}{N_0}}\right) && (3.149) \end{aligned}$$