MATEMÀTIQUES II

TEMA 1. CORBES

Secció de Matemàtiques i Informàtica.
Departament d'Estructures a l'Arquitectura.
E.T.S. d'Arquitectura del Vallès.
Universitat Politècnica de Catalunya.

1 Introducció

I. Mètodes de generació de corbes

Les corbes apareixen en multitud de contextos:

1. Els contorns dels objectes són corbes.
2. Les gràfiques de les funcions $y = f(x)$ són corbes.
3. Més en general, les relacions (algebraiques o transcendents) entre dues variables es poden representar com a corbes en el pla. Per exemple, la relació $x^2 + y^2 = 1$ entre les variables x i y és la circumferència de radi 1 i centre l'origen de coordenades. En efecte, els punts $P = (x, y)$ que satisfan la igualtat estan a distància 1 del punt $(0, 0)$.
4. La intersecció de dues superfícies és, en general, una corba. (Recordem, per exemple, la definició de cònica). Un exemple més espectacular és la corba de Viviani (figura 1), que és la intersecció d'una esfera de radi $2a$ amb un cilindre de radi a que té una generatriu que passa pel centre de l'esfera.

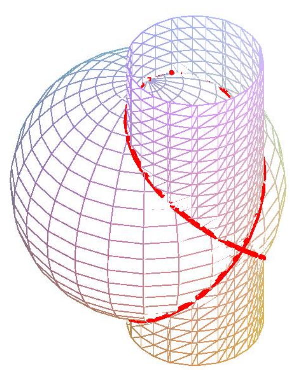

Figura 1: Corba de Viviani

5. Les corbes de nivell d'una superfície són un altre exemple de la utilitat de les corbes: corbes de nivell en un plànol, isòbares, isotermes, etc.

6. Les corbes es poden definir com a llocs geomètrics; és a dir, com el conjunt de punts (del pla o de l'espai) que satisfan certes propietats:

   (a) Les còniques es poden definir així.

   (b) La lemniscata de Bernoulli es defineix de forma semblant a l'el·lipse: és el lloc geomètric dels punts P del pla el producte de les distàncies dels quals a dos punts fixos F, F' (anomenats focus) és constant i igual a la quarta part de la distància entre els focus al quadrat ($\frac{d(F,F')^2}{4}$). (Figura 2).

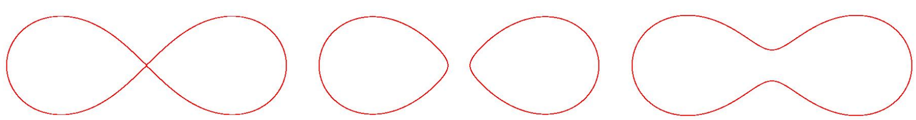

Figura 2: Lemniscata i dos òvals de Cassini

   (c) Si en la definició de lemniscata no s'imposa que la constant sigui $\frac{d(F,F')^2}{4}$, s'obtenen corbes més generals: els òvals de Cassini. (Figura 2).

7. Donats uns quants punts, interpolant-los segons diferents criteris s'obtenen diferents corbes: la interpolació lineal dóna una corba poligonal, per exemple. Una altre interpolació és mitjançant splines. (Figura 3).

8. Per transformacions geomètriques: Si projectem una circumferència obtenim una el·lipse, si apliquem una aplicació lineal al pla, les corbes es deformen de la mateixa manera que els paral·lelograms determinats per les bases, etc. (Figura 4).

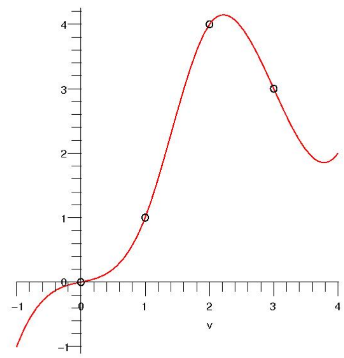

Figura 3: Interpolació mitjançant Splines

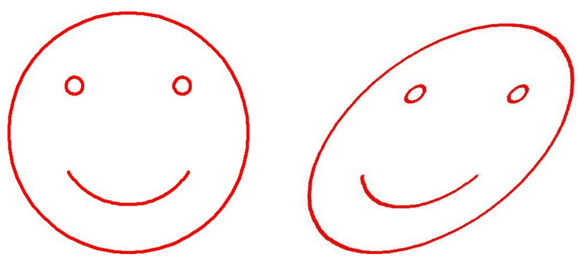

Figura 4:

9. Les corbes també es poden generar a partir d'altres corbes:

   (a) Si fem rodar una circumferència c sobre una recta, un punt marcat de c traçarà una corba anomenada cicloide (figura 5). La cicloide dibuixada cap per avall es diu braquistòcrona: si deixem anar alhora dues boles des de dos punts de la braquistòcrona, arribaran a baix també alhora. (Si féssim girar la braquistòcrona al voltant del seu eix de simetria tindríem un bol amb aquesta propietat).

   (b) Si fem rodar una circumferència sobre una altra circumferència de mateix radi, s'obté la cardioide (figura 5).

   (c) Si fem rodar una circumferència per l'interior d'una altra de radi quatre vegades més gran, s'obté l'astroide (figura 5).

(d) Considerem una circumferència c, una recta t tangent a c i el punt A de la circumferència oposat a t. Si tracem un segment s des de A, s tallarà c en un punt Q i a t en un punt R. Marquem sobre s el punt P tal que $d(P, R) = d(A, Q)$. El lloc geomètric dels punts P al considerar tots els segments s s'anomena cissoide de Diocles (figura 5). (La construcció es pot generalitzar agafant dues corbes i un punt qualsevol).

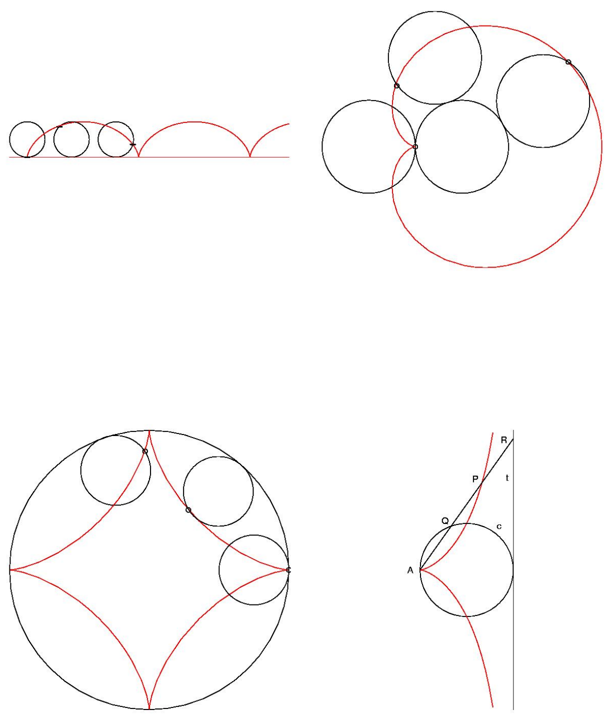

Figura 5: Cicloide, cardioide, astroide, cissoide

10. Envolupants. Una corba que en cada punt és tangent a una de les corbes d'una família de corbes donada F, es diu la corba envolupant de F.

(a) Considerem la família de segments d'igual longitud a que tenen els seus extrems sobre dues rectes fixes perpendiculars entre si. L'envolupant d'aquesta família és un altre cop l'astroide (figura 6).

(b) La trajectòria d'un projectil llençat des d'un punt P és una paràbola que depèn de la velocitat inicial (i.e. de la càrrega explosiva). L'envolupant de la família de possibles trajectòries d'un projectil al variar l'angle de tir és l'anomenada paràbola de seguretat (figura 6).

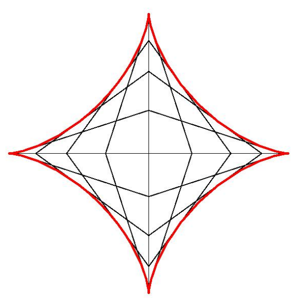 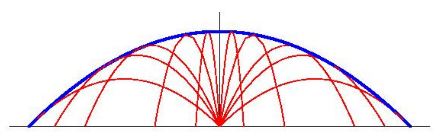

Figura 6: L'astroide com a envolupant i la paràbola de seguretat

11. Hi ha corbes que provenen de consideracions físiques o pràctiques (com la paràbola de seguretat):

    (a) El conjunt de tots els punts d'un pla des dels quals es veu un segment sota un mateix angle és una corba: l'arc capaç.

    (b) La catenària és la corba que formen els cables suspesos de dos punts d'igual altura.

(c) Donats dos eixos perpendiculars, la tractiu és una corba que passa per un dels dos eixos i tal que la longitud del segment de la recta tangent a qualsevol dels seus punts comprès entre el punt de tangència i l'altre eix és constant. Si considerem un segment i fem que un dels eixos i a l'altre li apliquem una força constant paral·lela a l'altre eix, aquest segon punt descriu una tractriu.

12. Hi ha altres contextos on apareixen les corbes de forma natural: al resoldre equacions diferencials, per exemple.

II. Mètodes de representació de corbes

Hi ha diferents maneres de representar una corba al pla o a l'espai.

1. Una corba paramètrica c o una parametrització de la corba c és una aplicació contínua d'un interval $[a, b]$ en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$. c assigna a cada punt t de l'interval $[a, b]$ un punt (x, y) del pla o (x, y, z) de l'espai. t s'anomena el paràmetre i cada coordenada depèn de t; és a dir, $c(t) = (x(t), y(t))$ o $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

Exemple 1.1. (a) La circumferència de centre l'origen i radi 1 es pot parametritzar de la següent manera: $c(t) = (\cos t, \sin t)$ on t té un significat geomètric clar (figura 7).

(b) L'el·lipse d'equació $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ admet la següent parametrització: $c(t) = (a \cos t, b \sin t)$ on $0 \leq t \leq 2\pi$ (figura 7). (Noti's que el paràmetre t no té una interpretació intuïtiva tan clara com la de la circumferència.

(c) La cardioide té la parametrització $c(t) = (2a \cos t(1+\cos t), 2a \sin t(1+\cos t))$.

Demostració. Agafem com a paràmetre l'angle O de la figura 8. $Q = (a + a \cos t, a \sin t)$. i $O' = 0 + 2\vec{OO'} = (a + 2a \cos t, a \sin 2t)$.

$$P = (a + 2a \cos t + a \cos 2t, 2a \sin t + a \sin 2t) =$$
$$(a + 2a \cos t + a \cos^2 t - a \sin^2 t, 2a \sin t + 2a \sin t \cos t) =$$
$$(a + 2a \cos t + a \cos^2 t - a - a \cos^2 t, 2a \sin t + 2a \sin t \cos t)$$

□

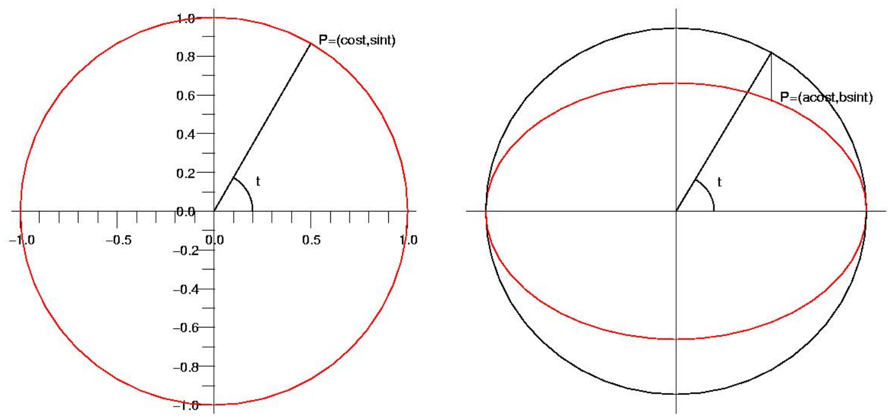

Figura 7: Parametritzacions de la circumferència i l'el·lipse

(d) L'hèlice circular ve donada per $(a \cos t, a \sin t, bt)$

A la imatge de c se li diu la seva traça. Així es té que una mateixa traça pot tenir diferents parametritzacions.

2. L'equació implícita d'una corba al pla és una equació que satisfan les coordenades dels punts de la corba.

   (a) L'equació implícita de la circumferència de centre l'origen de coordenades i radi 1 és $x^2 + y^2 = 1$.

   (b) Del Tema 1 sabem l'equació implícita de les còniques.

   (c) L'equació de la lemniscata és $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

3. Hi ha corbes que es poden expressar millor en coordenades no cartesianes.

   (a) La circumferència de centre l'origen de coordenades i radi 1 en coordenades polars té l'equació $r = 1$.

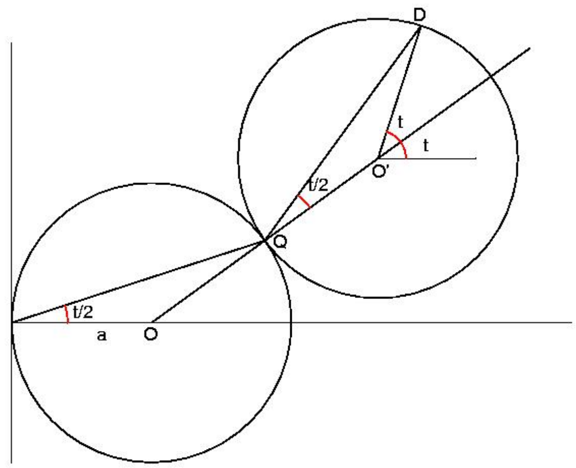

Figura 8: Parametrització de la cardioide

(b) La cardioide en polars ve expressada per $r = a(1 + \cos t)$.

(c) Les espirals s'expressen fàcilment en polars. Per exemple, l'espiral d'Arquímedes és $r = at$ (figura 9).

2 Corbes paramètriques

Definició 2.1. *Una corba paramètrica del pla és una aplicació contínua* $r(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$, *d'un interval* $I \subseteq \mathbb{R}$ *en el pla* $\mathbb{R}^2$*:*

$$\begin{array}{rl} I \subseteq \mathbb{R} & \xrightarrow{r} \mathbb{R}^2 \\ t & \longrightarrow r(t) = (x(t), y(t)) \end{array}$$

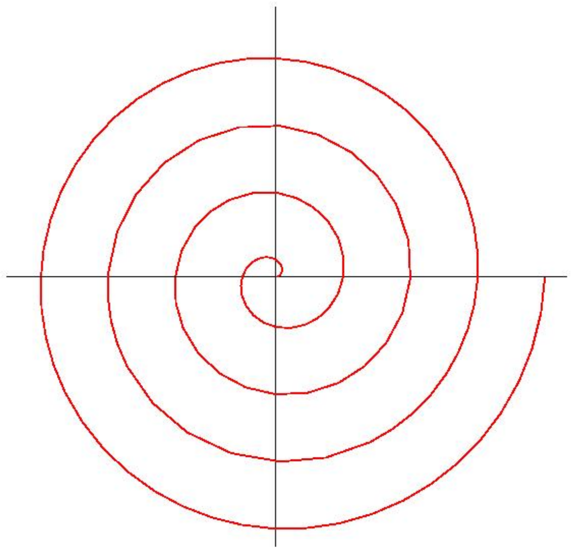

Figura 9: Espiral d'Arquímedes

El conjunt de punts $\{(x, y)|x = x(t), y = y(t)\}$ *és la gràfica o la traça de la corba paramètrica, i* t *es coneix amb el nom de paràmetre.*

Exemple 2.2.

$$\begin{aligned} [0, 2\pi] \subseteq \mathbb{R} &\xrightarrow{r} \mathbb{R}^2 \\ t &\longrightarrow r(t) = (a\cos t, a\sin t) \end{aligned}$$

és una circumferència de centre l'origen $(0, 0)$ i radi a.

De forma semblant,

Definició 2.3. *Una corba paramètrica de l'espai és una aplicació contínua*

$r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in I$, *d'un interval* $I \subseteq \mathbb{R}$ *en l'espai* $\mathbb{R}^3$*:*

$$\begin{aligned} I \subseteq \mathbb{R} \quad & \xrightarrow{r} \mathbb{R}^3 \\ t \quad & \longrightarrow r(t) = (x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

Exemple 2.4.

$$\begin{aligned} [0, 2\pi] \subseteq \mathbb{R} \quad & \xrightarrow{r} \mathbb{R}^3 \\ t \quad & \longrightarrow r(t) = (a\cos t, a\sin t, bt) \end{aligned}$$

és una hèlice circular.

La noció de continuïtat que apareix en la definició de corba paramètrica fa referència al fet que aquesta no presenti salts o trencaments.

3 Vector tangent i recta tangent en $\mathbb{R}^2$

Definició 3.1. *Donada una corba* $r(t)$, $t \in I$, *i un punt* $P = r(t_0)$ *que pertany a la mateixa, s'anomena vector tangent a* r *en* P *al vector* $r'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$ *sempre que existeixin ambdues derivades* $x'(t_0)$, $y'(t_0)$ *i no s'anul·lin simultàniament (figura 10).*

Definició 3.2. *La recta tangent a* r *en* P *és la recta que passa per* P *i té com a vector director el vector tangent* $r'(t_0)$*.*

A partir de la definició anterior tenim que la recta tangent a r en P té per equació

$$(x, y) = (x(t_0), y(t_0)) + \lambda(x'(t_0), y'(t_0))$$

que podem escriure en la forma:

$$\begin{cases} x = x(t_0) + \lambda x'(t_0) \\ y = y(t_0) + \lambda y'(t_0) \end{cases}$$

0 bé, en forma implícita:

$$\begin{vmatrix} x - x(t_0) & x'(t_0) \\ y - y(t_0) & y'(t_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Justificació del vector tangent: Siguin $P = r(t_0)$ i $Q = r(t_0+t)$ dos punts de la corba $r(t)$. Considerem el vector $\vec{PQ} = Q - P = r(t_0+t) - r(t_0)$.

$$\frac{\vec{PQ}}{t} = \frac{r(t_0+t) - r(t_0)}{t} \text{ i si } t \to 0, \text{tenim}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\vec{PQ}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{r(t_0+t) - r(t_0)}{t} = r'(t_0).$$

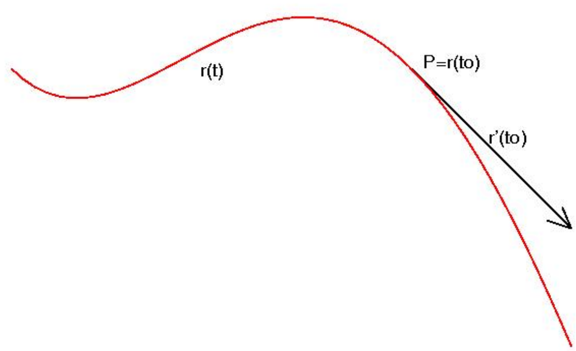

Figura 10: Vector tangent

Exemple 3.3. Considerem la circumferència parametritzada com en l'exemple 2.2 i trobem el vector tangent i la recta tangent en el punt que correspon al paràmetre $t = \frac{\pi}{3}$.

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -a\sin t \\ y' = a\cos t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(\frac{\pi}{3}) = -a\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}a \\ y'(\frac{\pi}{3}) = a\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}a \end{cases}$$

Així doncs, el vector tangent és $r'(\frac{\pi}{3}) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{1}{2}a\right)$.

La recta tangent és $(x, y) = r(\frac{\pi}{3}) + \lambda r'(\frac{\pi}{3})$ o bé

$$(x, y) = \left(\frac{1}{2}a, \frac{\sqrt{3}}{2}a\right) + \lambda\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{1}{2}a\right)$$

4 Vector normal i recta normal en $\mathbb{R}^2$

Un vector normal a una corba r en el punt $P = r(t_0)$ de la corba és qualsevol vector ortogonal al vector tangent $r'(t_0) = (x't_0), y'(t_0))$. En particular, el vector $n(t) = (y'(t_0), -x'(t_0))$ és un vector normal a r en P.

La recta normal a una corba paramètrica del pla en un punt $P = r(t_0)$ és la recta que passa per P i té per vector director qualsevol vector ortogonal a $r'(t_0)$.

L'equació de la recta normal a r en P ve donada per

$$(x, y) = (x(t_0), y(t_0)) + \lambda(y'(t_0), -x'(t_0))$$

i, en forma implícita, pel determinant

$$\begin{vmatrix} x - x(t_0) & y'(t_0) \\ y - y(t_0) & -x'(t_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Exemple 4.1. Trobar un vector normal i la recta normal a l'el·lipse parametritzada $r(t) = (4\cos t, \sin t)$ en el punt $t = \frac{\pi}{4}$.

$$\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -4\sin t \\ y' = \cos t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(\frac{\pi}{4}) = -4\sin\frac{\pi}{4} = -4\frac{\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2} \\ y'(\frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Així doncs, el vector tangent és $r'(\frac{\pi}{4}) = \left(-2\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ i un vector normal $n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2},\right)$.

La recta normal és $(x, y) = r(\frac{\pi}{4}) + \lambda n(\frac{\pi}{4})$ o bé

$$(x, y) = \left(2\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \lambda\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2}\right)$$

5 Vector tangent i recta tangent en $\mathbb{R}^3$

Les nocions de vector tangent i recta tangent a una corba $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ a l'espai $\mathbb{R}^3$ són semblants a les que hem donat en el pla, però amb tres coordenades. Així el vector tangent a r en $P = r(t_0)$ és el vector $r'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ i l'equació de la recta tangent a r en P s'escriu

$$(x, y, z) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0)) + \lambda(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$

Exemple 5.1. Escriure l'equació de la recta tangent a la corba de l'exemple 2.4 en el punt $t = \frac{\pi}{6}$.

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases} \quad \begin{cases} x' = -a\sin t \\ y = a\cos t \\ z = b \end{cases} \quad \begin{cases} x(\frac{\pi}{6}) = \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ y(\frac{\pi}{6}) = \frac{a}{2} \\ z(\frac{\pi}{6}) = \frac{b\pi}{6} \end{cases} \quad \begin{cases} x'(\frac{\pi}{6}) = \frac{-a}{2} \\ y'(\frac{\pi}{6}) = \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ z'(\frac{\pi}{6}) = b \end{cases}$$

La recta tangent és $(x, y, z) = (\frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a}{2}, \frac{b\pi}{6}) + \lambda(\frac{-a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, b)$.

6 Pla normal a una corba de $\mathbb{R}^3$

El concepte de recta normal a una corba del pla no admet una generalització immediata al cas de les corbes de l'espai (es pot veure com s'introdueix la recta normal a una corba de l'espai al llibre Cálculo y Geometría de Larson & Hostetler). En canvi, en tres dimensions apareix de forma natural el pla normal a una corba $r(t)$ en un punt P com el pla que passa per P i és perpendicular a la recta tangent a la corba en el mateix punt P. D'aquesta consideració es dedueix que el vector normal al pla és el vector director de la recta tangent, és a dir, el vector tangent $r'(t_0)$.

L'equació implícita del pla normal és

$$x'(t_0)[x - x(t_0)] + y'(t_0)[y - y(t_0)] + z'(t_0)[z - z(t_0)] = 0.$$

Exemple 6.1. L'equació cartesiana del pla normal a l'hèlice circular $r(t) = (cost, sint, t)$, $t \in [0, 2\pi]$, en el punt de paràmetre $t = \frac{3\pi}{2}$:

Les coordenades cartesianes del punt P són

$$P = \left(\cos\frac{3\pi}{2}, \sin\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) = \left(0, -1, \frac{3\pi}{2}\right).$$

El vector tangent a la corba en un punt genèric és

$$r'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$$

i per tant

$$r'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (1, 0, 1)$$

L'equació del pla normal a $r(t)$ en el punt P és

$$1 \cdot (x - 0) + 0 \cdot (y + 1) + 1 \cdot (z - \frac{3\pi}{2}) = 0 \Rightarrow x + z - \frac{3\pi}{2} = 0.$$

7 Longitud d'arc en paramètriques

Sabem que, donada una corba $r(t)$, $t \in [a, b]$, amb $r(t)$ derivable, la seva longitud ve donada per la integral

$$L(a, b) = \int_a^b \|r'(t)\| \, dt$$

que podem escriure

- a) En el pla, on la corba és $r(t) = (x(t), y(t))$,

$$L(a, b) = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

- b) En l'espai, on la corba és $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$,

$$L(a, b) = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$$

Exemple 7.1. Calculem la longitud de la corba $r(t) = (a \cos t, a \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$

$$r'(t) = (-a \sin t, a \cos t)$$

$$L(0, 2\pi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t} dt = \int_0^{2\pi} a dt = 2\pi a.$$

Exemple 7.2. Calculem la longitud de la corba $r(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $t \in [0, 2\pi]$

$$r'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$$

$$L(0, 2\pi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2}dt = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}.$$

8 Curvatura

Tots tenim un idea intuïtiva del concepte de curvatura d'una corba; així parlem d'una corba "perillosa", d'una corba "oberta", d'una corba "molt tancada", etc. El que volem ara és quantificar aquest concepte de curvatura, és a dir, traduir-lo a termes numèrics. Per arribar a aquesta quantificació donarem les nocions prèvies de paràmetre arc, vector unitari i vector de curvatura.

a) Paràmetre arc

Hem vist abans que per a una mateixa corba (o traça) es podem utilitzar diferents paràmetres: en Física per a descriure el moviment d'una partícula s'utilitza el paràmetre temps; en Matemàtiques sovint utilitzem com a paràmetre un angle, etc. Per tal d'estudiar algunes propietats geomètriques de les corbes és molt adient el paràmetre arc.

Definició 8.1. *Donada una corba $r(t)$, $t \in [a, b]$, es defineix la funció*

$$s(t) = \int_a^t \|r'(t)\| \, dt \ \forall t \in [a, b].$$

$s(t)$ s'anomena paràmetre arc.

Exemple 8.2. Expressem la circumferència $r(t) = (a\cos t, a\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ en paràmetre arc.

Calculem $s(t)$:

$$s(t) = \int_0^t \|r'(t)\| \, dt = \int_0^t adt = at \ \forall t \in [a, b].$$

$$s = at \Rightarrow t = \frac{s}{a} \Rightarrow r(s) = (a\cos\frac{s}{a}, a\sin\frac{s}{a}) \text{ amb } s \in [0, 2\pi a].$$

b) Vector tangent unitari

Un vector $\vec{u}$ es diu unitari quan la seva norma 1, és a dir, quan $\|\vec{u}\| = 1$. Dividint un vector qualsevol per la seva norma s'obté un vector unitari.

Definició 8.3. *El vector tangent unitari a una corba $r(t)$ és el vector $\vec{T} = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|}$.*

Quan tenim un corba $r(s)$ descrita en paràmetre arc, resulta que el vector tangent a la corba $r'(s)$ és sempre un vector unitari.

Teorema 8.4. *Sigui $r(s)$ una corba parametritzada amb el paràmetre arc. Aleshores $\|r'(s)\| = 1$*

En efecte:

Demostració.

$$r'(t) = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dr}{ds} \|r'(t)\| \Rightarrow \frac{dr}{ds} = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|}.$$

Per tant

$$r'(s) = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|} \text{ és un vector unitari}$$

□

Exemple 8.5. D'acord amb el resultat de l'exemple 8.2, tenim que $r'(s) = (-\sin \frac{s}{a}, \cos \frac{s}{a})$. D'on

$$\|r'(s)\| = \sqrt{\sin^2 \frac{s}{a} + \cos^2 \frac{s}{a}} = 1$$

Teorema 8.6. *El paràmetre t d'una corba $r(t)$, $t \in [a, b]$, és el paràmetre arc si i només si el vector tangent és unitari.*

c) Vector curvatura

Una manera de mesurar quant *es corba*, quant *gira*, quant *canvia de direcció* una corba $r(t)$ consisteix en calcular la variació del vector tangent unitari $\vec{T}$. Com que aquest vector és unitari, al llarg de la corba varia únicament en direcció. La variació mitjana en un interval Δs ve donada pel quocient $\frac{\Delta \vec{T}}{\Delta s}$ i si volem la variació instantània fem el límit quan $\Delta s \to 0$:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{T}}{\Delta s} = \frac{d\vec{T}}{ds} = \vec{T}'.$$

Definició 8.7. *El vector $\vec{T}'$ rep el nom de vector curvatura.*

Propietats 8.8. *El vector curvatura $\vec{T}'$ és ortogonal al vector tangent unitari $\vec{T}$.*

Demostració. $\left\|\vec{T}\right\| = 1$ és equivalent a $\vec{T} \cdot \vec{T} = 1$. Derivant aquesta igualtat,

$$2\vec{T} \cdot \vec{T}' = 0 \Rightarrow \vec{T} \cdot \vec{T}' = 0$$

i per tant $\vec{T}'$ és ortogonal a $\vec{T}$. □

Exemple 8.9. Comprovem que en el cas de la circumferència $\vec{T}'$ és ortogonal a $\vec{T}$.

La parametrització de la circumferència en paràmetre arc és $r(s) = (a\cos\frac{s}{a}, a\sin\frac{s}{a})$ tal com hem vist a l'exemple 8.2. $\vec{T} = r'(s) = (-\sin\frac{s}{a}, \cos\frac{s}{a})$ i $\vec{T}' = (-\frac{1}{a}\cos\frac{s}{a}, -\frac{1}{a}\sin\frac{s}{a})$. Aquests dos vectors són ortogonals.

d) Curvatura

Definició 8.10. *S'anomena curvatura $\kappa(s)$ d'una corba $r(t)$, $t \in [a,b]$, a la norma del vector curvatura $\vec{T}'$.*

Exemple 8.11. Calculem la curvatura de la circumferència.

A l'exemple 8.9 hem vist que el vector curvatura és $\vec{T}' = (-\frac{1}{a}\cos\frac{s}{a}, -\frac{1}{a}\sin\frac{s}{a})$.

$$\kappa(s) = \left\|\vec{T}'\right\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{a}\cos\frac{s}{a}\right)^2 + \left(-\frac{1}{a}\sin\frac{s}{a}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{a^2}} = \frac{1}{a}.$$

Observem que en aquest cas de la circumferència la curvatura és constant, com era previsible.

Exemple 8.12. Curvatura de l'hèlice circular.

e) Radi de curvatura.

En el cas de la circumferència acabem de veure que la curvatura coincideix amb l'invers del radi $\kappa = \frac{1}{a}$. D'aquí que per a qualsevol corba $r(t)$, $t \in [a,b]$, es defineix el radi de curvatura ρ com l'invers de la curvatura.

Definició 8.13. *El radi de curvatura ρ de $r(s)$ és l'invers de la curvatura.* $\rho = \frac{1}{\kappa}$.

f) Expressió de la curvatura en un paràmetre qualsevol

Fins ara per a calcular la curvatura i el radi de curvatura hem treballat en paràmetre arc, però sovint les corbes no estan expressades en aquest paràmetre i de vegades esdevé difícil trobar el paràmetre arc. Per aquesta raó ens interessa disposar de fórmules que permetin el càlcul de la curvatura en el cas en què la corba $r(t)$ vingui donada en un paràmetre qualsevol.

Sortosament disposem d'aquestes fórmules:

a) En el pla. Si $r(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$ és una parametrització qualsevol de la corba r, la curvatura $\kappa(t)$ ve donada per

$$\kappa(t) = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

a) En l'espai. Si $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$ és una parametrització qualsevol de la corba r, la curvatura $\kappa(t)$ ve donada per

$$\kappa(t) = \frac{\|r'(t) \wedge r''(t)\|}{\|r'(t)\|^3}.$$

Exemple 8.14. Calculem mitjançant aquestes fórmules la curvatura de la circumferència $r(t) = (a\cos t, a\sin t)$ $t \in [0, 2\pi]$

Exemple 8.15. Calculem mitjançant aquestes fórmules la curvatura de la hèlice $r(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ $t \in [0, 2\pi]$

Observem que els resultats coincideixen amb els obtinguts abans fets amb paràmetre arc.

9 Circumferència de curvatura en el pla

Fixem un punt P de la corba $r(t) = (x(t), y(t))$. Volem determinar, entre totes les circumferències tangents a la corba $r(t)$ en el punt P la que *millor* l'aproxima.

Definició 9.1. *La circumferència de curvatura és la circumferència tangent a la corba en P i que té per radi el radi de curvatura en P (figura 11).*

Comentaris

- Aquesta circumferència és la que "millor"aproxima la corba en el punt P considerat.

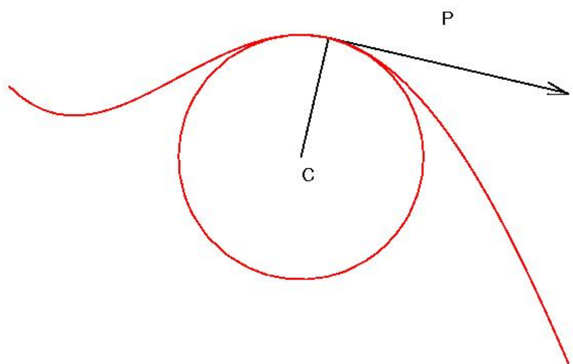

Figura 11: Circumferència de curvatura

- El centre de la circumferència està sobre la normal a la corba en P (en el sentit de la concavitat) a una distància de P igual al radi de curvatura ρ.

Exemple 9.2. Trobem l'equació de la circumferència de curvatura de la paràbola $y = x^2$ en el punt $P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

En primer lloc parametritzem la paràbola prenent com a paràmetre la x (si $x = t$, aleshores $y = t^2$).

$$r(t) = (t, t^2) \ r'(t) = (1, 2t) \ r''(t) = (0, 2).$$

$$r\left(\frac{1}{2}\right) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) \ r'(\frac{1}{2}) = (1, 1) \ r''(\frac{1}{2}) = (0, 2).$$

La curvatura en P és

$$\kappa\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{|1\cdot 2 - 0\cdot 1)|}{(1^2+1^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{2^{\frac{3}{2}}} = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

El radi de curvatura és $\rho\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\kappa\left(\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{2}$.

Anem ara a situar el centre C de la circumferència de curvatura:

El vector tangent $r'\left(\frac{1}{2}\right) = (1,1)$. El vector normal $n\left(\frac{1}{2}\right) = (-1,1)$ i el vector normal unitari $\frac{n}{\|n\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

$$C = P + \rho\frac{n}{\|n\|} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) + \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) + (-1,1) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$$

Pe tant, la circumferència de curvatura demanada té centre $\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$ i radi $\sqrt{2}$. La seva equació és

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{5}{4}\right)^2 = 2.$$