MATEMÀTIQUES II

TEMA 5. EXTREMS DE FUNCIONS DE DIVERSES VARIABLES

Secció de Matemàtiques i Informàtica.
Departament d'Estructures a l'Arquitectura.
E.T.S. d'Arquitectura del Vallès.
Universitat Politècnica de Catalunya.

1 Introducció

1.1 Funcions d'una variable

Recordem que en el cas de funcions d'una variable $y = f(x)$, per a trobar els extrems (màxims i mínims) utilitzem les derivades de f. Primer es troben els punts crítics, és a dir, els punts on la derivada val 0 o bé no existeix.

Exemple 1.1. La derivada de la funció $y = x^2$ és $y' = 2x$ que s'anul·la quan $x = 0$. Per tant $x = 0$ és un punt crític de la funció (figura 1).

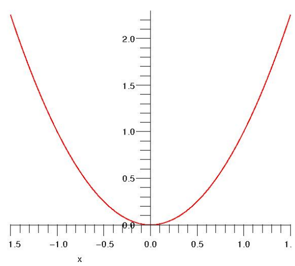

Figura 1: $y = x^2$

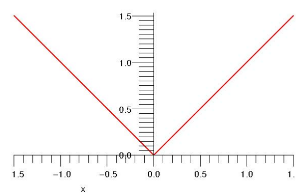

Figura 2: $y = |x|$

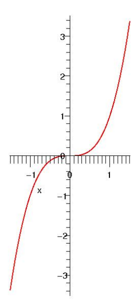

Figura 3: $y = x^3$

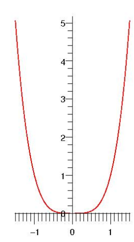

Figura 4: $y = x^4$

Exemple 1.2. La derivada de la funció $y = |x|$ no existeix quan $x = 0$. Per tant $x = 0$ és un punt crític de la funció (figura 2).

Teorema 1.3. *Si x_0 és un punt crític de f i existeix la derivada $f''(x_0)$, aleshores,*

- *Si $f''(x_0) > 0$, x_0 és un mínim de la funció f.*
- *Si $f''(x_0) < 0$, x_0 és un màxim de la funció f.*
- *Si $f''(x_0) = 0$, x_0 pot ser un màxim, un mínim o cap de les dues coses.*

Exemple 1.4. Hem vist a l'exemple 1.1 que $x = 0$ és un punt crític de $f(x) = x^2$. $f''(x) = 2$ i per tant $f(0) = 2 > 0$ la qual cosa vol dir que $x = 0$ és un mínim de f.

Exemple 1.5. La derivada de la funció $f(x) = x^3$ és $f(x) = 3x^2$ que s'anul·la quan $x = 0$. $f''(x) = 6x$ i $f''(0) = 0$. En aquest cas, $x = 0$ no és un extrem, sinó que és un punt d'inflexió (figura 3).

Exemple 1.6. La derivada de la funció $f(x) = x^4$ és $f(x) = 4x^3$ que s'anul·la quan $x = 0$. $f''(x) = 12x^2$ i $f''(0) = 0$. En aquest cas, es pot comprovar que $x = 0$ és un mínim de f (figura 4).

2 Funcions de dues variables

2.1 Introducció

Volem estudiar quan una funció de dues variables $z = f(x, y)$ assoleix el seu valor màxim o mínim.

2.2 Extrems absoluts

Definició 2.1. *Una funció $z = f(x, y)$ definida en una regió D de $\mathbb{R}^2$ té un*

- *màxim absolut en un punt (x_0, y_0) si $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ per tot $(x, y) \in D$.*
- *mínim absolut en un punt (x_0, y_0) si $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ per tot $(x, y) \in D$.*

Teorema 2.2. *Si $z = f(x, y)$ és una funció contínua definida en una regió tancada i fitada $D \subset \mathbb{R}^2$, aleshores*

- *Existeix almenys un punt de D on $f(x, y)$ assoleix el seu valor màxim.*
- *Existeix almenys un punt de D on $f(x, y)$ assoleix el seu valor mínim.*

2.3 Extrems relatius

Definició 2.3. *Una funció $z = f(x, y)$ definida en una regió D de $\mathbb{R}^2$ té un*

- *màxim relatiu en un punt (x_0, y_0) si existeix un entorn E del punt (x_0, y_0) en el qual $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ per tot $(x, y) \in E$.*
- *mínim relatiu en un punt (x_0, y_0) si existeix un entorn E del punt (x_0, y_0) en el qual $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ per tot $(x, y) \in E$.*

Les derivades proporcionen condicions per a l'estudi dels extrems relatius de funcions.

Definició 2.4. *Un punt (x_0, y_0) del domini de $f(x, y)$ és un punt crític de f si se satisfà una de les dues condicions següents.*

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$
- *No existeix alguna de les derivades parcials $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.*

Recordem que si $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$, totes les derivades direccionals de f en el punt (x_0, y_0) s'anul·len i per tant el pla tangent a la superfície $z = f(x, y)$ en aquest punt és horitzontal. Això ens diu que aquest punt és un possible extrem relatiu de la funció.

Teorema 2.5. Condicions necessàries. *Si (x_0, y_0) és un extrem relatiu de $f(x, y)$ en una regió oberta A, aleshores (x_0, y_0) és un punt crític de f.*

Demostració.
- Si no existeix $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ o $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ es tracta d'un punt crític, per definició.
- Suposem que existeixen ambdues derivades parcials. Hem de veure que s'anul·len en el punt (x_0, y_0).

Considerem la funció d'una variable $g(x) = f(x, y_0)$ que per hipòtesi té un extrem relatiu en x_0 i a més a més és derivable en aquest punt. Així $g'(x_0) = 0$. Però

$$g'(x_0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x_0 + x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0.$$

De manera anàloga es demostra l'anul·lació de la derivada parcial respecte de y considerant la funció $h(y) = f(x_0, y)$.

Tenim per tant

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

$\square$

2.4 Càlcul d'extrems relatius

En primer lloc trobarem els punts crítics de la funció i després estudiarem el seu comportament.

Exemple 2.6. Trobem els extrems relatius de la funció $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 8x - 6y + 20$ (figura 5).

Aquesta funció està definida en tot el pla $\mathbb{R}^2$ i és derivable sempre. Els punts crítics són les que anul·len les dues derivades parcials.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 4x + 8 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 6 = 0. \end{cases}$$

La solució del sistema és $x = -2$, $y = 3$ i per tant la funció té un únic punt crític $(-2, 3)$.

Per esbrinar si és un extrem, podem escriure la funció donada, completant quadrats, en la forma

$$f(x, y) = 2(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + 3 \geq 3 = f(-2, 3)$$

Per tant $f(-2, 3)$ és un mínim.

Exemple 2.7. Trobem els extrems relatius de la funció $f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)^{\frac{1}{3}}$ (figura 6).

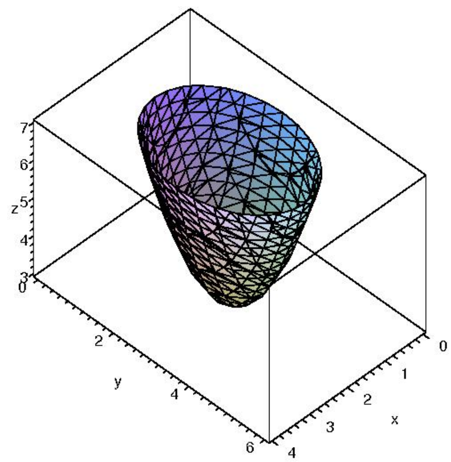

Figura 5: $z = 2x^2 + y^2 + 8x - 6y + 20$

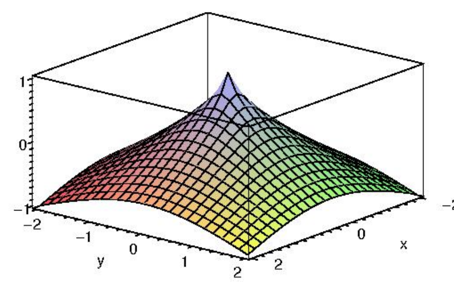

Figura 6: $z = 1 - (x^2 + y^2)^{\frac{1}{3}}$

Aquesta funció està definida en tot el pla $\mathbb{R}^2$. Calculem les dues derivades parcials.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-2x}{3(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2y}{3(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}} \end{cases}$$

Aquestes derivades estan definides en tot $\mathbb{R}^2$ llevat del punt $(0,0)$ i no s'anul·len mai simultàniament. Tenim doncs que $(0,0)$ és l'únic punt crític de f.

$$f(0,0) = 1 > f(x,y) = 1 - (x^2 + y^2)^{\frac{1}{3}} \text{ per a tot } (x,y) \neq (0,0)$$

Es tracta doncs d'un màxim.

Exemple 2.8. Trobem els extrems relatius de la funció $f(x,y) = xy$ (figura 7).

Aquesta funció està definida en tot el pla $\mathbb{R}$ i té derivades parcials en tot

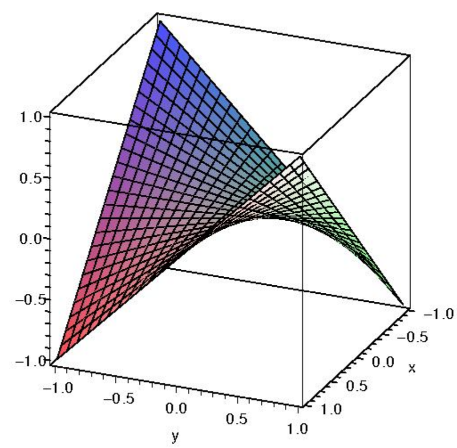

Figura 7: $z = xy$

el pla. Els punts crítics són els que anul·len les dues derivades parcials.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x = 0. \end{cases}$$

La solució del sistema és $x = 0$, $y = 0$. L'únic punt crític de f és $(0,0)$. Però $(0,0)$ no és un extrem, perquè

$$\begin{aligned} f(x,y) > 0 &\qquad \text{si } x, y \text{ tenen el mateix signe} \\ f(x,y) < 0 &\qquad \text{si } x, y \text{ tenen signes diferents.} \end{aligned}$$

En qualsevol entorn E del punt crític $(0,0)$, $f(x,y)$ té valors positius i negatius i $f(0,0) = 0$.

Aquests tipus de punts s'anomenen punts de sella.

El teorema 2.5 permet limitar l'estudi dels extrems als punts crítics, però com acabem de veure els punts crítics no sempre són extrems i, a més a més, en cas que ho siguin no sabem si es tracta de màxims o mínims.

Necessitem condicions suficients que trobarem amb les derivades parcials segones de la funció.

Definició 2.9. *Donada una funció $f(x,y)$ amb derivades parcials segones, s'anomena matriu hessiana de f en el punt (x,y) a la matriu*

$$M_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^2}{\partial x^2} & \frac{\partial f^2}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial f^2}{\partial y \partial x} & \frac{\partial f^2}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

i el determinant de la matriu hessiana rep el nom de hessià

$$H_f(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f^2}{\partial x^2} & \frac{\partial f^2}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial f^2}{\partial y \partial x} & \frac{\partial f^2}{\partial y^2} \end{vmatrix}.$$

Teorema 2.10. *Sigui $f(x,y)$ una funció de dues variables definida en una regió oberta $A \subseteq \mathbb{R}^2$ amb derivades primeres i segones contínues i $P = (x_0, y_0)$ un punt d'A en el qual se satisfan les igualtats*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0.$$

Aleshores

- *a) Si $H_f(x_0,y_0) > 0$, P és un extrem relatiu que és un*
  - *màxim si $\frac{\partial f^2}{\partial x^2} < 0$*
  - *mínim si $\frac{\partial f^2}{\partial x^2} > 0$*
- *b) Si $H_f(x_0,y_0) < 0$, P no és extrem relatiu. És un punt de sella.*
- *c) Si $H_f(x_0,y_0) = 0$, és un cas dubtós.*

Exemple 2.11. Trobem els extrems relatius de la funció $f(x,y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$.

Aquesta funció està definida en tot $\mathbb{R}^2$ i té derivades primeres i segones contínues. Els punts crítics són les solucions del sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -3x^2 + 4y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 4x - 4y = 0. \end{cases}$$

Les solucions són $P = (0, 0)$ I $Q = (\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$. Estudiem el hessià en cada un dels punts crítics P i Q.

$$\frac{\partial f^2}{\partial x^2} = -6x, \; \frac{\partial f^2}{\partial x \partial y} = 4 \; \frac{\partial f^2}{\partial y^2} = -4.$$

$$H_f(x, y) = \begin{vmatrix} -6x & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 24x - 16$$

En el punt $P = (0, 0)$ tenim $H_f(0, 0) = -16 < 0$ i P és un punt de sella. En el punt $Q = (\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ tenim $H_f(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}) = 16 > 0$ i Q és un extrem. Com que $\frac{\partial f^2}{\partial x^2}(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}) = -8 < 0$, Q és un màxim.

3 Funcions de tres o més variables

3.1 Introducció

L'estudi fet per a trobar els extrems de funcions de dues variables es pot generalitzar a funcions de tres o més variables. Les definicions d'extrem absolut, extrem relatiu i punt crític són les mateixes que en el cas de dues variables.

També ara els punts crítics són els possibles extrems. la qual cosa no vol dir que sempre ho siguin. El que es complica més és la generalització de les condicions suficients.

3.2 Extrems el funcions de tres variables

Teorema 3.1. *Donada una funció $u = f(x, y, z)$ definida en una regió oberta de $\mathbb{R}^3$, si f té un extrem relatiu en el punt (x_0, y_0, z_0), aleshores el punt (x_0, y_0, z_0) és un punt crític.*

Demostració. La demostració és anàloga a la feta en el cas de dues variables. $\square$

Exemple 3.2. Trobarem els extrems de la funció $u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$.

La funció té derivades parcials a tot $\mathbb{R}^3$. Els seus punts crítics són els que anul·len les tres derivades parcials.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2 = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2y + 4 = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} = 2z - 6 = 0. \end{cases}$$

L'únic punt crític és $P = (-1, -2, 3)$.

Per veure si és extrem, podem completar quadrats a u: $u = (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 - 14 \geq -14$. Com que $u(-1, -2, 3) = -14$, P és un mínim de la funció u.

Però això no es pot fer sempre. És interessant trobar un mètode general.

Definició 3.3. *Donada una funció $u = f(x, y, z)$ amb derivades parcials segones, s'anomena matriu hessiana de f en el punt (x, y, z) a la matriu*

$$M_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^2}{\partial x^2} & \frac{\partial u^2}{\partial y \partial x} & \frac{\partial u^2}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial u^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial u^2}{\partial y^2} & \frac{\partial u^2}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial u^2}{\partial x \partial z} & \frac{\partial u^2}{\partial y \partial z} & \frac{\partial u^2}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

i rep el nom de hessià el determinant de la matriu hessiana

$$H_f(x, y, z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u^2}{\partial x^2} & \frac{\partial u^2}{\partial y \partial x} & \frac{\partial u^2}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial u^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial u^2}{\partial y^2} & \frac{\partial u^2}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial u^2}{\partial x \partial z} & \frac{\partial u^2}{\partial y \partial z} & \frac{\partial u^2}{\partial z^2} \end{vmatrix}$$

Teorema 3.4. *Sigui $u = f(x, y)$ una funció de tres variables definida en una regió oberta $A \subseteq \mathbb{R}^3$ amb derivades primeres i segones contínues i $P = (x_0, y_0, z_0)$ un punt de A. en el qual se satisfan les igualtats*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Considerem els tres menors del hessià següents.

$$A_{11} = \frac{\partial u^2}{\partial x^2}, \ A_{22} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u^2}{\partial x^2} & \frac{\partial u^2}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial u^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial u^2}{\partial y^2} \end{vmatrix}, \ A_{33} = H_f(x, y, z).$$

Aleshores

- *a) Si $H_f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ i se satisfà*
  - $A_{11} > 0,\ A_{22} > 0,\ A_{33} > 0,$ *aleshores P és un mínim relatiu.*
  - $A_{11} < 0,\ A_{22} > 0,\ A_{33} < 0,$ *aleshores P és un màxim relatiu.*
  - *En els altres casos P no és extrem relatiu.*
- *b) Si $H_f(x_0, y_0, z_0) = 0$, és un cas dubtós.*

Exemple 3.5. Podem aplicar aquest teorema a la funció de l'exemple 3.2

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial u^2}{\partial x^2} = 2 & \frac{\partial u^2}{\partial y \partial x} = 0 & \frac{\partial u^2}{\partial z \partial x} = 0 \\ \frac{\partial u^2}{\partial x \partial y} = 0 & \frac{\partial u^2}{\partial y^2} = 2 & \frac{\partial u^2}{\partial z \partial y} = 0 \\ \frac{\partial u^2}{\partial x \partial z} = 0 & \frac{\partial u^2}{\partial y \partial z} = 0 & \frac{\partial u^2}{\partial z^2} = 2 \end{array}$$

i

$$H_f(-1, -2, 3) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$A_{11} = 2 > 0,\ A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0,\ A_{33} = H_f(-1, -2, 3) = 8 > 0$$

Per tant el punt$(-1, -2, 3)$ és un mínim relatiu.

Exemple 3.6. Trobem els extrems de la funció $u = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 12y = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2y + 12x = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} = 2z + 2 = 0. \end{cases}$$

De la tercera equació, $z = -1$. De la segona, $y = -6x$, que substituint-la a la primera dóna $3x^2 - 72x = 0$. D'aquí surt que $x = 0$ o $x = 24$. Quan $x = 0$, $y = 0$. Quan $x = 24$, $y = -144$.

Així, hi ha dos punts crítics: $P = (0, 0, -1)$ i $Q = (24, -144, -1)$.

$$H_f(x, y, z) = \begin{vmatrix} 6x & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$H_f(P) \neq 0$ i $H_f(Q) \neq 0$.

En P, $A_{11}(P) = 0$, $A_{22}(P) < 0$, $A_{33}(P) < 0$ i P no és extrem.

En Q, $A_{11}(Q) > 0$, $A_{22}(Q) > 0$, $A_{33}(Q) > 0$ i Q és un mínim.

4 Extrems condicionats. Multiplicadors de Lagrange

4.1 Funcions de dues variables

Hi ha molts problemes d'extrems en els quals les variables estan subjectes a restriccions o lligams que provenen de les característiques del problema. El mètode dels multiplicadors de Lagrange permet resoldre aquests tipus de problemes.

Exemple 4.1. Volem trobar el rectangle d'àrea màxima que es pot inscriure en l'el·lipse d'equació $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ (figura 8.

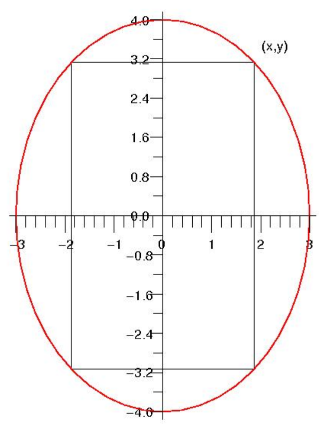

Figura 8: Exemple 4.1

Sigui (x, y) el vèrtex del rectangle que cerquem situat en el primer quadrant. Aleshores tenim que

$$f(x, y) = \textit{Àrea del rectangle} = 4xy.$$

Aquesta funció s'anomena funció objectiu (és la funció que volem maximitzar o minimitzar, és a dir, optimitzar segons la terminologia dels economistes).

El problema consisteix en trobar el màxim de la funció $f(x, y) = 4xy$, però amb la restricció o lligam que el punt (x, y) ha de pertànyer a l'el·lipse i per tant les coordenades x, y han de satisfer l'equació $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Podem considerar l'equació de restricció com una corba de nivell 0 de la funció $g(x, y) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - 1$.

Les corbes de nivell de la funció objectiu $f(x, y) = 4xy$ representen una família d'hipèrboles $f(x, y) = 4xy = \mathit{constant}$ (figura 9).

D'aquestes hipèrboles, les que satisfan l'equació de restricció tallen l'el·lipse. La que maximitza $f(x, y)$ és la que és tangent a l'el·lipse.

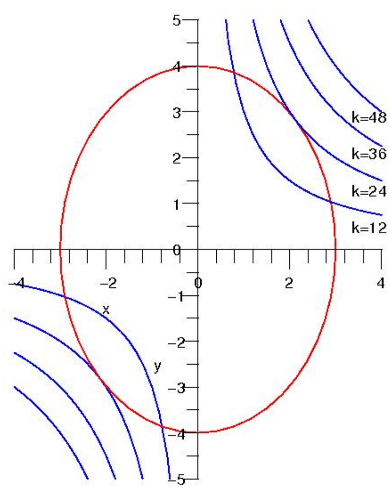

Figura 9: L'el·lipse i les corbes de nivell de $f(x, y) = 4xy$

Ara bé, sabem que dues corbes són tangents en un punt quan els seus vectors gradients en aquest punt són proporcionals:

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y).$$

L'escalar λ rep el nom de multiplicador de Lagrange.

En el nostre cas doncs tenim que la funció objectiu és $f(x,y) = 4xy$ i que la restricció és $g(x,y) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - 1 = 0$.

$\nabla f(x,y) = (4y, 4x)$, $\nabla g(x,y) = (\frac{2}{9}x, \frac{1}{8}y)$ Escrivint la condició $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$ coordenada a coordenada i afegint l'equació de lligadura, s'obté el següent sistema d'equacions

$$\begin{cases} 4y = \lambda \frac{2}{9}x \\ 4x = \lambda \frac{1}{8}y \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1 \end{cases}$$

Aïllant λ de la primera equació $\lambda = \frac{18y}{x}$ i substituint-la en la segona, es té $4x = \frac{y}{8} \cdot \frac{18y}{x}$ o bé $x^2 = \frac{9}{16}y^2$. Substituint x^2 en l'última equació per aquesta última expressió, s'arriba a $y = 2\sqrt{2}$ (recordem que (x,y) l'hem suposat en el primer quadrant) i $x = \frac{3}{\sqrt{2}}$. Per tant el màxim de $f(x,y)$ és $f(\frac{3}{\sqrt{2}}, 2\sqrt{2}) = 24$.

Teorema 4.2. *(Mètode dels multiplicadors de Lagrange) Siguin $f(x,y)$ i $g(x,y)$ dues funcions amb derivades parcials primeres contínues i suposem que $f(x,y)$ té un extrem relatiu en el punt (x_0, y_0) que pertany a la corba $g(x,y) = 0$.*

Si $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$, llavors existeix un nombre real λ que satisfà la igualtat

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y).$$

Siguin $f(x,y)$ i $g(x,y)$ dues funcions que satisfan les hipòtesis del teorema de lagrange. Suposem que f sotmesa a la restricció $g(x,y) = c$ té un extrem relatiu. Per a trobar aquest extrem fem els següents passos.

a) Resoldre el sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

b)Avaluar la funció $f(x,y)$ en els punts solució del sistema anterior.

Exemple 4.3. Maximitzar la funció $f(x,y) = e^{xy}$ amb la restricció $x^2 + y^2 - 8 = 0$.

Resolem el sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

És a dir

$$\begin{cases} ye^{xy} = \lambda 2x \\ xe^{xy} = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 - 8 = 0 \end{cases}$$

Dividint la primera equació per la segona, s'obté $y = \pm x$. Substituint a la tercera es tenen les solucions del sistema que són $(2, 2)$, $(2, -2)$, $(-2, 2)$, $(-2, -2)$. Avaluant la funció $f(x, y) = e^{xy}$ en aquests punts, es veu fàcilment que el màxim està en els punts $(2, 2)$ i $(-2, -2)$ on $f(2, 2) = f(-2, -2) = e^4$.

4.2 Funcions de tres variables

El raonament en aquest cas és semblant al que acabem de veure en dues variables, llevat que ara utilitzem superfícies de nivell enlloc de corbes de nivell.

Per trobar els extrems d'una funció de tres variables $u = f(x, y, z)$ sotmesa a la restricció $g(x, y, z) = 0$,

a) Resolem el sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} = \lambda \frac{\partial g}{\partial z} \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

b)Avaluem la funció $f(x, y, z)$ en els punts solució del sistema anterior.

Exemple 4.4. Trobem el mínim de la funció $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2$ amb la condició $2x - 3y - 4z = 49$.

Resolem el sistema

$$\begin{cases} 4x = 2\lambda \\ 2y = -3\lambda \\ 6z = -4\lambda \\ 2x - 3y - 4z = 49 \end{cases}$$

i obtenim el punt $(3, -9, -4)$.

Avaluem la funció en aquest punt $f(3, -9, -4) = 147$. Es tracta d'un mínim. (Podem comprovar-ho trobant el valor de la funció en un altre punt de la funció restricció).

En aquest cas de funcions de tres variables es pot estudiar problemes d'optimització d'una funció amb dues equacions de restricció.

Si $u = f(x, y, z)$ és la funció objectiu i $g(x, y, z) = 0$, $h(x, y, z) = 0$ són les restriccions, la condició d'extrem condicionat ve donada per la igualtat

$$\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$$

que dóna lloc, junt amb les restriccions al sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} + \mu \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} + \mu \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} = \lambda \frac{\partial g}{\partial z} + \mu \frac{\partial h}{\partial z} \\ g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Un cop trobats els punts solució del sistema, s'avalua la funció objectiu en ells i es determina el valor màxim o mínim.

Exemple 4.5. Minimitzem la funció $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sotmesa a les restriccions $x + 2z = 4$, $x + y = 8$.

Resolem el sistema

$$\begin{cases} 2x = \lambda + \mu \\ 2y = \mu \\ 2z = 2\lambda \\ x + 2z = 4 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

La solució del sistema és el punt $(4, 4, 0)$. $f(4, 4, 0) = 32$. Es tracta d'un mínim, perquè si agafem un altre punt que satisfaci les restriccions, per exemple el $(0, 8, 2)$ es té que $f((0, 8, 2) > f(4, 4, 0)$.

5 Extrems absoluts

5.1 Introducció

Els extrems absoluts d'una funció f de qualsevol nombre de variables es troben

- a) en un extrem relatiu de f o bé
- a) en un punt frontera del domini de f.

Per a trobar els extrems absoluts d'una funció calcularem els seus extrems relatius i després estudiarem el comportament de la funció en els punts frontera del seu domini.

Exemple 5.1. La funció $y = x^2$ definida en l'interval $[-1, 2]$. Aquesta funció té

- a) un mínim absolut en $x = 0$ que coincideix amb un mínim relatiu.
- b) un màxim absolut en $x = 2$ que es troba en l'extrem superior de l'interval del domini (figura 10.

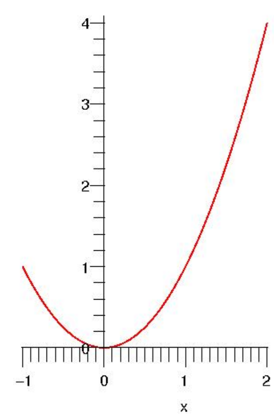

Figura 10: Exemple 5.1

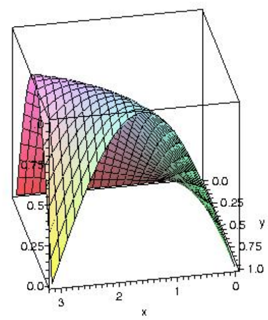

Figura 11: Exemple 5.2

Exemple 5.2. Trobem els extrems absoluts de la funció $f(x, y) = \sin(xy)$ definida en $[0, \pi] \times [0, 1]$ (figura 11).

Busquem els extrems relatius.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{x} = y \cos xy = 0 \\ \frac{\partial f}{y} = x \cos xy = 0 \end{cases}$$

Els punts solució d'aquest sistema són el $(0, 0)$ i els punts que satisfan $xy = \frac{\pi}{2}$ que determinen una hipèrbola.

En $(0, 0)$, $f(0, 0) = \sin 0 = 0$ i és un mínim relatiu i absolut.

En els punts (x, y) de la hipèrbola, $f(x, y) = 1$ i són màxims relatius i absoluts.

Per esbrinar si aquesta funció té altres extrems absoluts, hem d'analitzar què passa en els punts frontera del seu domini, que són els punts de les rectes $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$, $y = 1$.

- a) Si $x = 0$, $f(0, y) = \sin 0 = 0$ i són mínims absoluts.
- b) Si $y = 0$, $f(x, 0) = \sin 0 = 0$ i són mínims absoluts.
- c) Si $x = \pi$, $f(\pi, y) = \sin \pi y$.
  - Si $y = 0$ o $y = 1$, $f(x, y) = 0$ i els punts $(\pi, 0)$ i $(\pi, 1)$ són mínims absoluts.
  - Si $y = \frac{1}{2}$. $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ i $(\pi, \frac{1}{2})$ és un màxim absolut.
- d) Si $y = 1$, $f(x, y) = \sin x$.
  - Si $x = 0$, $f(x, 1) = \sin 0 = 0$ i el punt $(0, 1)$ és un mínim absolut.
  - Si $x = \frac{\pi}{2}$. $\sin \frac{\pi}{2} = 1)$ i $(\frac{\pi}{2}, 1)$ és un màxim absolut.