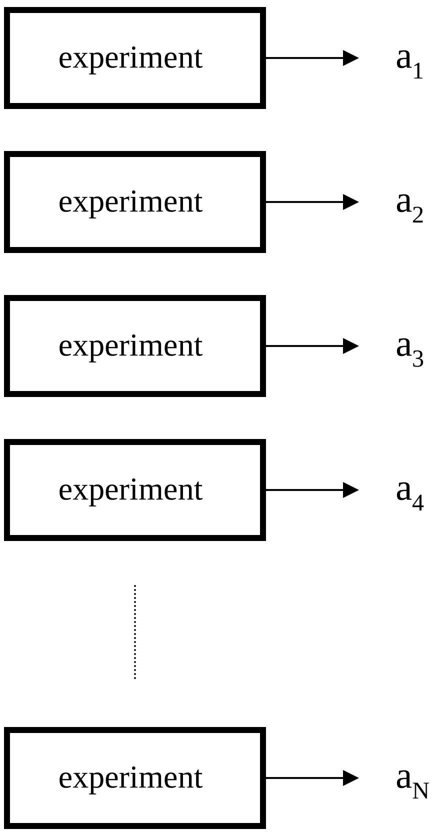
TRANSPARÈNCIES: PROCESSOS ESTOCÀSTICS

(segona versió, setembre 2008)

Josep Sala Alvarez, Dpt. TSC

VARIABLES ALEATÒRIES (VA)

El resultat de cada experiment és una realització particular de la variable aleatòria **A**



La variable aleatòria pot prendre valors d'un determinat conjunt anomenat Univers de la VA: U(A)

Variables aleatòries discretes (VAD):

L'univers és infinit o bé numerable. Exemples:

U(A) = {1, 2, 3, 5, 12, 344}

U(A) = {tots els sencers positius} , aquest és un conjunt d'infinits elements però numerable !

Variables aleatòries continues (VAC)

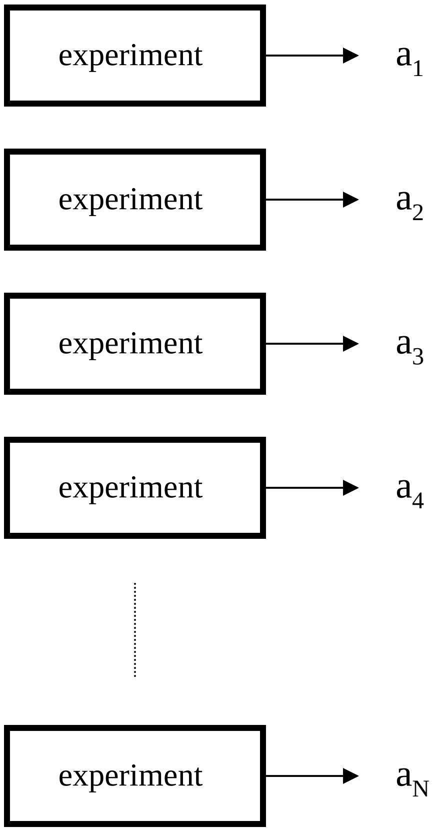
L'univers és infinit i no numerable. Exemples:

U(A) = {qualsevol valor de l'interval [0,1] }

U(A) = {qualsevol nombre real}

VARIABLES ALEATÒRIES (VA)

Cada resultat d'un experiment donat és imprevisible a priori però té associada una distribució de probabilitats.



Variables aleatòries discretes (VAD):

$p_A(\alpha) = \text{Prob}[\ A = \alpha\ ]$ Distribució de probabilitat

Per avaluar aquesta probabilitat, realitzem infinits experiments i el Percentatge de vegades que $a_i = \alpha$, és $p_A(\alpha)$

$$p_A(\alpha) = \lim_{N\to\infty} \frac{N_\alpha}{N}$$

Nombre de vegades que l'experiment ha produït α

Variables aleatòries continues (VAC)

Funció de densitat de probabilitat (PDF):

$$\text{Prob}[\alpha \le A \le \beta] = \int_\alpha^\beta p_A(a)da$$

àrea sota la corva de densitat en l'interval donat.

Funció de probabilitat cumulativa (CDF):

$$\text{Prob}[-\infty \le A \le \beta] = \int_{-\infty}^\beta p_A(a)da = F_A(\beta)$$

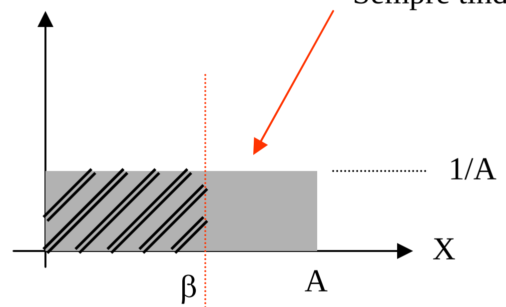
VARIABLES ALEATÒRIES (VA)

Exemple per una VAC
(Distribució Uniforme)

Funció Densitat de Probabilitat

$$p_X(x) = \frac{1}{A}\Pi\left(\frac{x - A/2}{A}\right)$$

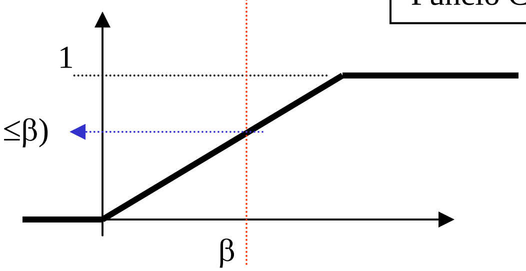
Sempre tindrem àrea unitària (gris)



(àrea de la zona ratllada)
=
Integral de la PDF de menys infinit fins β

Funció Cumulativa de Probabilitat

F(β) = Prob(X ≤β)



$$F_X(x) = \frac{x}{A}\Pi\left(\frac{x - A/2}{A}\right)$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(x')\,dx'$$

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & , \quad |x| \le 1/2 \\ 0 & , \quad |x| > 1/2 \end{cases}$$

Definició Pols Rectangular Bàsic

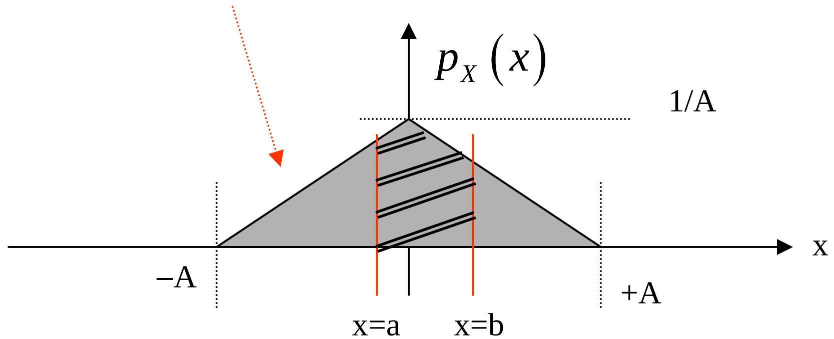
VARIABLES ALEATÒRIES (VA)

Exemple per una VAC (Distribució Triangular)

Definició Pols Triangular Bàsic

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 1-|x| & , \quad |x| \le 1 \\ 0 & , \quad |x| > 1 \end{cases}$$

Àrea sempre unitària: $\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)\,dx = 1$



$$p_X(x) = \frac{1}{A}\Lambda\left(\frac{x}{A}\right) = \frac{1}{A}\left(1-\frac{|x|}{A}\right)\cdot\Pi\left(\frac{x}{2A}\right)$$

(Notació habitual)

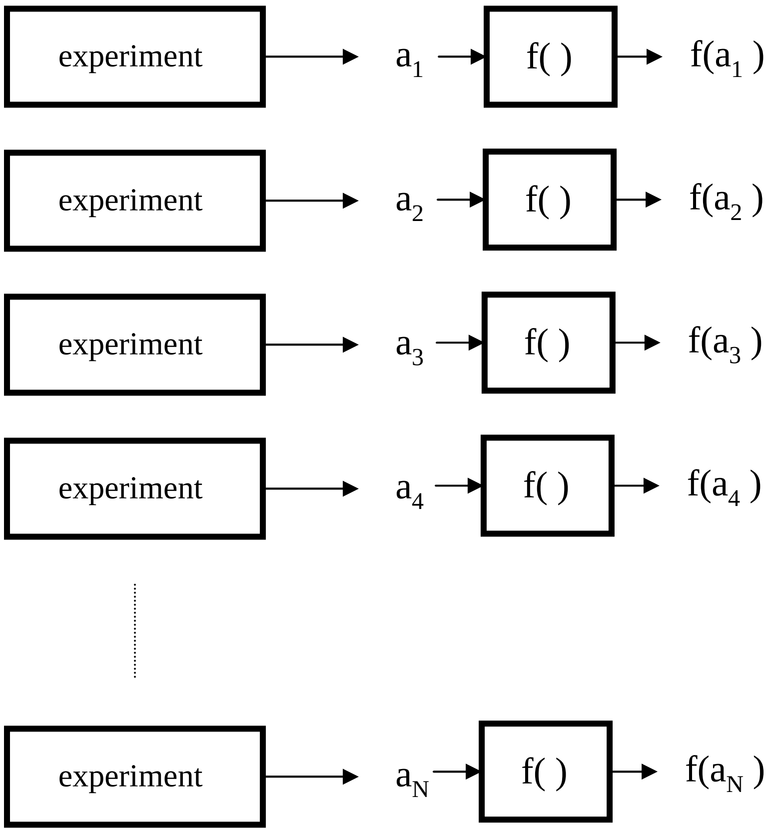
Àrea ratllada = Prob(a ≤ X < b) = $\int_a^b p_X(x)\,dx = \int_a^b \frac{1}{A}\left(1-\frac{|x|}{A}\right)dx$

Expressió per quan a,b tots dos en l'interval del dibuix (sinó també caldria el terme : $\Pi\left(\frac{x}{2A}\right)$ dins de l'integral)

EXERCICI:
Calculi Prob(a ≤ X < b) per qualsevol valor d'a i b.

EXERCICI:
Calculi i dibuixi la distribució cumulativa de probabilitat corresponent a la PDF triangular del dibuix.

VARIABLES ALEATÒRIES (VA)



Esperança d'una VA:

$$E\{A\} \;=\; \lim_{N\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_N}{N} \;=\; im_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} a_i$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} a \cdot p_A(a)\,da$$

Esperança d'una funció d'una VA:
(Teorema Fonamental de l'esperança)

$$E\{f(A)\} \;=\; \lim_{N\to\infty} \frac{f(a_1) + f(a_2) + \ldots + f(a_N)}{N} \;=\; \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(a_i)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(a)\cdot p_A(a)\,da$$

VARIABLES ALEATÒRIES (VA)

Potència d'una VA:

$$E\{|A|^2\} = \lim_{N\to\infty} \frac{|a_1|^2 + |a_2|^2 + \ldots + |a_N|^2}{N} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} |a_i|^2$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |a|^2 \cdot p_A(a)da$$

Moments d'una VA:

$$E\{A^k\} = \lim_{N\to\infty} \frac{a_1^k + a_1^k + \ldots + a_N^k}{N} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} a_i^k$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} a^k \cdot p_A(a)da$$

VA Gaussiana

$$p_A(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(a-\mu)^2/2\sigma^2}$$

$$E\{A\} = \mu$$

$$E\{A^2\} = \sigma^2$$

Els moments de segon ordre caracteritzen completament les VA Gaussianes

VARIABLES ALEATÒRIES (VA) : PROPIETATS DE L'OPERADOR ESPERANÇA

$$E[\alpha \cdot A] \;=\; \alpha \cdot E[A]$$

Factor constant
(deteminista = no-aleatori)

VARIABLE ALEATÒRIA

El factor constant surt fora de l'ESPERANÇA
(Propietat de Linealitat de l'ESPERANÇA)

L'operador ESPERANÇA actua únicament sobre allò que és aleatori dins de l'expressió

Matemàticament es pot veure segons el Teorema Fonamental de l'ESPERANÇA:

$$\begin{aligned}
E\left[Z = f(A) = \alpha \cdot A\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} z \cdot p_Z(z)\,dz \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} f(a) \cdot p_A(a)\,da \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha \cdot A \cdot p_A(a)\,da \;=\; \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} A \cdot p_A(a)\,da \\
&= \alpha \cdot E[A]
\end{aligned}$$

O bé partint de la interpretació de l'ESPERANÇA com un promig sobre infinits experiments (interpretació freqüentista):

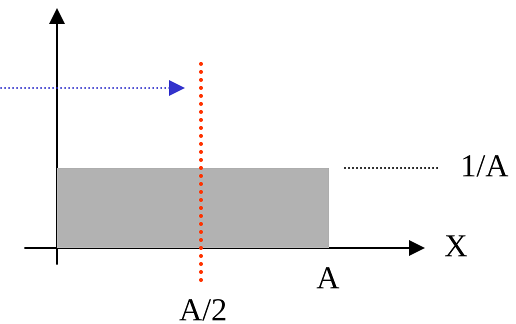
$$\begin{aligned}
E[\alpha \cdot A] &= \lim_{N\to\infty} \frac{(\alpha \cdot a_1) + (\alpha \cdot a_2) + ... + (\alpha \cdot a_N)}{N} \\
&= \alpha \cdot \lim_{N\to\infty} \frac{(a_1) + (a_2) + ... + (a_N)}{N} \\
&= \alpha \cdot E[A]
\end{aligned}$$

VARIABLES ALEATÒRIES (VA)

Exemple per una VAC
(Distribució Uniforme)

Valor que pren la VAC en promig

(punt central sempre que la PDF
Presenti un eix de simetria)



$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p_X(x)\,dx = \int_0^A x \cdot \frac{1}{A}\,dx = \frac{A}{2}$$

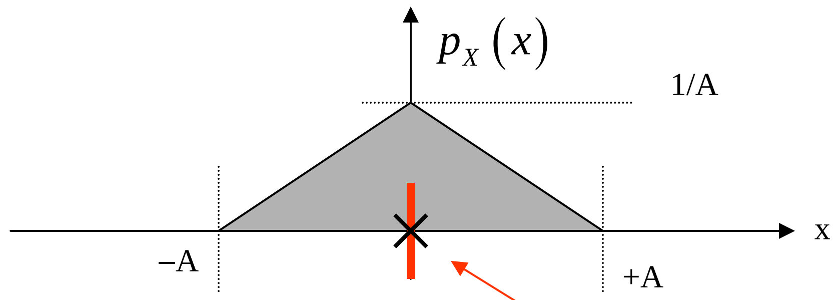
MITJA

$$E\left[X^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot p_X(x)\,dx = \int_0^A x^2 \cdot \frac{1}{A}\,dx = \frac{A^2}{3}$$

POTÈNCIA

VARIABLES ALEATÒRIES (VA)

Exemple per una VAC
(Distribució Triangular)



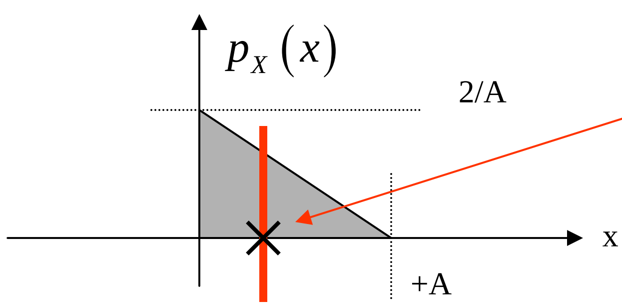
$$E[X] = 0$$ Eix de simetria !!!

$$E\left[X^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot p_X(x)\,dx = \int_{-A}^{A} x^2 \cdot \frac{1}{A}\left(1-\frac{|x|}{A}\right)dx = ??$$

Exemple per una VAC
(Distribució Semi-Triangular)

$$E[X] = \int_{0}^{A} x \cdot \frac{2}{A}\left(1-\frac{x}{A}\right)dx = ??$$

No té eix de simetria !!



$$E\left[X^2\right] = \int_{0}^{A} x^2 \cdot \frac{2}{A}\left(1-\frac{x}{A}\right)dx = ??$$

$$p_X(x) = \frac{2}{A}\left(1-\frac{x}{A}\right)\Pi\left(\frac{x-A/2}{A}\right)$$

VARIABLES ALEATÒRIES (VA)

VA conjuntes:

El resultat de cada experiment és una seqüència de VA's o un vector **v**

experiment → [a_1, b_1, c_1, d_1]= $\mathbf{v}_1$

experiment → [a_2, b_2, c_2, d_2]= $\mathbf{v}_2$

experiment → [a_3, b_3, c_3, d_3]= $\mathbf{v}_3$

experiment → [a_4, b_4, c_4, d_4]= $\mathbf{v}_4$

experiment → [a_N, b_N, c_N, d_N]= $\mathbf{v}_N$

Variables aleatòries discretes (VAD):

$p_{A,B,C,D}(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ = Prob[$A = \alpha$ & $B = \beta$ & $C = \gamma$ & $D = \delta$]=$p_{\mathbf{V}}(\mathbf{v})$

Per avaluar aquesta probabilitat, realitzem infinits experiments i el Percentatge de vegades que $\mathbf{v} = [\alpha,\beta,\gamma,\delta]$ és $p_{\mathbf{V}}(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$

$$p_{\mathbf{V}}(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \quad = \quad \lim_{N\to\infty} \frac{N_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}}{N}$$

Variables aleatòries continues (VAC)

Funció de densitat de probabilitat (PDF):

$$\mathrm{Prob}[\alpha_1 \le A \le \alpha_2 \ \&\ \beta_1 \le B \le \beta_2 \ \&\ \gamma_1 \le C \le \gamma_2 \ \&\ \delta_1 \le D \le \delta_2]$$

$$= \int_{\delta_1}^{\delta_2}\int_{\gamma_1}^{\gamma_2}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} p_V(a,b,c,d)\,da\cdot db\cdot dc\cdot dd$$

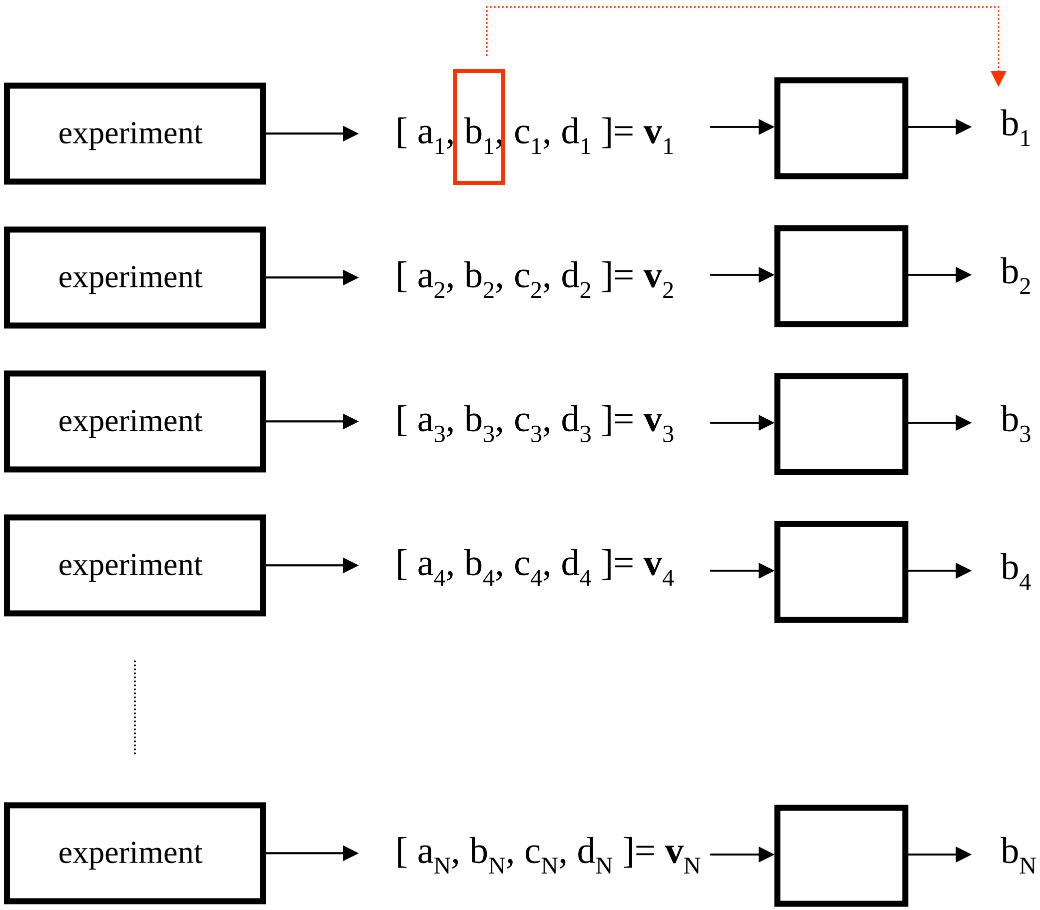
àrea sota la corva de densitat en l'interval donat.

Funció de probabilitat cumulativa (CDF):

$$\mathrm{Prob}[-\infty \le A \le \alpha_2 \ \&\ -\infty_1 \le B \le \beta_2 \ \&\ -\infty_1 \le C \le \gamma_2 \ \&\ -\infty \le D \le \delta_2]$$

$$= \int_{-\infty}^{\delta_2}\int_{-\infty}^{\gamma_2}\int_{-\infty}^{\beta_2}\int_{-\infty}^{\alpha_2} p_V(a,b,c,d)\,da\cdot db\cdot dc\cdot dd \quad = \quad F_{\mathbf{V}}(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$$

DISTRIBUCIÓ MARGINAL

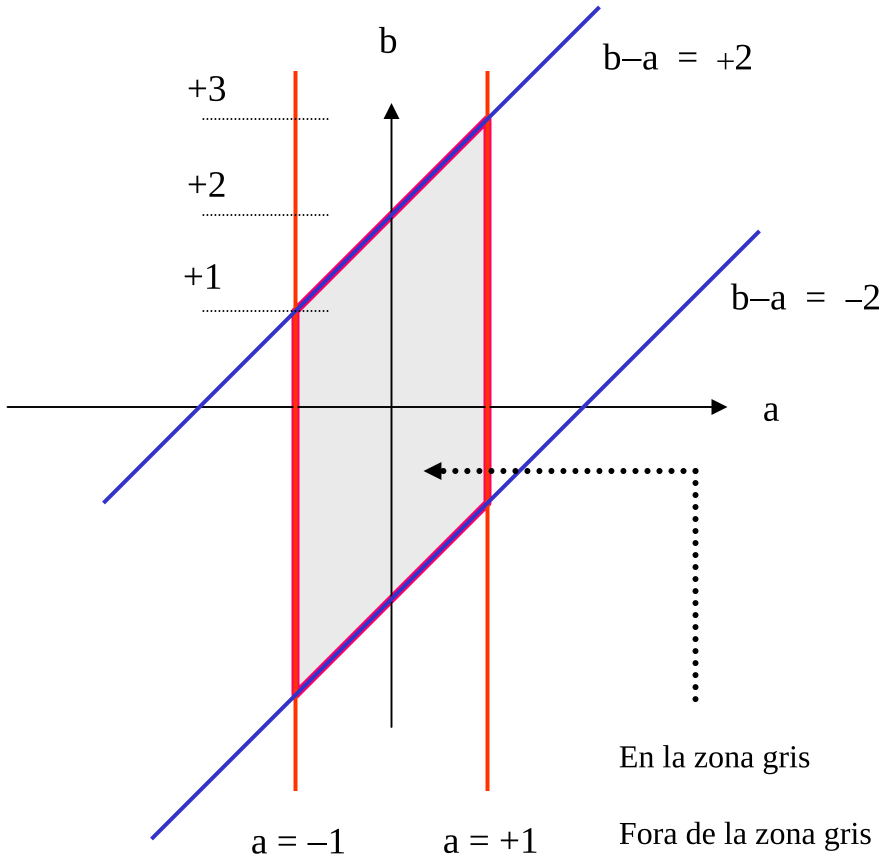


La PDF individual (marginal) s'obté integrant la PDF conjunta sobre la resta de variables (marginalització)

$$p_B(b) \quad = \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p_V(a,\mathbf{b},c,d)\,da\cdot dc\cdot dd$$

DISTRIBUCIÓ CONJUNTA i MARGINAL : EXEMPLE

Suposem una distribució conjunta donada per: $p_{A,B}(a,b) \;=\; \frac{1}{8}\Pi\left(\frac{a}{2}\right)\Pi\left(\frac{b-a}{4}\right)$



$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p_{A,B}(a,b)\,da\cdot db \;=\; 1$$

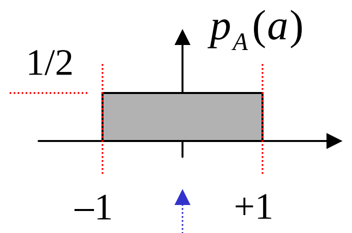
Comprovem que tenim volum unitari subtingut sota la densitat de probabilitat conjunta de les V.A. A i B :
En aquest cas equival a què
VOLUM = ÀREA zona gris x (**1/8**) = 1
(si la integral simple és l'àrea sota un funció d'una variable, l'integral doble és el volum sota una funció de dues variables)

En la zona gris : $p_{A,B}(a,b) \;=\; 1/8$

Fora de la zona gris : $p_{A,B}(a,b) \;=\; 0$

DISTRIBUCIÓ CONJUNTA i MARGINAL : EXEMPLE (continuació)

Densitat marginal de la variable A: $p_A(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{A,B}(a,b)\,db$



$$p_A(a) = \frac{1}{8}\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{a}{2}\right)\Pi\left(\frac{b-a}{4}\right)db = \frac{1}{8}\Pi\left(\frac{a}{2}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\Pi\left(\frac{b-a}{4}\right)db = \frac{1}{2}\Pi\left(\frac{a}{2}\right)$$

Comprovem que té àrea unitària !!

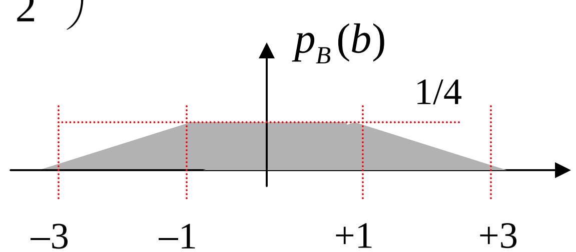
Densitat marginal de la variable B: $p_B(b) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{A,B}(a,b)\,da$

$$p_B(b) = \frac{1}{8}\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{a}{2}\right)\Pi\left(\frac{b-a}{4}\right)da = \frac{1}{8}\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{a}{2}\right)\left(\Pi\left(\frac{b-a+1}{2}\right)+\Pi\left(\frac{b-a-1}{2}\right)\right)da$$

$$= \frac{1}{8}\left(\Pi\left(\frac{b}{2}\right) * \left(\Pi\left(\frac{b+1}{2}\right)+\Pi\left(\frac{b-1}{2}\right)\right)\right)$$

Convolució : $\Pi\left(\frac{t}{T}\right) * \Pi\left(\frac{t}{T}\right) = T\cdot\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$

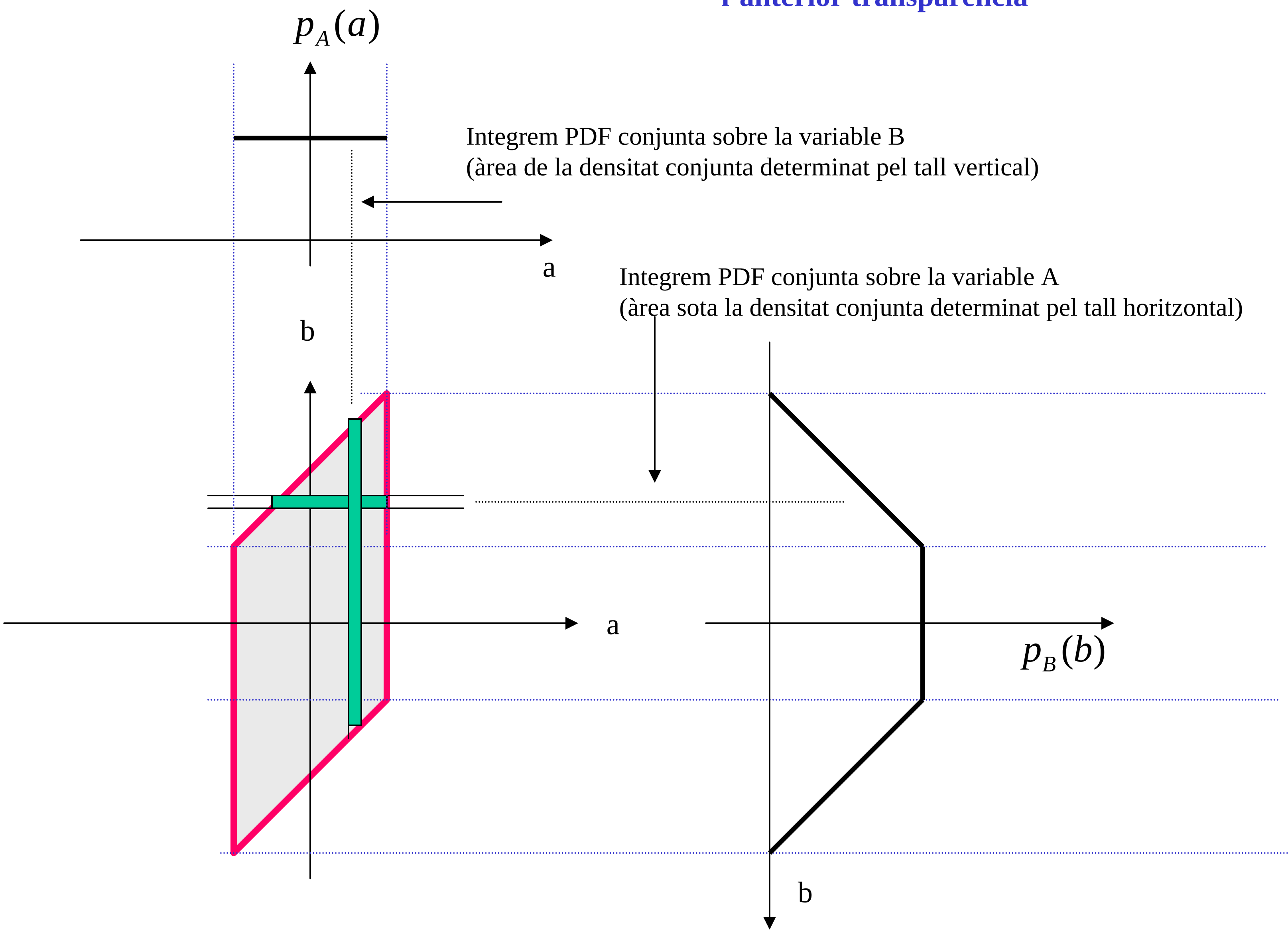
$$= \frac{1}{8}\left(2\Lambda\left(\frac{b+1}{2}\right)+2\Lambda\left(\frac{b-1}{2}\right)\right) = \frac{1}{4}\Lambda\left(\frac{b+1}{2}\right)+\frac{1}{4}\Lambda\left(\frac{b-1}{2}\right)$$



Comprovem que té àrea unitària !!

DISTRIBUCIÓ CONJUNTA i MARGINAL : EXEMPLE (continuació)

Interpretació gràfica dels càlculs analítics de l'anterior transparència



INDEPENDÈNCIA DE VARIABLES ALEATÒRIES

Un conjunt de variables aleatòries són independents quan la seva PDF conjunta factoritza en les eves marginals:

$$p_V(a,b,c,d) \quad = \quad p_A(a)\,p_B(b)\,p_C(c)\,p_D(d)$$

<u>NO és el cas</u> de l'exemple anterior on: $p_{A,B}(a,b) \quad = \quad \frac{1}{8}\Pi\left(\frac{a}{2}\right)\Pi\left(\frac{b-a}{4}\right)$

Independència estadística entre dues variables aleatòries A i B equival a dir que el fet de que A prengui un determinat valor, no té cap influència sobre els valors que pot prendre B, i viceversa.

Si dues variables aleatòries són independents: $E\{f(A)g(B)\} \quad = \quad E\{f(A)\}E\{g(B)\}$

Si dues variables aleatòries són independents:

$$C \quad = \quad A+B$$

$$p_C(c) \quad = \quad p_A(c) * p_B(c)$$

La PDF és la convolució de les PDF's.

$$p_A(c) * p_B(c) \quad = \quad \int_{-\infty}^{+\infty} p_A(x)\,p_B(c-x)\,dx \quad = \quad \int_{-\infty}^{+\infty} p_B(x)\,p_A(c-x)\,dx$$

VARIABLES ALEATÒRIES CONDICIONADES

Pel cas de dues variables aleatòries, no necessàriament independents, tenim:

$$p_{A,B}(a,b) \quad = \quad p_A(a)\, p_{B|A}(b\,|\,a) \quad = \quad p_B(b)\, p_{A|B}(a\,|\,b)$$

Densitat de probabilitat conjunta

Densitat de probabilitat marginal de la variable A

Densitat de probabilitat de la variable B condicionada a la A

Densitat de probabilitat marginal de la variable B

Densitat de probabilitat de la variable A condicionada a la B

Quan les variables A i B són independents → Realitzacions de A no tenen cap efecte en els valors que pren B

$$p_{B|A}(b\,|\,a) \quad = \quad p_B(b)$$

$$p_{A,B}(a,b) \quad = \quad p_A(a)\, p_B(b)$$

(el mateix aplica de forma anàloga si considerem A|B)

Encara que les variables A i B no siguin independents → Les variables A i B|A sempre ho són (el condicionament de B a A elimina la dependència)

VARIABLES ALEATÒRIES CONDICIONADES

Podem definir probabilitat condicionada com: $$p_{B|A}(b\,|\,a) \;=\; \frac{p_{A,B}(a,b)}{p_A(a)}$$

La densitat de probabilitat marginal es pot expressar com:

$$p_A(a) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} p_{A,B}(a,b)\,db \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} p_B(b)\,p_{A|B}(a\,|\,b)\,db \;=\; E_B\left[\,p_{A|B}(a\,|\,b)\right]$$

D'on podem obtenir la següent expressió que ens "gira" el condicionament:

$$p_{B|A}(b\,|\,a) \;=\; \frac{p_B(b)\,p_{A|B}(a\,|\,b)}{\int_{-\infty}^{+\infty} p_B(b)\,p_{A|B}(a\,|\,b)\,db}$$

EXEMPLE (Aplicació en Comunicacions):

$$Y \;=\; X \;+\; N$$

coneixem $p_{Y|X}(y\,|\,x) \;=\; p_N\left(y-x\right)$

Variable aleatòria rebuda

Variable aleatòria transmesa

Variable aleatòria de soroll (degradació sobre X)

No són independents !!
(podriem recuperar X a partir de Y si ho fossin ?)

Un receptor entrega la x_0 que maximitza $p_{X|Y}(X = x_0\,|\,Y = y_0)$

(maximitza la densitat de probabilitat condicionada al fet d'haver rebut y_0)

EXEMPLE : CÀLCUL d'ESPERANCES

La PDF conjunta ve donada per: $p_{A,B}(a,b) = \frac{1}{8}\Pi\left(\frac{a}{2}\right)\Pi\left(\frac{b-a}{4}\right)$ $\longrightarrow$ Calculi: $M = E\left[A^2 B\right]$

$$M = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} a^2 b \cdot p_{A,B}(a,b)\cdot da \cdot db$$ (Aplicant el Teorema Fonamental de l'ESPERANÇA per 2 variables conjuntament aleatòries)

$$M = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} a^2 b \cdot \frac{1}{8}\Pi\left(\frac{a}{2}\right)\Pi\left(\frac{b-a}{4}\right)\cdot da \cdot db$$

$$= \frac{1}{8}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} b\Pi\left(\frac{b-a}{4}\right)db\right)\cdot a^2\Pi\left(\frac{a}{2}\right)\cdot da$$

$$= \frac{1}{8}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-2-a}^{+2-a} bdb\right)\cdot a^2\Pi\left(\frac{a}{2}\right)\cdot da$$

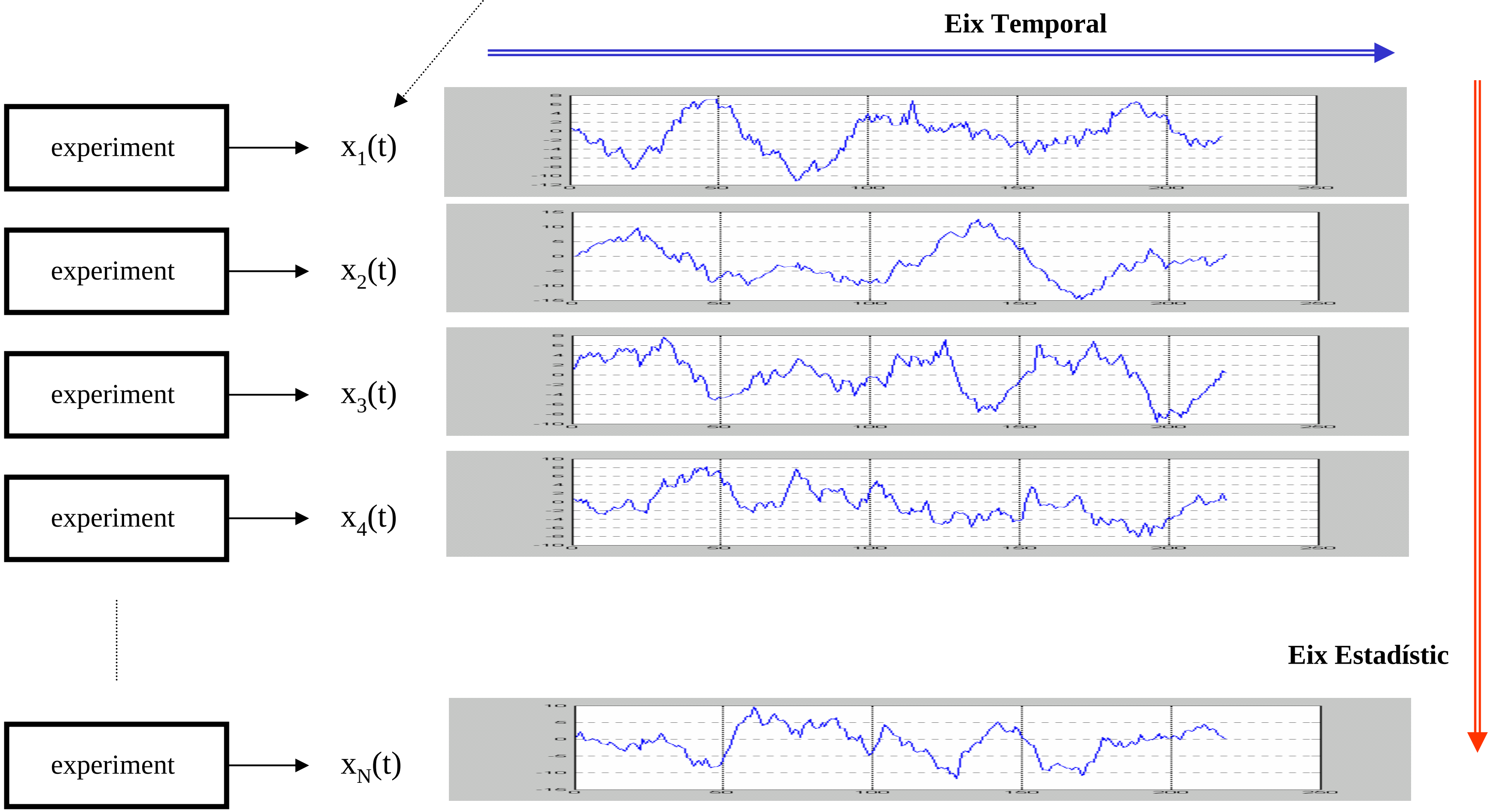
$$= \frac{1}{8}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}b^2\right)_{-2-a}^{+2-a}\cdot a^2\Pi\left(\frac{a}{2}\right)\cdot da = \frac{1}{8}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\overbrace{(2-a)^2-(2+a)^2}^{=-4a}}{2}\right)\cdot a^2\Pi\left(\frac{a}{2}\right)\cdot da$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} a^3 \cdot da = -\frac{1}{4}$$

PROCESSOS ESTOCÀSTICS (PE)

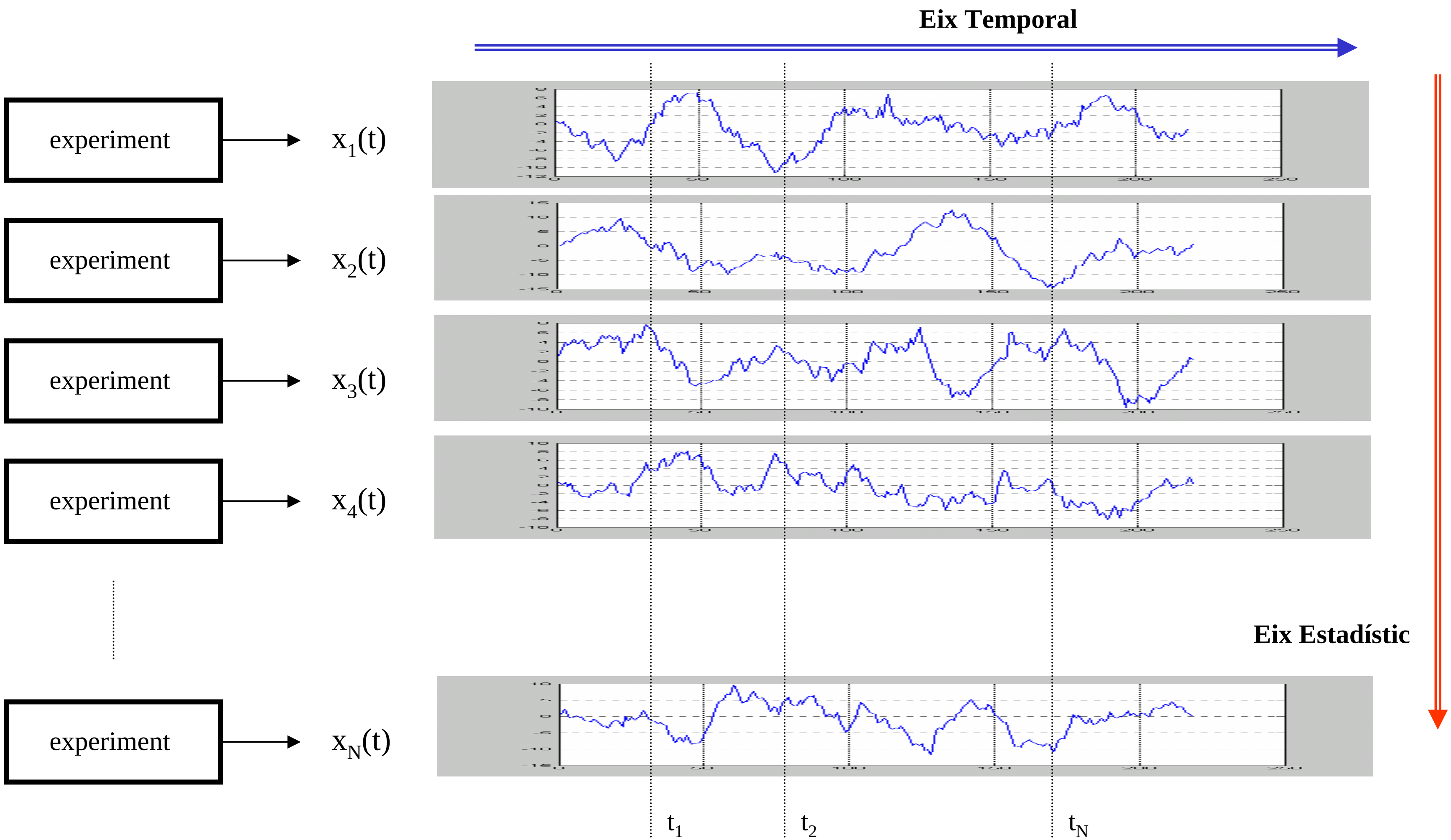
Processos estocàstics:

El resultat de cada experiment és un senyal variant en el temps. Cada mostra d'aquest senyal és una VA. Cada conjunt de mostres en temps diferents és una VA conjunta.



Del resultat de cada experiment n'anomenem una **realització** del procés

PROCESSOS ESTOCÀSTICS (PE)



En un procés, cada conjunt de mostres $X = [X(t_1),X(t_2),...,X(t_M)]$ constitueix una VA conjunta que té una determinada distribució de probabilitats associada

PROCESSOS ESTOCÀSTICS (PE)

Un procés és **estacionari** quan aquesta distribució de probabilitats depèn dels retards i no dels temps absoluts

$$p_{\mathbf{X}}\left(x(t_0), x(t_0+\tau_1), \ldots, x(t_0+\tau_M)\right) \quad = \quad p_{\mathbf{X}}\left(x(t_1), x(t_1+\tau_1), \ldots, x(t_1+\tau_M)\right)$$

per qualsevol t_0, t_1

Un procés és **ergòdic** quan poem substituir els promitjos estadístics (eix vertical) sobre diverses realitzacions pel Promitjos temporals sobre una única realització:

$$\mathbf{X}_i(t_0) = [x_i(t_0), x_i(t_0+\tau_1), \ldots, x_i(t_0+\tau_M)]$$

$$E\left\{f\left(\mathbf{X}(t)\right)\right\} \quad = \quad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f\left(\mathbf{X}_i(t)\right)$$

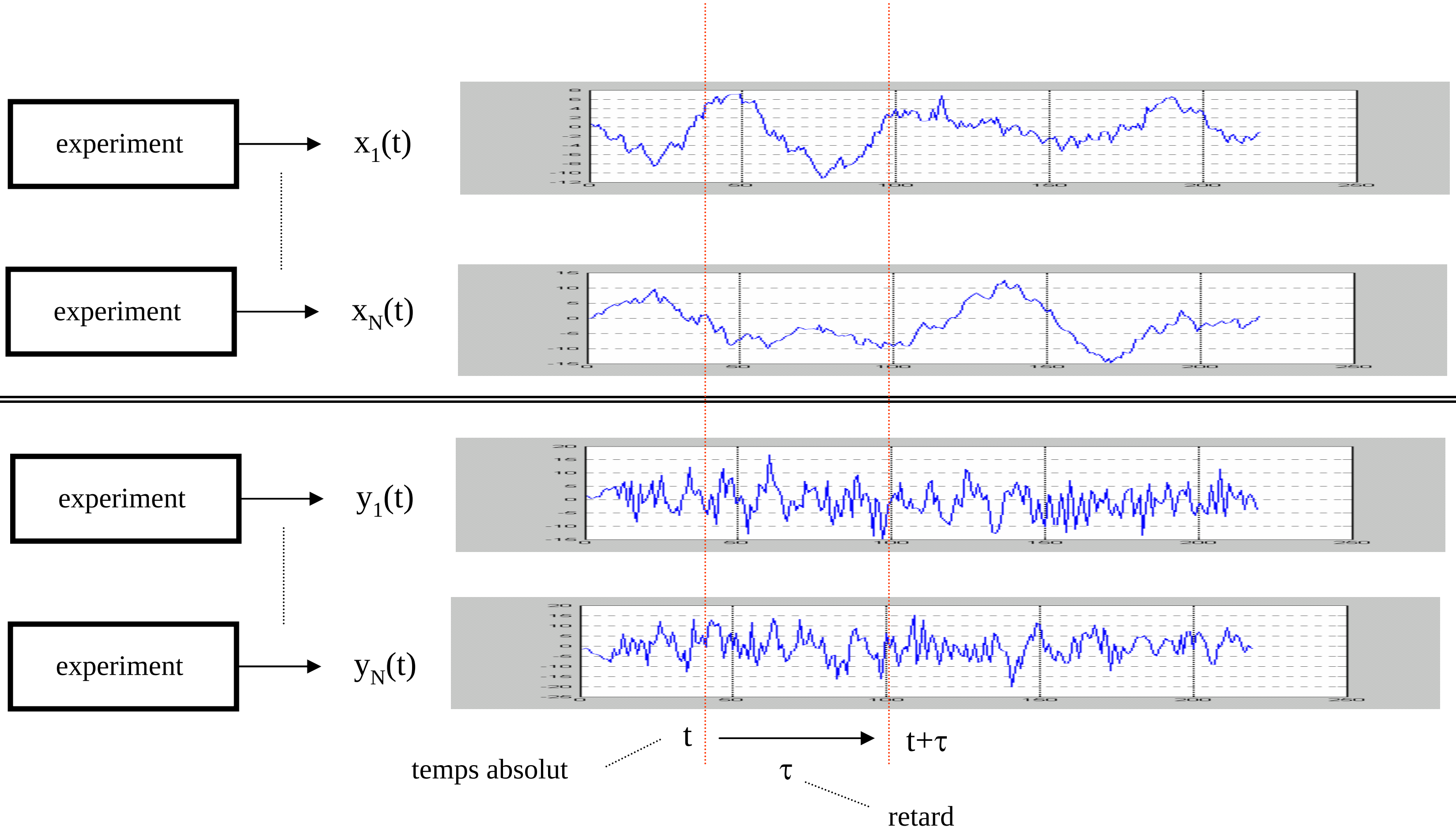
← Promig estaístic de la funció del procés

$$= \quad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left(\mathbf{X}_i(t_0 + k\cdot\Delta t)\right)$$

← Promig temporal sobre una única realització,
Podem posar un increment Δt qualsevol !!

Un procés és **cicloestacionari** quan la seva distribució de probabilitats té una variació periòdica en t:

CORRELACIÓ ENTRE PROCESSOS ESTOCÀSTICS (PE)



$$e_{x,y}(t+\tau,t) = E\left\{\left|x(t+\tau)-y(t)\right|^2\right\} \longrightarrow$$

Per mesurar la semblança entre dos senyals aleatoris diferents, definim un error com la potència del senyal diferència en els temps especificats

CORRELACIÓ ENTRE PROCESSOS ESTOCÀSTICS (PE)

$$
\begin{aligned}
e_{x,y}(t+\tau,t) &= E\left\{ \left| x(t+\tau) - y(t) \right|^2 \right\} \\
&= E\left\{ \left| x(t+\tau) \right|^2 \right\} + E\left\{ \left| y(t) \right|^2 \right\} - 2\,\mathrm{Re}\left[E\left\{ x(t+\tau)\, y^*(t) \right\} \right]
\end{aligned}
$$

$$r_{x,y}(t,\tau) = E\left\{ x^*(t)\, y(t+\tau) \right\} \longrightarrow$$

Definició de la correlació creuada entre dos processos aleatoris: quan aquesta correlació és alta, la semblança entre processos és alta, o l'error anteriorment definit és petit

$$
\begin{aligned}
r_{x,y}(t,\tau) &= E\left\{ x^*(t)\, y(t+\tau) \right\} \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i^*(t)\, y_i(t+\tau) \longleftarrow
\end{aligned}
$$

Promig estadístic sobre tots els experiments

Quan els procesos x(t) i y(t) són **estacionaris**: la correlació creuada és únicament funció del retard

$$r_{x,y}(t,\tau) = r_{x,y}(\tau)$$

Quan x(t) = y(t) tenim l'**autocorrelació**: $r_{x,x}(\tau)$

ESPECTRE DE DENSITAT DE POTÈNCIA

$$r_{x,x}(\tau) = E\left\{ x^*(t)x(t+\tau) \right\}$$

$$r_{x,x}(0) = E\left\{ \left|x(t)\right|^2 \right\} = \sigma_x^2$$

Si en el retard τ=0, la funció d'autocorrelació del procés conté la informació de potència, quina informació ens aporta aquesta funció per altres valors del retard ????

Ens diu com es distribueix la potència en freqüència !!

$$S_{x,x}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} r_{x,x}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

Transformada de Fourier

$$r_{x,x}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{x,x}(f)e^{+j2\pi f\tau}df$$

Transformada Inversa de Fourier

$$r_{x,x}(0) = \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{x,x}(f)df$$

L'àrea sota la **densitat espectral de potència** és la potència

EXEMPLES : CÀLCUL DE POTÈNCIA

Suposem un Procés Estocàstic X(t) definit per: $X(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t)$

Variable Aleatòria de densitat de probabilitat: $p_A(a)$

Quina és la seva funció d'autocorrelació ? $r_{XX}(t;\tau) = E\left[X^*(t)X(t+\tau)\right]$

$$r_{XX}(t;\tau) = E\left[A^2 \cos(2\pi f_0 t)\cos\left(2\pi f_0 (t+\tau)\right)\right]$$

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\cos(a+b) + \frac{1}{2}\cos(a-b)$$

L'ESPERANÇA només actua sobre les magnituds aleatòries

$$r_{XX}(t;\tau) = E\left[A^2\right] \cdot \frac{\cos(2\pi f_0 \tau) + \cos\left(2\pi f_0 (2t+\tau)\right)}{2}$$