# MATEMÀTIQUES II

## TEMA 4. APROXIMACIONS DE FUNCIONS. POLINOMIS DE TAYLOR.

Secció de Matemàtiques i Informàtica.
Departament d'Estructures a l'Arquitectura.
E.T.S. d'Arquitectura del Vallès.
Universitat Politècnica de Catalunya.

# 1 Introducció

Una de les tècniques més usuals en el càlcul és l'aproximació de funcions mitjançant polinomis. Si $f$ és una funció de la que volem saber-ne el valor quan $x = a$ (és a dir si volem calcular $f(a)$), però la funció $f$ és prou complicada per a poder-ho fer, és útil aproximar $f$ per un polinomi $p(x)$ i calcular $p(a)$. Si $p$ és "suficientment"proper a $f$, aleshores $p(a)$ serà una bona aproximació de $f(a)$. En aquest capítol estudiarem les aproximacions de funcions per polinomis de Taylor.

Les aplicacions més importants d'aquests polinomis són

- Aproximació de funcions.
- Comprovació de desigualtats.
- Càlcul d'extrems relatius.
- Estudi de la cocavitat d'una funció.

# 2 Expressió d'un polinomi com a combinació lineal de potències de $x - a$

.

Abans de començar l'estudi dels polinomis de Taylor, ens cal veure que, fixat un nombre real $a$, qualsevol polinomi

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

de grau $n$ es pot escriure de la forma

$$p(x) = b_0 + b_1(x - a) + b_2(x - a)^2 + ... + b_n(x - a)^n.$$

Per a demostrar aquest resultat, calcularem els coeficients $b_i$. De fet veurem que es poden trobar a partir de les derivades de $p(x)$ en el punt $a$:

Calculem doncs les derivades de $p(x) = b_0 + b_1(x - a) + b_2(x - a)^2 + ... + b_n(x - a)^n$:

$$\begin{aligned}
p'(x) &= b_1 + 2b_2(x-a) + 3b_3(x-a)^2 + ... + nb_n(x-a)^{n-1} \\
p''(x) &= 2b_2 + 3\cdot 2b_3(x-a) + ... + n\cdot(n-1)b_n(x-a)^{n-2} \\
p'''(x) &= 3\cdot 2b_3 + 4\cdot 3\cdot 2b_4(x-a) + ... + n\cdot(n-1)\cdot(n-2)b_n(x-a)^{n-3} \\
&\vdots \\
p^{(n)}(x) &= n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot ...\cdot 3\cdot 2b_n.
\end{aligned}$$

Substituint $x$ per $a$ en les igualtats anteriors, s'obté

$$\begin{aligned}
p'(a) &= b_1 = 1!b_1 \\
p''(a) &= 2b_2 = 2!b_2 \\
p'''(a) &= 3\cdot 2b_3 = 3!b_3 \\
&\vdots \\
p^{(n)}(a) &= n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot ...\cdot 3\cdot 2b_n = n!b_n.
\end{aligned}$$

Per tant,

$$b_0 = p(a),\ b_1 = \frac{p'(a)}{1!},\ b_2 = \frac{p''(a)}{2!},\ b_3 = \frac{p'''(a)}{3!},\ ...\ b_n = \frac{p^{(n)}(a)}{n!}$$

i el polinomi $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ es pot escriure

$$p(x) = p(a) + \frac{p'(a)}{1!}(x-a) + \frac{p''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{p'''(a)}{3!}(x-a)^3 + ... + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Una forma més elegant d'enunciar els resultats d'aquesta secció és usant la terminologia dels espais vectorials. Fixem-nos que fixat un nombre enter positiu $n$, el conjunt dels polinomis de grau menor o igual que $n$ és un espai vectorial (els polinomis es poden sumar entre si i multiplicar per un escalar). El que hem vist en aquesta secció és que qualsevol polinomi de grau menor o igual que $n$ es pot expressar com a combinació lineal de les potències $(x-a)^0 = 1, (x-a)^1, (x-a)^2, ..., (x-a)^n$ (de fet de manera única) i per tant aquests polinomis són una base d'aquest subespai. Les coordenades del polinomi $p(x)$ en aquesta base són $b_0 = p(a),\ b_1 = \frac{p'(a)}{1!},\ b_2 = \frac{p''(a)}{2!},\ b_3 = \frac{p'''(a)}{3!},\ ...,\ b_n = \frac{p^{(n)}(a)}{n!}$.

**Exemple 2.1.** Considerem el polinomi

$$p(x) = 3x^2 + 2x - 3$$

i $a = 2$.

$$\begin{aligned} p'(x) &= 6x + 2 \\ p''(x) &= 6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(2) &= 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 3 = 13 \\ p'(2) &= 62 + 2 = 14 \\ p''(2) &= 6. \end{aligned}$$

Per tant,

$$p(x) = 13 + \frac{14}{1!}(x-2) + \frac{6}{2!}(x-2)^2 = 13 + 14(x-2) + 3(x-2)^2.$$

# 3 Teorema de Taylor

**Definició 3.1.** *S'anomena polinomi de Taylor de grau $n$ de la funció $f(x)$ (que admet les derivades $f'(a), f''(a), ..., f^{(n)}(a)$) en el punt $x = a$ al polinomi*

$$p(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

**Exemple 3.2.** El polinomi de Tayor de primer grau de la funció $f(x) = \sin x$ en el punt $x = 0$ és

$$p_1(x) = x$$

i el polinomi de Taylor de tercer grau de la funció $f(x) = \sin x$ en el punt $x = 0$ és

$$p_2(x) = x - \frac{1}{3!}x^3,$$

perquè

$$\begin{aligned} f(0) &= \sin 0 = 0 \\ f'(0) &= \cos 0 = 1 \\ f''(0) &= -\sin 0 = 0 \\ f'''(0) &= -\cos 0 = -1. \end{aligned}$$

(Vegeu la figura 1.)

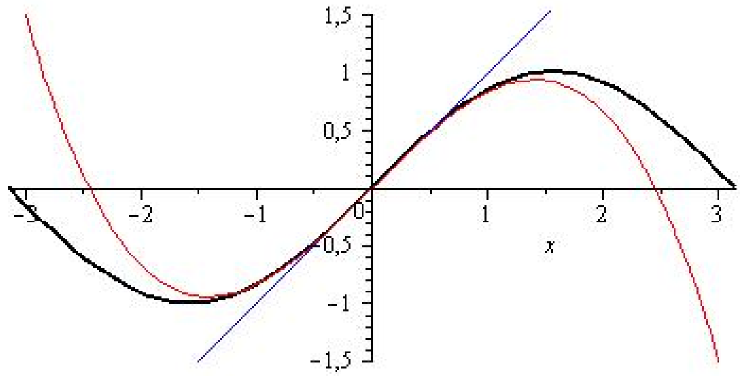


Figura 1: $f(x) = \sin x$ en negre, $p_1(x)$ en blau, $p_3$ en vermell

La importància del polinomi de Taylor $p(x)$ d'una funció $f(x)$ es troba en el fet que la diferència $f(x) - p(x)$ tendeix a 0 quan $x$ tendeix a $a$. De fet es pot demostrar el següent resultat.

**Teorema 3.3.** *Teorema de Taylor. Sigui $f(x)$ una funció per la qual les derivades $f'(x), f''(x), ..., f^{(n+1)}$ existeixen en l'interval $[a, x]$. Aleshores es verifica*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R(x) \quad (1)$$

*on $R(x)$ satisfà*

$$\lim_{x \to a} \frac{R(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

*La fórmula (1) s'anomena fórmula de Taylor o desenvolupament de Taylor de $f(x)$ en $a$ i $R(x)$ el terme complementari.*

**Teorema 3.4.** *El terme complementari es pot escriure en la forma (expressió de Lagrange):*

$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

*on $t$ és un valor entre $a$ i $x$.*

**Definició 3.5.** *En el cas en que $a = 0$, el desenvolupament de Taylor s'anomena moltes vegades desenvolupament de Mac Laurin.*

El següent exemple mostra com es pot aplicar el desenvolupament de Taylor per a fer càlculs.

**Exemple 3.6.** Volem calcular $\sqrt[3]{1,2}$. Per això, considerem la funció $f(x) = \sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}}$ i calculem el seu polinomi de Taylor $p(x)$ de grau 2 per a $x = 0$ (el polinomi de grau 2 de Mc Laurin). $p(0,2)$ ens donarà una aproximació del valor de $\sqrt[3]{1,2}$.

$$f'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}} \text{ i } f''(x) = \frac{1}{3}\cdot(-\frac{2}{3})(1+x)^{-\frac{5}{3}}.$$

Per tant,

$$f(0) = 1,\ f'(0) = \frac{1}{3} \text{ i } f''(0) = -\frac{2}{9}.$$

El polinomi de Taylor de grau 2 és

$$p(x) = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}x^2.$$

Fent $x = 0,2$, s'obté $p(0,2) = 1,058$, que és una aproximació de $\sqrt[3]{1,2}$.

Evidentment, no n'hi ha prou en saber que $1,058$ és una aproximació del resultat que voliem calcular. Hem de saber si l'error que cometem és acceptable en el context en què el necessitem. Això ens ho permetrà el terme complementari.

El terme complementari és

$$R(x) = \frac{f'''(t)}{3!}x^3 = \frac{5}{81}(1+t)^{-\frac{-8}{3}}x^3$$

on $t$ és un valor entre 0 i $x$.

Com que $t$ és més gran que 1, $(1+t)^{-\frac{-8}{3}} < 1$ i per tant

$$R(0,2) < \frac{5}{81}\cdot 0,2^3 = 0,000494.$$

Això ens assegura que l'error comès és menor que una mil·lèssima o, dit d'una altra manera, la precisió és de com a mínim tres xifres decimals.

# 4 Polinomi de Taylor per a funcions de diverses variables

De forma similar al cas de funcions d'una variable, les funcions de diverses variables es poden aproximar per polinomis. Considerarem el cas de funcions de dues variables, però els resultats es poden generalitzar a qualsevol nombre de variables. En aquest curs ens interessarà només el dsenvolupament per polinomis de primer i segon grau.

**Definició 4.1.** *Sigui $f$ una funció de dues variables i $(a, b)$ un punt del pla.*

- *El polinomi $p_1(x, y)$ de Taylor de $f$ de primer grau (o aproximació lineal) en $(x, y) = (a, b)$ és*

$$p_1(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial y}(y - b).$$

- *El polinomi $p_2(x, y)$ de Taylor de $f$ de segon grau (o aproximació quadràtica) en $(x, y) = (a, b)$ és*

$$\begin{aligned} &p_2(x, y) \\ &\quad = f(a, b) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial y}(y - b) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x^2}(x - a)^2 + 2\frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x \partial y}(x - a)(y - b) \\ &\quad + \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial y^2}(y - b)^2). \end{aligned}$$

Si el punt és el $(0, 0)$, els polinomis s'anomenen moltes vegades polinomis de Mc Laurin.

**Exemple 4.2.** Troba els polinomis de primer i segon grau de Mac Laurin de la funció $f(x,y) = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^y$. Les primeres i segones derivades parcials de $f$ són

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \mathrm{e}^x\mathrm{e}^y \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \mathrm{e}^x\mathrm{e}^y \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \mathrm{e}^x\mathrm{e}^y \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \mathrm{e}^x\mathrm{e}^y \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \mathrm{e}^x\mathrm{e}^y.
\end{aligned}$$

En el punt $(0,0)$,

$$\begin{aligned}
f(0,0) &= 1 \\
\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} &= 1 \\
\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} &= 1 \\
\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2} &= 1 \\
\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} &= 1 \\
\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2} &= 1.
\end{aligned}$$

Els polinomis de Mac Laurin de primer i segon grau són respectivament

$$\begin{aligned}
p_1(x,y) &= 1 + x + y \\
p_2(x,y) &= 1 + x + y + \frac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2) = 1 + x + y + \frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2.
\end{aligned}$$

(Vegeu la figura 2.)

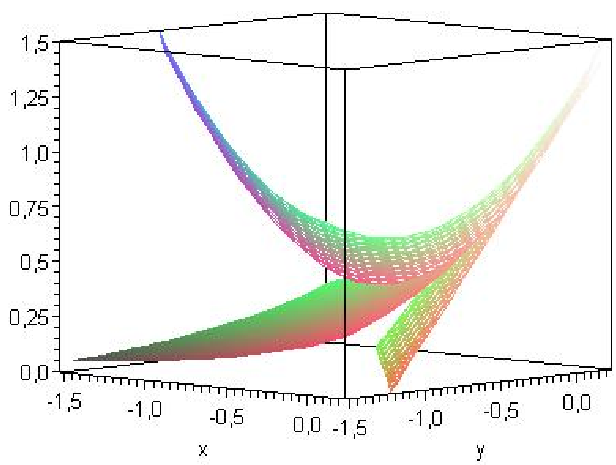


Figura 2: La funció $f(x,y) = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^y$ i les seves aproximacions lineal i quadràtica en el punt $(0,0)$