Apunts d'equacions diferencials

1

1. Una **equació diferencial** és una equació que conté derivades.
   (a) Exemples
      i. $y' = x + 3$
      ii. $(y'')^2 + (y')^3 + 3y = x^2$
      iii. $\frac{\partial z}{\partial x} = z + x\frac{\partial z}{\partial y}$
2. Una equació diferencial es diu **ordinària** si només hi ha una variable independent (els dos primers exemples). **L'ordre** de l'equació diferencial és el de la derivada més gran que hi intervé. (Els ordres dels exemples anteriors són 1, 2 i 1 respectivament).

   Aquest curs estudiarem només equacions diferencials ordinàries de primer ordre.
3. La **solució general** d'una equació diferencial és el conjunt de totes les funcions que la satisfan.
   (a) Exemple
      i. Veurem a la secció 3. que la solució general de $y' = y$ és $y = Ce^x$.

2

2.1 Famílies de corbes i equacions diferencials

1. En condicions suficientment bones (que detallem en el següent Teorema) , la solució general d'una equació diferencial ordinaria de primer

ordre és una **família de funcions (o de corbes)** que depenen d'un parametre.

2. Exemple

$$y' = 2x \rightarrow y = x^2 + C$$
$$y' = y \rightarrow y = Ce^x$$

3. **Teorema d'existencia i unicitat**. Donada una equació diferencial $y' = f(x, y)$, si f i $\frac{\partial f}{y}$ són contínues en un domini, aleshores per cada punt (x_0, y_0) del domini hi passa una i només una corba solució.

4. La corba solució que passa per (x_0, y_0) es diu **solució particular** i (x_0, y_0) la **condició inicial**.

5. Si fallen les hiptesis del Teorema anterior, pot haver-hi més d'una o cap solució per algun punt.

6. Exemple

$$y' = 3y^{\frac{2}{3}}$$

   $f(x, y) = y^{\frac{2}{3}}$ i $\frac{\partial f}{y} = \frac{2}{y^{\frac{1}{3}}}$ que no está definida quan $y = 0$. La solució general d'aquesta equació diferencial és $y = (x - a)^3$, però a més a més hi ha la solució $y = 0$. Pels punts amb segona coordenada igual a 0 (els de la recta OX) hi passen dues solucions.

7. Recíprocament, ens pot interessar trobar **l'equació diferencial que satisfà una família de corbes depenent d'un parametre donada**. Aix ho aconseguim derivant. Amb l'equació de la família i la de la derivada eliminem el parametre.

8. Exemple

$$x + Cy = 0$$

   Derivant s'obté

$$1 + Cy' = 0 \rightarrow C = -\frac{1}{y'}$$

Substituint a l'equació,

$$x - \frac{y}{y'} = 0 \rightarrow y' = \frac{y}{x}.$$

9. En l'exemple anterior hem **derivat de forma implícita**: Noti's que x és la variable independent i que y és una funció que depèn de x (ho podem escriure $y = y(x)$). Així la derivada de x és 1, però la derivada de y és y' (la derivada de y respecte de x). De la mateixa manera, la derivada de, per exemple, x^3 és $3x^2$, mentre que la derivada de y^3 és $3y^2 \cdot y'$ (regla de la cadena).

2.2 Representació grafica de les solucions

2.2.1 Isoclines i camp de direccions

1. Les **isoclines** de l'equació diferencial $y' = f(x, y)$ són les línies que passen pels punts amb el mateix pendent (mateixa derivada).

2. Si a cada punt (x, y) del pla hi tracem un petit segment amb el pendent y' corresponent, obtenim el **camp de direccions** de l'equació diferencial.

   (a) Exemple. La Figura 1 mostra les isoclines i el camp de direccions de l'equació diferencial $y' = 2x$.

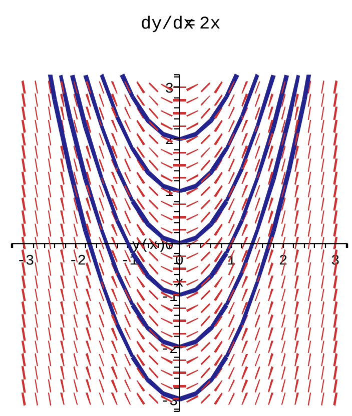

Figura 1: Isoclines, camp de direccions i alguna solució de $y' = 2x$.

3

3.1 Equacions diferencials en variables separables

Definició 3.1.1. *Una equació diferencial és de variables separables si i només si es pot escriure* $y' = f(x) \cdot g(y)$.

En aquest cas, convé escriure l'equació de la següent manera:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

Aleshores, aillant es té

$$\frac{1}{g(y)}dy = f(x)dx$$

i per tant

$$\int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx.$$

Exemple. $y' = 2xy$

$$\frac{dy}{y} = 2xdx$$

$$lny = x^2 + C$$

$$y = e^{x^2+C} = ke^{x^2}.$$

3.2 Propietats de la funció exponencial i logarítmica

$\log 1 = 0$	$e^0 = 1$
$\log(xy) = \log x + \log y$	$e^{x+y} = e^x \cdot e^y$
$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$	$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
$\log x^n = n \log x$	
$\log \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log x$	
$-\log x = \log \frac{1}{n}$	

3.3 Trajectòries ortogonals

1.

   Proposició 3.3.1. *Dues rectes $y = m_1x + n_1$ i $y = m_2x + n_2$ són perpendiculars si i només si $m_1 \cdot m_2 = -1$.*

2.

   Definició 3.3.2. *Dues corbes c_1 i c_2 que es tallen en el punt (x_0, y_0) són ortogonals si i només si les rectes tangents a c_1 i c_2 són perpendiculars.*

3.

   Definició 3.3.3. *Donades dues famílies de corbes F i G, G és la família de trajectòries ortogonals a F si i només si per cada punt (x_0, y_0) del pla les corbes c_1 de F i c_2 de G que passen per (x_0, y_0) són ortogonals.*

4. Per a trobar les trajectòries ortogonals G a una família F podem trobar l'equació diferencial associada a F $y' = f(x, y)$ i G serà la solució de l'equació $y' = -\frac{1}{f(x,y)}$ (per la Proposició 3.3.1).

5. Exemple. Considerem la família F formada per les corbes $x \cdot y = a$. Derivant implícitament s'obté $y + xy' = 0$ i per tant $y' = -\frac{y}{x}$ és l'equació associada a F. G és la família solució de l'equació $y' = \frac{x}{y}$. Resolent aquesta equació (de variables separables) es té que G s la família de corbes $y^2 - x^2 = c$ (Figura 2).

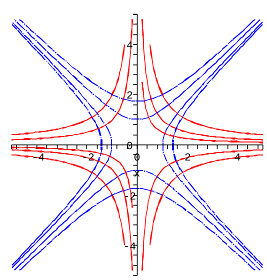

Figura 2: Les famílies ortogonals $x \cdot y = a$ i $x^2 - y^2 = c$.

4

4.1 Equacions diferencials homogènies

1.

   Definició 4.1.1. *Una funció $f(x,y)$ és homogènia (de grau 0) si, i només si, $f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$.*

2. Exemple. La funció $f(x,y) = \frac{x^2+3y^2}{4xy}$ és homogènia.

   Efectivament, $f(\lambda x, \lambda y) = \frac{(\lambda x)^2+3(\lambda y)^2}{4\lambda x\lambda y} = \frac{\lambda^2x^2+3\lambda^2y^2}{4\lambda^2xy} = \frac{\lambda^2(x^2+3y^2)}{4\lambda^2xy} = \frac{x^2+3y^2}{4xy} = f(x,y)$.

3. Exemple. La funció $f(x,y) = \frac{x^3+sinx}{x^2+4}$ **no** és homogènia.

   Efectivament, $f(\lambda x, \lambda y) = \frac{(\lambda x)^3+sin(\lambda x)}{(\lambda x)^2+4} = \frac{\lambda^3x^3+sin(\lambda x)}{\lambda^2x^2+4} \neq f(x,y)$.

4.

   Definició 4.1.2. *Una equació diferencial $y' = f(x,y)$ és* **homogènia** *si, i només si, $f(x,y)$ ho és.*

5.

   Teorema 4.1.3. *Una equació diferencial homogènia es transforma en una de variables separables amb el canvi $y = ux$.*

   Amb aquest canvi, $y' = u'x + u$. (Derivada d'un producte tenint en compte que $u = u(x)$ és una funció que depèn de x.)

6. Exemple. Volem trobar la solució de l'equació $y' = \frac{x^3+y^3}{3xy^2}$. És homogènia i per tant, amb el canvi $y = ux$ es transformarà en una de variables separables.

   Efectivament:

$$u'x + u = \frac{x^3 + (ux)^3}{3x(ux)^2} = \frac{x^3(1+u^3)}{3x^3u^2} = \frac{1+u^3}{3u^2}$$

$$u'x = \frac{1+u^3}{3u^2} - u = \frac{1+u^3-3u^3}{3u^2} = \frac{1-2u^3}{3u^2}$$

$$\frac{3u^2du}{1-2u^3} = \frac{dx}{x}.$$

Resolem aquesta equació de variables separables:

$$-\frac{1}{2}ln|1-2u^3| = ln|x| + lnc$$
$$ln(1-2u^3)^{-\frac{1}{2}} = ln(xc)$$
$$(1-2u^3)^{-\frac{1}{2}} = xc$$
$$1 = (1-2u^3)x^2k \quad (c^2 = k)$$

Tenint en compte que $u = \frac{y}{x}$,

$$1 = \left(1 - 2\left(\frac{y}{x}\right)^3\right)x^2k$$

que arreglat queda

$$x = \left(x^3 - 2y^3\right)k.$$

5

5.1 Mètode d'Euler

1. Suposem que volem trobar la solució particular de l'equació diferencial $y' = f(x,y)$ amb la condició inicila $y(x_0) = y_0$. Moltes vegades no hi ha cap mètode efectiu de resoldre una equació diferencial donada. En aquests casos es pot trobar una solució paroximada per mètodes numèrics un dels quals és el mètode d'Euler:

   La idea és aproximar la solució exacta (que no sabem trobar) per una corba poligonal construida dibuixant una seqüència de segments determinats pel camp de direccions de l'equació diferencial

2. **Mètode d'Euler**.

   (a) Escollim una sèrie de punts $x_0 < x_1 < ... < x_n < ...$ igualment espaiats: aleshores $x_n = x_0 + nh$ on h s'anomena **pas**.

   (b) La solució exacta per $P_0 = (x_0, y_0)$ té pendent $m_0 = f(x_0, y_0)$.

(c) Aproximem la solució per P_0 per la recta de pendent m_0

(d) Aquesta recta talla la vertical $x = x_1$ en un punt $P_1 = (x_1, y_1)$.

(e) En P_1 calculem el pendent del camp de direccions: $m_1 = f(x_1, y_1)$.

(f) Construim la recta per P_1 i pendent m_1.

(g) Aquesta recta talla la vertical $x = x_2$ en un punt $P_2 = (x_2, y_2)$.

(h) ...

(i) i continuant d'aquesta manera *generem una corba poligonal: la poligonal d'Euler*

La fórmula per a trobar y_{i+1} és $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$

5.2 Exemple.

Volem trobar la poligonal d'Euler de l'equació diferencial $y' = y$ amb la condició inicial $y(0) = 1$ i pas $h = 0,5$.

x_i	y_i	$m_i = f(x_i, y_i)$
$x_0 = 0$	$y_0 = 1$	1
$x_1 = 0,5$	$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0,5 \cdot 1 = 1,5$	$1,5 = f(x_1, y_1)$
$x_2 = 1$	$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1,5 + 0,5 \cdot 1,5 = 2,25$	$2,25 = f(x_2, y_2)$
$x_3 = 1,5$	$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = 2,25 + 0,5 \cdot 2,25 = 3,375$	$3,375 = f(x_3, y_3)$
$x_4 = 2$	$y_4 = y_3 + hf(x_3, y_3) = 3,375 + 0,5 \cdot 3,375 = 5,0625$	$5,0625 = f(x_4, y_4)$

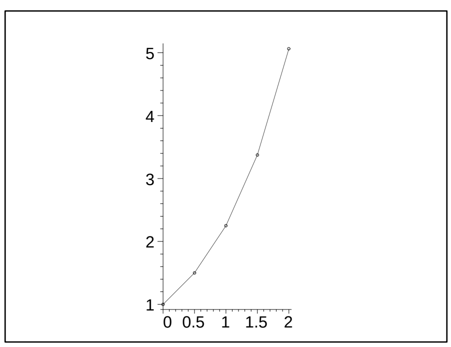

Figura 3: Poligonal d'Euler de $y' = y$ amb $y(0) = 1$ i pas 0,5.