MATEMÀTIQUES II

TEMA 6 . INTEGRACIÓ SIMPLE

Secció de Matemàtiques i Informàtica.
Departament d'Estructures a l'Arquitectura.
E.T.S. d'Arquitectura del Vallès.
Universitat Politècnica de Catalunya.

1 Integral definida

Comencem amb una qüestió geomètrica: el càlcul d'àrees.

El càlcul de l'àrea A d'una regió del pla limitada per un polígon és senzill: només cal subdividir la regió en triangles i sumar les seves àrees (Figura 1).

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

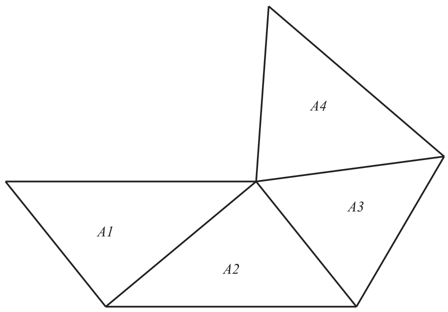

Figura 1: Àrea d'un polígon

Per a regions més generals, la qüestió és més difícil. El càlcul integral ens permetrà resoldre problemes similars als dos exemples següents:

Exemple 1.1. Calcular l'àrea de l'el·lipse d'equació $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Exemple 1.2. Calcular l'àrea compresa entre la gràfica de la paràbola d'equació $y = x^2$, l'eix OX i la recta d'equació $x = 1$ (Figura 2).

Aquest últim exemple és un cas particular de la següent definició.

Definició 1.3. *Sigui f una funció contínua en un interval $[a, b]$ i positiva (és a dir: $f(x) \geq 0$ en a tot x de $[a, b]$). La regió limitada per la gràfica de f, l'eix OX i les rectes $x = a$ i $x = b$ s'anomena regió sota f entre a i b (Figura 3).*

Per a calcular l'àrea d'aquesta regió, podem subdividir l'interval $[a, b]$ en n subintervals $[x_0, x_1], [x_1, x_2], ...[x_{n-1}, x_n]$ d'igual longitud $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ i calcular la suma S_n de les àrees de rectangles de base aquests subintervals i altures les imatges de punts d'aquests subintervals (Figura 4):

$$S_n = f(c_1)\Delta x + f(c_2)\Delta x + ... + f(c_n)\Delta x \text{ on } x_{i-1} \leq c_i \leq x_i.$$

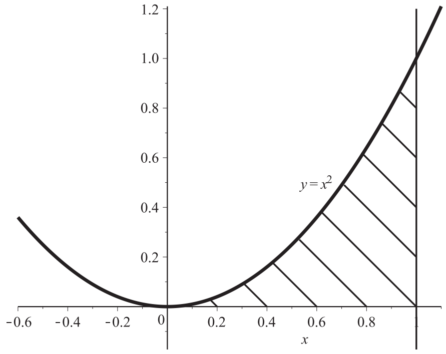

Figura 2:

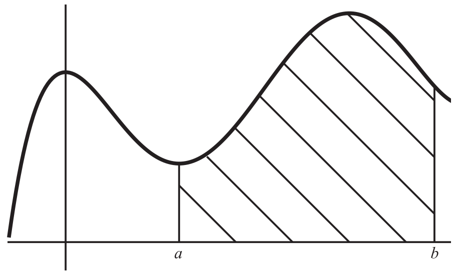

Figura 3:

El límit d'aquesta expressió, que (si f és positiva) és l'àrea sota f entre a i b, s'anomena la integral de f entre a i b.

Definició 1.4. *Sigui f contínua en $[a, b]$. La integral definida $\int_a^b f(x)dx$ de f entre a i b és el límit*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} f(c_1)\Delta x + f(c_2)\Delta x + ... + f(c_n)\Delta x \text{ on } x_{i-1} \leq c_i \leq x_i.$$

Nota: El signe $\int$ és una s estilitzada i recorda que estem fent una "suma d'infinits rectangles molt estrets". dx recorda que hem subdividit l'interval [a,b] en subintervals de longitud Δx, de manera que $f(x)dx$ seria l'àrea d'un rectangle "molt estret".

La integral definida satisfà les següents propietats:

Propietats 1.5. *Siguin f i g dues funcions contínues en un interval $[a, b]$, c un número entre a i b i k un número real.*

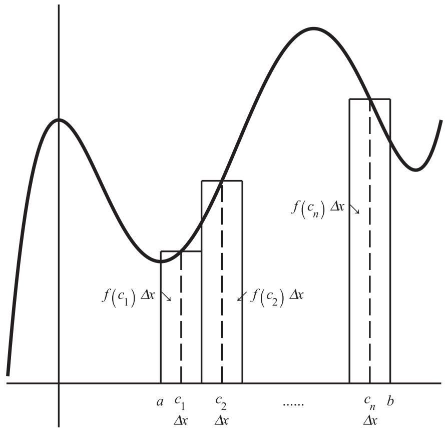

Figura 4:

1. $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

2. $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$.

3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

El càlcul d'una integral definida emprant directament la definició és molt complicat en general. Cal buscar algun mètode pràctic i general per a calcular integrals. Aquest mètode l'obtindrem en la següent secció.

2 Teorema fonamental del Càlcul. Regla de Barrow

La mitjana aritmètica $\overline{x}$ d'un número finit n de dades $a_1, a_2, ..., a_n$, és

$$\overline{x} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}.$$

En molts casos, però, interessa trobar la mitja aritmètica d'un conjunt continu de dades:

Exemple 2.1. La següent gràfica $y = f(x)$ (Figura 5) dóna la temperatura de Barcelona al llarg d'un dia de juliol. Quina va ser la temperatura mitjana d'aquest dia? Aquesta temperatura mitjana es defineix com el valor m que fa que l'àrea del rectangle de base $[0, 24]$ i altura m coincideixi amb la integral $\int_0^{24} f(x)dx$. Com que f és contínua, existeix com a mínim un c entre a i b tal que $f(c) = m$. En l'instant c, la temperatura coincidia amb la mitjana de tot el dia.

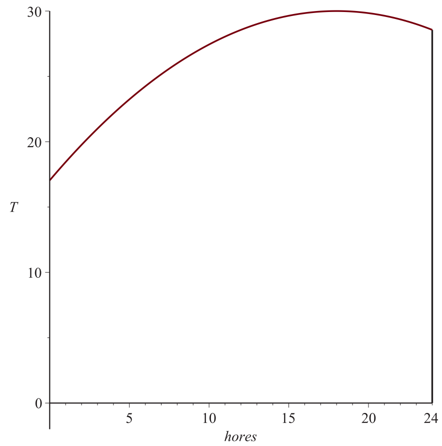

Figura 5: Temperatura de Barcelona durant un dia de juliol

L'exemple anterior és un cas particular del següent teorema.

Teorema 2.2. *Teorema del valor mitjà per a integrals.*

Si f és una funció contínua en l'interval $[a, b]$, aleshores existeix un número c entre a i b tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a).$$

(Figura 6).

Definició 2.3. *Si f és una funció contínua en l'interval $[a, b]$, aleshores el valor mitjà de f en aquest interval és*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

La funció àrea que definirem tot seguit ens permetrà relacionar el càlcul d'integrals amb el càlcul de derivades de forma sorprenent i molt útil.

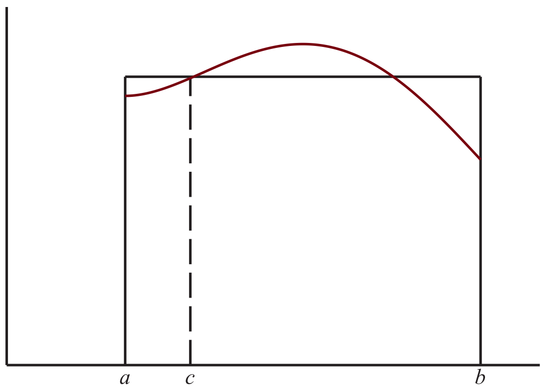

Figura 6:

Definició 2.4. *Si f és una funció contínua en l'interval $[a, b]$, aleshores la funció $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ definida en l'interval $[a, b]$ s'anomena funció àrea de f.*

$F(x)$ dóna l'àrea sota f entre a i x (Figura 7).

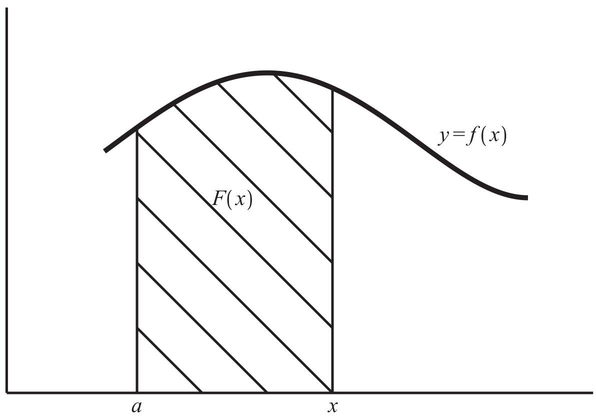

Figura 7:

Proposició 2.5. La derivada $F'(x)$ de la funció àrea $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ és $f(x)$.

Demostració.

$$\begin{aligned}F'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-f(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(x)dx - \int_a^x f(x)dx}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(x)dx}{h}\end{aligned}$$

i pel Teorema del valor mitjà,

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{h\cdot f(c)}{h} = f(c) \text{ amb } x \leq c \leq x+h.$$

Però quan h tendeix a 0, c tendeix a x i en conseqüència, $F'(x) = f(x)$. □

Definició 2.6. *Una primitiva d'una funció contínua f és una funció F tal que $F' = f$.*

Exemple 2.7.

- La funció àrea de f és una primitiva de f per la proposició anterior.
- $F(x) = x^2$, $G(x) = x^2 + 4$ i $H(x) = x^2 - 3$ són algunes funcions primitives de $f(x) = 2x$.

L'exemple anterior mostra que una funció pot tenir moltes primitives, El que és interessant és que totes es diferencien només per una constant additiva. Enunciem aquest resultat, sense demostració, en la següent proposició.

Proposició 2.8. Si F és una primitiva de f, aleshores G és una altra primitiva de f si, i només si, és de la forma $G(x) = F(x) + C$ on C és una constant.

Teorema 2.9. *Teorema fonamental del càlcul. Si f és una funció contínua en l'interval $[a, b]$ i F una primitiva de f, aleshores*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Demostració. Si F és una primitiva, es diferencia de la funció àrea per una constant additiva i per tant, $F(x) = \int_a^x f(x)dx + C$. En particular, $F(b) = \int_a^b f(x)dx + C$. D'altra banda $F(a) = \int_a^a f(x)dx + C = 0 + C$ i per tant $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. □

Notació. $F(b) - F(a)$ s'acostuma a escriure $F(x)\Big]_a^b$.

El teorema anterior també s'anomena Regla de Barrow o Regla de Newton-Leibniz. És molt útil, perquè permet calcular una integral sense haver d'aplicar la definició si coneixem una primitiva de la funció f.

Exemple 2.10.

1. Per a calcular la integral $\int_0^1 x^2 dx$, veiem que $\frac{x^3}{3}$ és una primitiva de x^2. Aleshores,
$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

2. Com que la derivada de la funció $\sin x$ és $\cos x$ (i per tant és una primitiva d'aquesta última funció),
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1.$$

3 Aplicacions de la integral simple

En aquesta secció aplicarem el càlcul integral als següents problemes:

- Càlcul d'àrees de regions del pla.
- Càlcul de volums de sòlids de secció coneguda.
- Càlcul de volums de cossos de revolució.
- Càlcul de longitud de corbes.

3.1 Càlcul d'àrees de regions del pla

Si tenim dues funcions f i g com les de la figura 8, l'àrea compresa entre aquestes dues funcions i les rectes verticals $x = a$ i $x = b$ és la diferència entre les àrees de les regions sota f i g entre a i b. Es a dir
$$\int_a^b (f-g)(x)dx.$$

En particular es té el següent resultat:

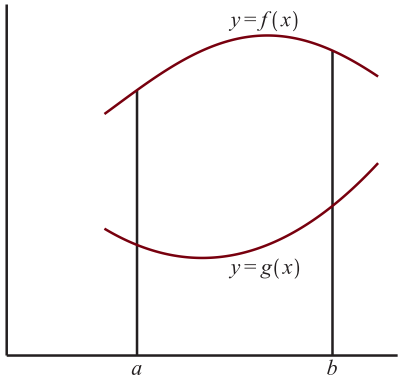

Figura 8:

Proposició 3.1. Si f i g es tallen en dos punts d'abscisses a i b, aleshores l'àrea de la regió limitada per f i g és

$$\int_a^b (f-g)(x)dx.$$

(figura 9).

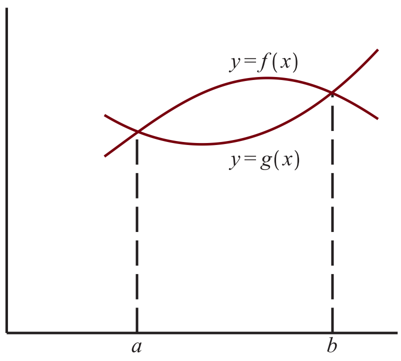

Figura 9:

Exemple 3.2. Per a trobar l'àrea limitada per les gràfiques de les funcions $f(x) = x + 2$ i $g(x) = x^2$, primer trobem les abscisses dels punts de tall, que són els que satisfan $f(x) = g(x)$. En aquest exemple, $x + 2 = x^2$. Les solucions d'aquesta equació són $a = -1$ i $b = 2$. L'àrea limitada per f i g és per tant

$$\int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \frac{9}{2}$$

3.2 Volum d'un sòlid de secció coneguda

Propietats 3.3. *Coneguda l'àrea $A(z)$, $a \leq z \leq b$ de les seccions perpendiculars a l'eix z d'un sòlid, el seu volum V és*

$$V = \int_a^b A(z)dz.$$

(Figura 10).

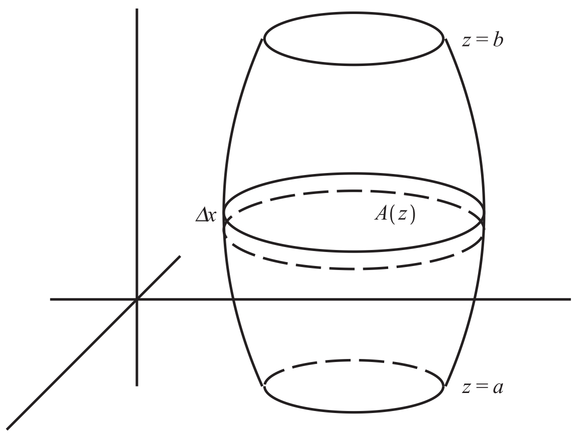

Figura 10:

Aquesta fórmula és aplicable a sòlids de seccions fàcils de calcular com ara quadrats, cercles, el·lipses, triangles,...

Exemple 3.4. Volem calcular el volum del sòlid limitat pel paraboloide $z = x^2 + y^2$ i el pla $z = 5$.

En aquest cas, $0 \leq z \leq 5$ i per cada valor de z, $A(z) = \pi z$ ja que la secció de nivell z és un cercle de centre situat a l'eix del paraboloide i radi $\sqrt{z}$ i té àrea $A(z) = \pi(\sqrt{z})^2 = \pi z$.

El volum buscat és

$$V = \int_0^5 A(z)dz = \int_0^5 \pi z dz = \pi \frac{z^2}{2}\Bigg]_0^5 = \frac{25\pi}{2} \simeq 39,25.$$

3.3 Càlcul de volums de cossos de revolució

Molts dels objectes obtinguts per processos industrials tenen seccions circulars. Es el cas d'ampolles, copes, moltes potes de mobles, eixos, etc. És interessant trobar una fórmula que permeti calcular el seu volum que és el que farem en aquesta subseccció.

Definició 3.5. *En girar una regió del pla al voltant d'una recta, s'obté un sòlid que s'anomena sòlid de revolució.*

Exemple 3.6.

- En girar un rectangle al voltant de la seva base, s'obté un cilindre.
- En girar un triangle rectangle al voltant d'un dels seus catets, s'obté un con.
- En girar un cercle al voltant d'un diàmetre, s'obté una esfera.
- En girar un cercle al voltant d'un eix que no el talli, s'obté un cos en forma de neumàtic que s'anomena torus.

Hi ha bàsicament dos mètodes per a calcular aquest volums:

- El mètode dels discos (i de les corones).
- El mètode de les capes.

3.3.1 Mètode dels discos

Per a trobar el volum d'un cos de revolució es procedeix de forma similar a la que hem usat per a calcular l'àrea de regions planes: es subdivideix el cos en llesques "molt primes" i s'aproxima el volum per una suma de volums de cilindres que aproximen les llesques. Així, si volem trobar el volum del cos de revolució generat per la regió de la figura 11 en girar al voltant d'un eix paral·lel a l'eix OX, dividim l'interval $[a, b]$ en n parts iguals d'amplada

$\Delta x = \frac{b-a}{n}$ i aleshores, el volum de cada llesca vertical d'amplada Δx és $\pi r^2(x)\Delta x$ on $r(x)$ és la distància del punt de la corba a l'eix de gir (figura 11). (Recordem que el volum d'un cilindre de base de radi r i altura h és $\pi r^2 h$ i en el nostre cas el radi del cilindre és $r(x)$ i la seva altura Δx).

Passant al límit, es té la següent proposició:

Proposició 3.7. Mètode dels discos. El volum V del cos de revolució generat en girar una corba limitada entre $x = a$ i $x = b$ al voltant d'un eix paral·lel a l'eix OX és

$$V = \pi \int_a^b r^2(x)dx$$

on $r(x)$ és la distància de la corba a l'eix. (Figura 11).

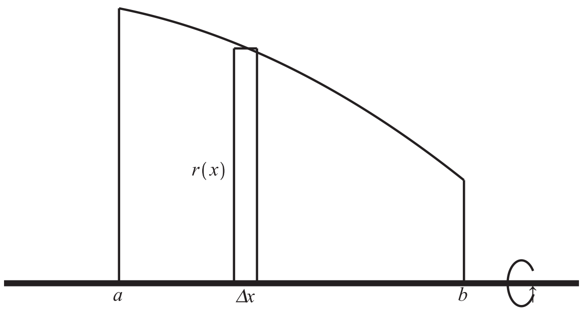

Figura 11: Mètode dels discos

Exemple 3.8. Per a trobar el volum del sòlid de revolució generat per la regió limitada per la corba $f(x) = 4 - x^2$ i l'eix OX en girar al voltant d'aquest eix, primer busquem els punts on la funció el talla:

$$4 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 2.$$

La distància $r(x)$ de la corba a l'eix OX és $r(x) = f(x) = 4 - x^2$. El volum és, per tant,

$$V = \pi \int_{-2}^{2} (4-x^2)^2 dx = \pi \int_{-2}^{2} (16-8x^2+x^4)dx = \pi \left[16x - \frac{8x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{2} = \frac{512\pi}{15}.$$

Si volem calcular el volum limitat per dues corbes al voltant d'un eix paral·lel a l'eix OX podem usar el mètode de les corones que consisteix en restar al volum generat per la corba exterior el volum generat per la corba interior en girar al voltant de l'eix.

Proposició 3.9. Mètode de les corones. El volum V limitat per dues corbes al voltant d'un eix paral·lel a l'eix OX és

$$V = \pi \int_a^b [(r_e^2(x) - r_i^2(x)]dx$$

on $r_e(x)$ i $r_i(x)$ són les distàncies a l'eix de la corba exterior i interior respectivament (figura 12).

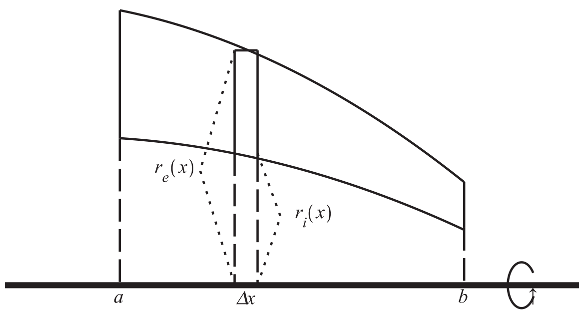

Figura 12: Mètode de les corones

Exemple 3.10. Per a calcular el volum del sòlid generat per la regió del pla limitada per les corbes $y = x^2$ i $y = x^3$ quan gira al voltant de l'eix OX, veiem que $r_e(x) = x^2$ i que $r_i(x) = x^3$ amb $0 \leq x \leq 1$. El volum demanat és per tant

$$V = \pi \int_0^1 [(x^2)^2 - (x^3)^2]dx = \pi \int_0^1 (x^4 - x^6)dx = ... = \frac{2\pi}{35}.$$

3.3.2 Mètode de les capes

Un altre mètode per a calcular volums de revolució és el de les capes. En aquest cas, la regió del pla que gira al voltant d'un eix es divideix en llesques paral·leles a l'eix d'amplada Δx. Aquestes llesques generen un cilindre buit de gruix Δx. La suma dels volums generats per totes aquestes llesques aproxima el volum buscat quan les llesques són "molt estretes". Noti's que si desenvolupem el cilindre buit s'obté un prisma de base rectangular i costats $2\pi r(x)\ \Delta x$ i $h(x)$ i per tant de volum $2\pi r(x)h(x)\Delta x$ (figura 13). En el límit s'obté:

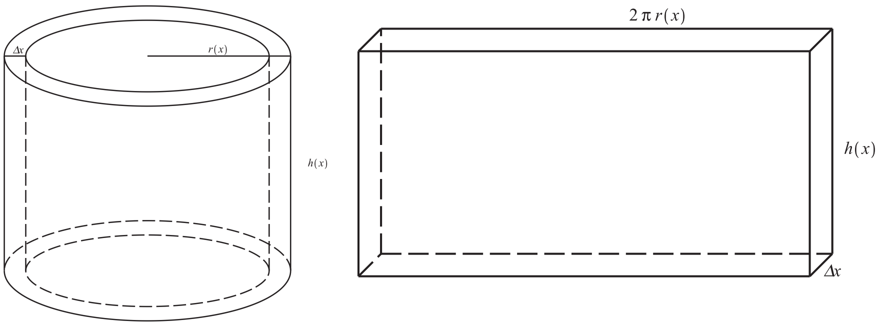

Figura 13:

Proposició 3.11. Mètode de les capes. El volum V del cos de revolució obtingut en girar una regió del pla al voltant d'un eix paral·lel a l'eix OY és

$$V = 2\pi \int_a^b r(x)h(x)dx$$

on $r(x)$ és la distància d'una llesca a l'eix de rotació i $h(x)$ la seva altura (figura 14).

Exemple 3.12. Volem calcular el volum del sòlid de revolució obtingut en girar la regió del pla limitada per $y = \mathrm{e}^{-x^2}$, l'eix OX i la recta $x = 1$ al voltant de l'eix OY.

La distància d'una llesca a l'eix de gir és $r(x) = x$.

L'altura d'una llesca és $h(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.

El volum V demanat és per tant

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 x\mathrm{e}^{-x^2} dx = \pi \int_0^1 2x\mathrm{e}^{-x^2} dx = -\pi \left[\mathrm{e}^{x^2}\right]_0^1 \\ &= -\pi(\mathrm{e}^{-1} - 1) = \pi(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}) \simeq 1,986 \end{aligned}$$

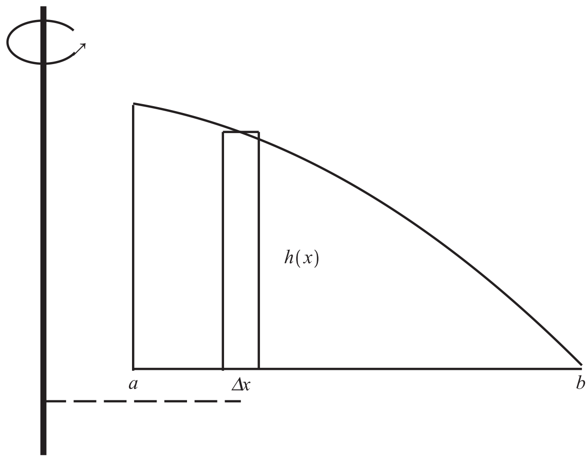

Figura 14: Mètode de les capes

3.4 Càlcul de longitud de corbes

Per a trobar la longitud d'una corba es procedeix de forma similar als casos anteriors: s'aproxima la corba per una poligonal. Si la poligonal està formada per segments "molt petits", aleshores l'aproximació serà bastant acurada (figura 15). El quocient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ és aproximadament $f'(x)$ i podem escriure $\Delta y \simeq f'(x)\Delta x$. Així,

$$\Delta L = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \simeq \sqrt{\Delta x^2 + [f'(x)]^2 \Delta x^2} = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\Delta x.$$

Passant al límit, la longitud es pot calcular mitjançant una integral.

Proposició 3.13. Longitud d'una corba. Si la funció f té derivada contínua en l'interval $[a, b]$, aleshores la longitud L de la gràfica de f entre a i b es pot calcular mitjançant la fórmula

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Exemple 3.14. La longitud L de l'arc de la funció $f(x) = \frac{2(x-1)^{\frac{3}{2}}}{3}$ entre $x = 0$ i $x = 3$ és

$$\begin{aligned} L &= \int_0^3 \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_0^3 \sqrt{1 + (\sqrt{x-1})^2} dx \\ &= \int_0^3 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big]_0^3 = 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

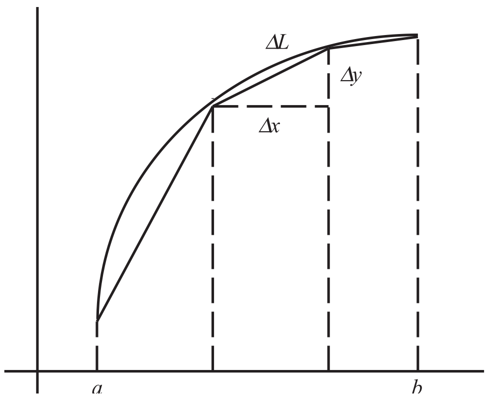

Figura 15:

4 Integració numèrica

Hi ha molts casos en què no es pot aplicar la regla de Barrow per a trobar una primitiva o en què és un procés massa laboriós.

Exemple 4.1. Les integrals $\int \mathrm{e}^{-x^2} dx$ i $\int \frac{\sin x}{x} dx$ no es poden expressar de forma senzilla. Si volem calcular, per exemple, la integral $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2} dx$, no podrem aplicar la regla de Barrow.

En aquests casos, el que es pot fer és usar mètodes numèrics per a trobar la integral definida de forma aproximada. Hi ha molts mètodes d'integració numèrica implementats en diferents paquets de programes d'ordinadors i calculadores de butxaca i es poden aplicar de forma gairebé automàtica. En aquesta secció en veurem dos: la regla dels trapezis i la regla de Simpson. La idea és aproximar l'àrea sota la funció per sumes d'àrees de regions senzilles.

4.1 Regla dels trapezis

Amb la regla dels trapezis, aproximem la integral f per n trapezis d'igual altura com mostra la figura 16.

Recordant que l'àrea d'un trapezi és la semisuma de les bases per l'altura,

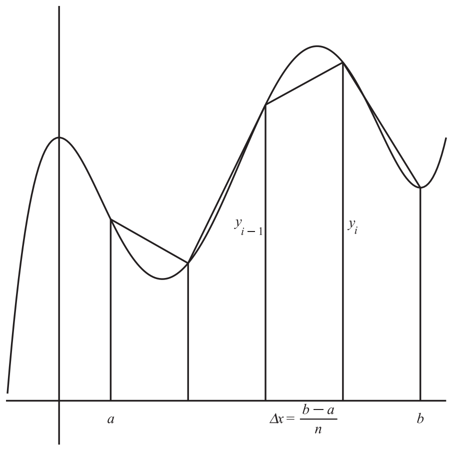

Figura 16:

l'àrea de cada trapezi és

$$\frac{y_i + y_{i+1}}{2} \cdot \Delta x = \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \cdot \frac{b-a}{n} = (y_i + y_{i+1}) \cdot \frac{b-a}{2n}.$$

La suma dels n trapezis és

$$\frac{b-a}{2n}(y_0 + 2y_1 + ... + 2y_{n-1} + y_n).$$

Així es té la

Teorema 4.2. Regla dels trapezis. *Si f és una funció contínua en $[a,b]$, la regla dels trapezis per a aproximar $\int_a^b f(x)dx$ ve donada per*

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{b-a}{2n}(y_0 + 2y_1 + ... + 2y_{n-1} + y_n)$$

on $y_i = f(x_i)$ i $\{x_0, x_1, ...x_n\}$ és una partició de $[a,b]$ en n subintervals iguals. A més, quan $n \to \infty$, la suma de la dreta tendeix cap a $\int_a^b f(x)dx$.

Exemple 4.3. Calcular $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2} dx$ amb la regla des trapezis amb $n = 4$.

En aquest cas, $b = 1$ i $a = 0$. Per tant $\frac{b-a}{4} = \frac{1}{4}$ i $x_i = \frac{i}{4}$.

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2} dx \simeq \frac{1}{2 \cdot 4}(\mathrm{e}^{-(\frac{0}{4})^2} + 2\mathrm{e}^{-(\frac{1}{4})^2} + 2\mathrm{e}^{-(\frac{2}{4})^2} + 2\mathrm{e}^{-(\frac{3}{4})^2} + \mathrm{e}^{-(\frac{4}{4})^2}) = 0,74298.$$

4.2 Regla de Simpson

La regla de Simpson és molt similar a la dels trapezis i la idea consisteix en aproximar la funció per arcs de paràboles en comptes de fer-ho per segments rectilinis. Cal que el nombre n de subdivisions sigui parell. Per a trobar la fórmula de la regla de Simpson ens caldrà usar el següent lema que donem sense demostració.

Lema 4.4. Si $p(x)$ és un polinomi de grau menor o igual que 2, aleshores

$$\int_a^b p(x) = \frac{b-a}{6}\Big[p(a) + 4p(\frac{a+b}{2}) + p(b)\Big].$$

L'aproximació de la integral $\int_a^b f(x)dx$ la construirem subdividint l'interval $[a,b]$ en un nombre parell n de subintervals iguals (de longitud $\frac{b-a}{n}$) i, a cada subinterval doble, aproximant f per un polinomi p de grau menor o igual que 2:

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx &\simeq \int_{x_0}^{x^2} p(x)dx = \frac{b-a}{3n}\Big[y_0 + 4y_1 + y_2\Big] \\
\int_{x_2}^{x_4} f(x)dx &\simeq \int_{x_2}^{x^4} p(x)dx = \frac{b-a}{3n}\Big[y_2 + 4y_3 + y_4\Big] \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Sumant totes aquestes aproximacions, s'obté la regla del Simpson:

Teorema 4.5. Regla de Simpson. *Si f és una funció contínua en $[a,b]$, la regla del Simpson per a aproximar $\int_a^b f(x)dx$ ve donada per*

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{b-a}{3n}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + ... + 4y_{n-1} + y_n)$$

on $y_i = f(x_i)$ i $\{x_0, x_1, ...x_n\}$ és una partició regular de $[a,b]$ en n subintervals (n parell) iguals. A més, quan $n \to \infty$, la suma de la dreta tendeix cap a $\int_a^b f(x)dx$.

Exemple 4.6. Calcular $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}dx$ amb la regla de Simpson amb $n = 4$.

En aquest cas, $b = 1$ i $a = 0$. Per tant $\frac{b-a}{4} = \frac{1}{4}$ i $x_i = \frac{i}{4}$.

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}dx \simeq \frac{1}{3\cdot 4}(\mathrm{e}^{-(\frac{0}{4})^2} + 4\mathrm{e}^{-(\frac{1}{4})^2} + 2\mathrm{e}^{-(\frac{2}{4})^2} + 4\mathrm{e}^{-(\frac{3}{4})^2} + \mathrm{e}^{-(\frac{4}{4})^2}) = 0,74685.$$

Control dels errors

Quan s'usen tècniques d'aproximació és important conèixer el seu grau de correcció. Si considerem l'exemple anterior, hem vist que $0,74685$ és una aproximació de $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}dx$, però, és una aproximació "bona"? Quants decimals podem assegurar que són correctes? Aquest control de l'error per les Regles dels trapezis i de Simpson ve donat en el següent teorema.

Teorema 4.7. Error el les Regles dels trapezis i de Simpson.

- *Si f té segona derivada contínua en $[a, b]$, aleshores l'error E_n comès en aproximar $\int_a^b f(x)dx$ per la regla dels trapezis està fitat per*

$$E_n \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot M_2 \qquad \text{on} \qquad M_2 = \max\{|f''(x)|; a \leq x \leq b\}.$$

- *Si f té derivada quarta contínua en $[a, b]$, aleshores l'error E_n comès en aproximar $\int_a^b f(x)dx$ per la regla de Simpson està fitat per*

$$E_n \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} \cdot M_4 \qquad \text{on} \qquad M_4 = \max\{|f^{(IV)}(x)|; a \leq x \leq b\}.$$

Evidentment, els resultats anterior donen fites per a l'error, però no l'error. (Si sabéssim, per exemple que l'error que hem comès és que hem obtingut un valor $0,03$ unitats menor que el real, per exemple, sumant-lo obtindríem aquest valor real).

És interessant comparar com varien les fites dels errors en ambdues regles quan es dobla el número de subintervals.

Regla dels trapezis

$$\begin{aligned} E_n &\simeq \frac{k}{n^2} \\ E_{2n} &\simeq \frac{k}{4n^2} \simeq \frac{1}{4}E_n. \end{aligned}$$

Regla de Simpson

$$\begin{aligned} E_n &\simeq \frac{k}{n^4} \\ E_{2n} &\simeq \frac{k}{16n^4} \simeq \frac{1}{16}E_n. \end{aligned}$$

Doblant el número de subdivisions, l'error (la seva fita) es redueix a la quarta part.

a la setzena part.