

MATEMÀTIQUES II

TEMA 3. INTRODUCCIÓ AL DISSENY GRÀFIC ASSISTIT PER ORDINADOR (CAGD).

Secció de Matemàtiques i Informàtica.
Departament d'Estructures a l'Arquitectura.
E.T.S. d'Arquitectura del Vallès.
Universitat Politècnica de Catalunya.

1 Introducció

Si volem dibuixar corbes o superfícies que satisfan certes propietats geomètriques o físiques, molt possiblement serem capaços de trobar-ne algun tipus d'equació implícita, explícita o paramètrica a partir d'aquestes propietats. Una situació molt diferent és quan volem dibuixar una corba o una superfície a sentiment (disseny lliure). En aquest segon cas ens podem basar en uns punts pels quals passi la corba o superfície (punts de pas) o en uns punts que en control·lin la seva forma (punts de control). Per exemple, i simplificant molt, les formes de la Sagrada Família estan generades a partir de propietats geomètriques; en canvi, les formes del Museu Guggenheim de Bilbao han estat dibuixades a sentiment. Per això, les corbes de la Sagrada Família són còniques en molts casos i moltes superfícies són paraboloides hiperbòlics i hiperboloides d'un full; aquests objectes es poden controlar a partir de la seva fórmula. Les formes del Museu Guggenheim en canvi, al ser a sentiment requereixen d'altres maneres de ser generades.

En aquest capítol donarem una introducció a les diverses maneres de generar corbes i superfícies a partir d'uns punts de pas o de control. Comencem introduint la interpolació de Lagrange que presenta molts inconvenients. Per a interpolar de forma més eficaç estudiarem els splines (posant èmfasi en els cúbics).

Les corbes de Bézier es generen a partir d'uns punts pels quals no necessàriament hi passa la corba, sinó que actuen com a punts de control. Al variar la seva posició de forma contínua, la corba també varia contínuament. Un altre mètode d'utilitzar els punts de control és mitjançant els B-splines (que cal no confondre amb els splines).

Una última secció estudia molt breument la generació de superfícies de disseny lliure.

2 Interpolació de Lagrange

Suposem que tenim els punts $P_0 = (0, 1)$, $P_1 = (1, -1)$ i $P_2 = (3, 1)$ i els volem interpolar amb una funció polinòmica; és a dir, volem trobar un polinomi $p(x)$ tal que la gràfica de la funció $y = p(x)$ passi pels tres punts. Aquest polinomi haurà de ser de grau més gran que 1, perquè la gràfica d'un polinomi de grau 1 és una línia recta i aquests punts no estan alineats. Busquem el polinomi

de segon grau que els interpola. Aquest polinomi serà de la forma

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

així que caldrà trobar els valors dels tres paràmetres a_0, a_1, a_2 . Això ho aconseguirem imposant que els punts siguin de la gràfica de $y = p(x)$:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 = 1 \\ a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 = -1 \\ a_0 + a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 3^2 = 1 \end{cases}$$

Aquest sistema es pot reescriure en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0^2 \\ 1 & 1 & 1^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Resolent aquest sistema de tres equacions i tres incògnites trobem que $a_0 = 1, a_1 = -3, a_2 = 1$ i el polinomi que interpola els tres punts P_0, P_1, P_2 és

$$p(x) = x^2 - 3x + 1.$$

(Vegeu la figura 1.)

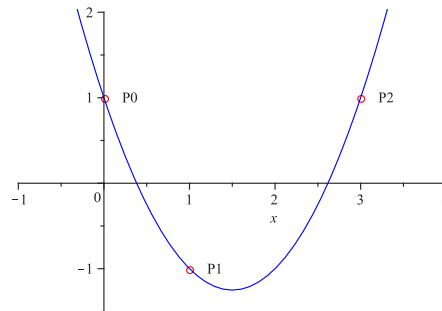


Figura 1: Polinomi de Lagrange pels punts P_0, P_1 i P_2 .

De forma similar, donats $n + 1$ punts $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ en el pla amb abscisses diferents es pot trobar un polinomi $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 +$

$\dots + a_n x^n$ que els interpola i que s'anomena **polinomi interpolador**. Els punts donats s'anomenen **punts de pas**. Caldrà resoldre el següent sistema lineal de $n + 1$ equacions i $n + 1$ incògnites.

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

En general, el polinomi obtingut serà de grau n . Quan al resoldre el sistema, el coeficient a_n de x^n és igual a 0, el polinomi és de grau menor que n . Aquest mètode d'interpolació, conegut com **interpolació de Lagrange**, si bé conceptualment és molt senzill, presenta un nombre important de problemes. Entre d'altres,

- S'ha de resoldre un sistema de $n + 1$ equacions i $n + 1$ incògnites.
- Si volem canviar de lloc un punt s'han de refer tots els càlculs.
- El polinomi obtingut presenta, en general, oscil·lacions no desitjades.

Aquest últim punt és el més greu. Per exemple, el polinomi de Lagrange que interpola els punts $(-1, 3), (1, 3), (2, 3), (3, 2), (4, 3)$ és $p(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{3}{4}x^3 + \frac{7}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + 2$ i la gràfica de $y = p(x)$ efectivament interpola els punts però no és el que intuïtivament esperem d'una funció interpoladora (figura 2).

Una possible solució a aquest fenomen és imposar que el polinomi no només passi pels punts donats, sinó que a més a més ho faci amb pendents especificades. Aquest procés s'anomena **interpolació d'Hermite**. El polinomi $p(x)$ que ha d'interpoliar els punts $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ amb les condicions $p'(x_i) = m_i$ $i = 0..n$ ha de satisfer les $2(n + 1)$ condicions següents

$$\begin{aligned} p(x_i) &= y_i & i = 0, \dots, n \\ p'(x_i) &= m_i & i = 0, \dots, n. \end{aligned}$$

En general, $p(x)$ serà un polinomi de grau $2(n + 1) - 1 = 2n - 1$ i per a calcular-lo caldrà resoldre un sistema de $2(n + 1)$ equacions i $2(n + 1)$ incògnites.

Una manera alternativa i més flexible de resoldre el problema de les oscil·lacions "no naturals" és emprant funcions més complexes: funcions definides a trossos de manera que en cada tros sigui un polinomi: són els splines que estudiarem a la següent secció.

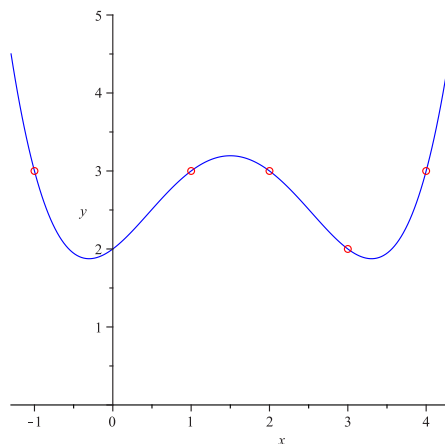


Figura 2: Polinomi de Lagrange pels punts $(-1, 3), (1, 3), (2, 3), (3, 2), (4, 3)$.

3 Splines

Una manera de tractar els problemes que presenta la interpolació per polinomis és generar una funció interpoladora que sigui polinòmica a trossos unint cada parella de punts de pas consecutius amb una funció polinòmica. Aquestes funcions s'anomenen **splines**. Els polinomis definits en cada tram poden ser en principi de qualsevol grau i fins i tot de graus diferents, però és habitual que tots siguin de tercer grau, **splines cúbics**, perquè al ser de grau baix se simplifiquen els càlculs i es redueix el problema de les oscil·lacions. Dit això, si els polinomis fossin de primer grau, la corba obtinguda seria una poligonal i normalment es desitja que la corba no tingui "punxes". Els polinomis de segon grau uneixen els punts amb arcs de paràboles. Això dóna poca flexibilitat, perquè no permet l'existència de punts d'inflexió entre els punts de pas. Per tant, els polinomis de grau més baix més adequats per a generar una corba que interpoli punts de forma "suau" són els de tercer grau.

Suposem que tenim $n + 1$ punts $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ en el pla amb l'ordre de les abscisses creixent $(x_0 < x_1 < \dots < x_n)$. Cada parella de punts consecutius (x_i, y_i) i (x_{i+1}, y_{i+1}) està unida per un polinomi de tercer grau $p_i(x) = a_i + b_i x + c_i x^2 + d_i x^3$ que indexem amb el mateix sufix que el punt de l'esquerra. Per a trobar la corba interpoladora (el spline cúbic), hem de calcular els quatre coeficients a_i, b_i, c_i, d_i de cada tram. Com que hi ha n trams hem de trobar el valor de $4n$ paràmetres. Per a calcular-los hem de tenir en compte que

al que caldria afegir-hi les dues files corresponents a les dues condicions addicionals.

Exemple 3.1. Volem calcular el spline cúbic que passi pels punts $(0, 1)$, $(2, 2)$, $(5, 0)$ i $(8, 0)$ amb la condició que el pendent en el primer punt $(0, 1)$ valgui 2 i en l'últim punt $(8, 0)$ valgui 1.

El sistema lineal en aquest cas és

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 12 & 0 & -1 & -4 & -12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 12 & 0 & 0 & -2 & -12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 25 & 125 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 & 75 & 0 & -1 & -10 & -75 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 30 & 0 & 0 & -2 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 25 & 125 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 & 64 & 512 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 16 & 192 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(La primera i última files imposen que les derivades en el primer i darrer punt siguin 2 i 1 respectivament.)

La solució d'aquest sistema és

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 & b_0 &= 2 & c_0 &= -1.0395 & d_0 &= .1447 \\ a_1 &= 1.9201 & b_1 &= 0.6199 & c_1 &= -0.3494 & d_1 &= 0.0297 \\ a_2 &= .07018 & b_2 &= 1.3509 & c_2 &= -.04956 & d_2 &= 0.0395 \end{aligned}$$

i el spline cúbic es pot veure en la figura 3.

Splines paramètrics

Fins ara hem vist com calcular splines que interpolen punts amb les abscisses en ordre creixent. S'obté una corba que correspon a la gràfica d'una funció $y = f(x)$. En el cas més general, els punts no estan disposats d'aquesta manera i el que volem és interpolar-los mitjançant una corba paramètrica $C(t) = (x(t), y(t))$. El pantejament és el següent:

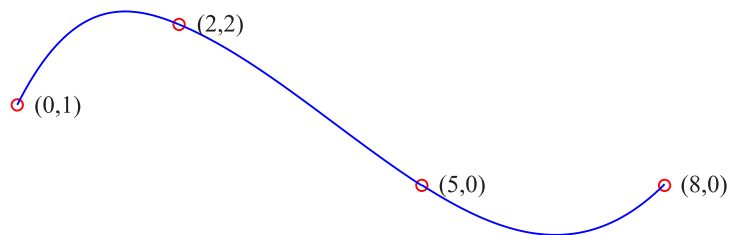


Figura 3: Spline cúbic pels punts $(0, 1)$, $(2, 2)$, $(5, 0)$, $(8, 0)$.

Si volem interpolar $n+1$ punts del pla $P_0 = (x_0, y_0), P_1 = (x_1, y_1), \dots, P_n = (x_n, y_n)$, triem un interval $[t_0, t_n]$ i una sèrie de punts $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ d'aquest interval que anomenem **nodes**. Cada node t_i es correspon amb el punt P_i . Ara, per cada coordenada creem un spline. Les primeres i segones coordenades dels punts vindran doncs interpolades per sengles splines $p_x(t)$ i $p_y(t)$ de manera que la corba que interpola els punts és $C(t) = (p_x(t), p_y(t))$. Noti's que els sistemes que cal resoldre per a trobar els dos splines $p_x(t)$ i $p_y(t)$ tenen la mateixa matriu.

El mateix procediment es pot emprar per a interpolar punts de l'espai. En aquest cas caldrà calcular tres splines $p_x(t), p_y(t)$ i $p_z(t)$ corresponents a les tres coordenades dels punts. En aquest cas també els sistemes que cal resoldre per a trobar els tres splines $p_x(t), p_y(t)$ i $p_z(t)$ tenen la mateixa matriu.

4 Corbes de Bézier

A les seccions anteriors hem estudiat el problema d'interpol·lar un conjunt de punts donat. Un altre mètode per a dibuixar corbes de disseny lliure és considerant un conjunt de punts que no necessàriament cal interpol·lar, sinó que són **punts de control**. En aquesta secció veurem com es generen les corbes de Bézier, que són d'aquest tipus.

Polinomis de Bernstein

Els polinomis de Bernstein de grau n es defineixen de la següent manera.

Definició 4.1. Donat un nombre enter positiu n , els *polinomis de Bernstein* de grau n són els $n + 1$ polinomis $B_i^n(t)$ definits per

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} \cdot (1-t)^{n-i} \cdot t^i \quad i = 0, \dots, n$$

on

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i! \cdot (n-i)!}$$

Exemple 4.2.

- Els polinomis de Bernstein de primer grau són

$$B_0^1(t) = 1 - t \quad B_1^1(t) = t.$$

- Els polinomis de Bernstein de segon grau són

$$B_0^2(t) = (1-t)^2 \quad B_1^2(t) = 2(1-t)t \quad B_2^2(t) = t^2.$$

- Els polinomis de Bernstein de tercer grau són

$$B_0^3(t) = (1-t)^3 \quad B_1^3(t) = 3(1-t)^2t \quad B_2^3(t) = 3(1-t)t^2 \quad B_3^3(t) = t^3.$$

Definició 4.3. La *corba de Bézier* amb *punts de control* $P_0 = (x_0, y_0)$, $P_1 = (x_1, y_1)$, ..., $P_n = (x_n, y_n)$ és la corba

$$C(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t) \quad 0 \leq t \leq 1.$$

La línia poligonal que uneix els punts de control s'anomena *polígon de control*.

Exemple 4.4. La corba de Bézier amb punts de control P_0, P_1 és el segment que els uneix.

En efecte,

$$C(t) = (1-t)P_0 + tP_1 \quad 0 \leq t \leq 1$$

és el segment d'extrems P_0 i P_1 .

Exemple 4.5. La corba de Bézier amb punts de control P_0, P_1 i P_2 té equació

$$C(t) = (1-t)^2P_0 + 2(1-t)tP_1 + t^2P_2 \quad 0 \leq t \leq 1.$$

És un arc de paràbola que té P_0 i P_2 com extrems, perquè

$$C(0) = P_0 \quad C(1) = P_2.$$

Si derivem $C(t)$,

$$C'(t) = -2(1-t)P_0 + 2(1-2t)P_1 + 2tP_2$$

i per tant

$$\begin{aligned} C'(0) &= 2(P_1 - P_0) \\ C'(1) &= 2(P_2 - P_1). \end{aligned}$$

Veiem que els vectors tangents a la corba de Bézier en els punts P_0 i P_1 tenen la mateixa direcció que els vectors $\overrightarrow{P_0P_1}$ i $\overrightarrow{P_1P_2}$ i per tant $C(t)$ és tangent a la poligonal que uneix P_0, P_1 i P_2 . Vegeu la figura 4.

Exemple 4.6. Per a $n = 3$, la corba de Bézier és

$$C(t) = (1-t)^3P_0 + 3(1-t)^2tP_1 + 3(1-t)t^2P_2 + t^3P_3 \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Com en el cas anterior, té per extrems els punts P_0 i P_n i en aquests punts és tangent al segments P_0P_1 i $P_{n-1}P_n$.

En general les corbes de Bézier satisfan les següents propietats.

1. **Interpolació dels punts de control extrems.** ($C(0) = P_0, C(1) = P_n$).
2. **Tangència.** La recta tangent a $C(t)$ en els extrems és tangent al polígon de control.

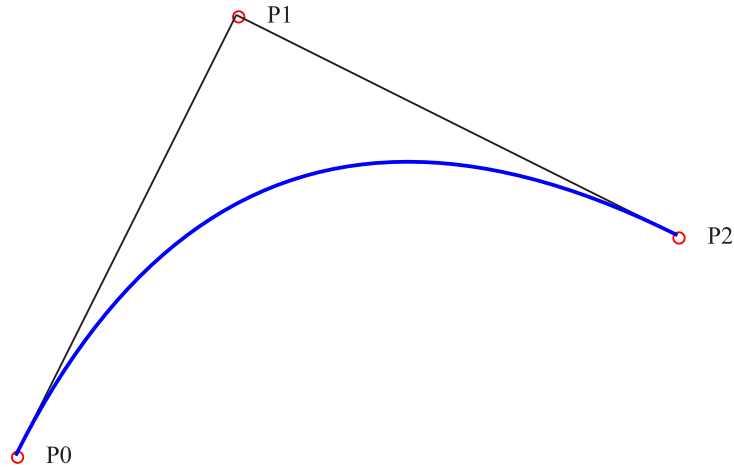


Figura 4: Corba de Bézier amb tres punts de control P_0, P_1, P_2 .

3. **Control pseudo-local.** El canvi d'un punt de control P_i per un altre P'_i afecta tota la corba, però és més notable al voltant del punt canviat.
4. **Restricció a l'envolvent convexa.** El menor polígon convex que conté tots els punts de control s'anomena la seva **envolvent convexa**. Es pot demostrar que la corba de Bézier està continguda en l'envolvent convexa.
5. **Disminució de la variació.** Aquesta propietat vol dir que qualsevol recta talla la corba de Bézier en un nombre menor o igual de punts dels que talla el polígon de control. Això vol dir que la corba de Bézier oscil·la menys que la poligonal de control.
6. **Invariança afí.** Si apliquem una afinitat a tots els punts de control, la nova corba de Bézier generada per aquests punts és la transformada afí de la corba original.

5 B-splines

Els B-splines són corbes que venen determinades per uns punts de control. En aquest aspecte són similars a les corbes de Bézier, però tenen l'avantatge que la modificació d'un punt de control només afecta l'entorn d'aquell punt i no tota la corba. Cal no confondre'ls amb els splines. Els splines interpolen punts, mentre que els B-splines estan control·lats pels punts de control.

En aquesta secció estudiarem els B-splines cúbics paramètrics no uniformes, que són els més utilitzats.

Abans hem de definir les funcions base pels B-splines cúbics. Es fa de forma recurrent.

Definició 5.1. Les funcions base $N_i^1, i = 0, 1, \dots, n$ de grau 0 es defineixen

$$N_i^1(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

Les funcions de grau g es generen a partir de les de grau $g - 1$ de forma recurrent

$$N_i^j(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+j-1} - t_i} \cdot N_i^{j-1} + \frac{t_{i+j} - t}{t_{i+j} - t_{i+1}} \cdot N_{i+1}^{j-1}$$

Propietat 5.2. Les funcions $N_i^4, i = 0, 1, \dots, n$ són polinòmiques de grau 3 a l'interval $[t_i, t_{i+4}]$ i nul·les fora d'aquest interval.

Els B-splines es generen de la següent manera.

Definició 5.3. Considerem una seqüència de nodes $t_0 = t_1 = t_2 = t_3 = 0 \leq t_4 \leq t_5 \leq \dots \leq t_{n+1} = t_{n+2} = t_{n+3} = t_{n+4}$, (la corba serà la imatge de només $[t_3, t_{n+1}]$), i un conjunt de punts P_0, P_1, \dots, P_n . El *B-spline* $C(t)$ ve donat per la fórmula

$$C(t) = \sum_{i=0}^n N_i^4(t) \cdot P_i \quad t_3 \leq t \leq t_{n+2}.$$

Els B-splines satisfan les mateixes propietats que les corbes de Bézier, però gràcies a la Propietat 5.2 tenen l'avantatge que permeten un control local. Si variem o movem un punt P_i , només varia un tros de la corba i la resta queda invariant.

6 Superfícies de disseny lliure

D'entre les múltiples tècniques per a generar i controlar superfícies de disseny lliure només donarem la definició de les superfícies de Bézier i les superfícies B-splines.

Definició 6.1. A partir d'una matriu M de punts P_{ij} , $i = 0, 1, \dots, n$, $j = 0, 1, \dots, m$ de \mathbb{R}^3 , la *superfície de Bézier* control·lada per M està definida per

$$S(t, s) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} \cdot B_i^n(s) \cdot B_j^m(t) \quad 0 \leq s \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Exemple 6.2. La figura 5 és una superfície de Bézier control·lada per 9 punts.

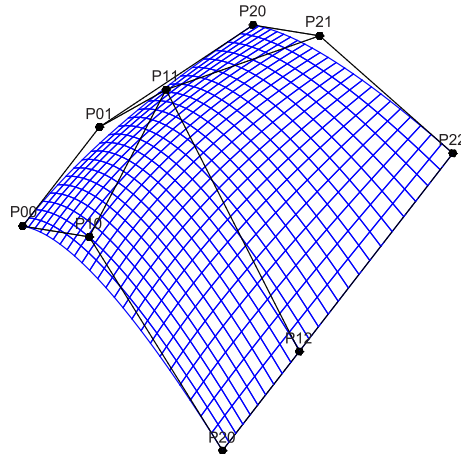


Figura 5: Superfície de Bézier control·lada pels punts P_{ij} , $i, j = 0, 1, 2$.

De forma similar,

Definició 6.3. A partir d'una matriu M de punts P_{ij} , $i = 0, 1, \dots, n$, $j = 0, 1, \dots, m$ de \mathbb{R}^3 , la *superfície B-spline cúbica* control·lada per M està definida per

$$S(t, s) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} \cdot N_i^4(s) \cdot N_j^4(t) \quad 0 \leq s \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1.$$