MATEMÀTIQUES II

TEMA 7. INTEGRACIÓ DOBLE

Secció de Matemàtiques i Informàtica.
Departament d'Estructures a l'Arquitectura.
E.T.S. d'Arquitectura del Vallès.
Universitat Politècnica de Catalunya.

1 Integral doble

Donada una funció $z = f(x, y)$ de dues variables positiva (és a dir $f(x, y) \geq 0$) i un recinte A en el pla, considerem la regió de l'espai formada pels punts per sobre de la regió A i per sota de la gràfica de la funció $f(x, y)$ (figura 1).

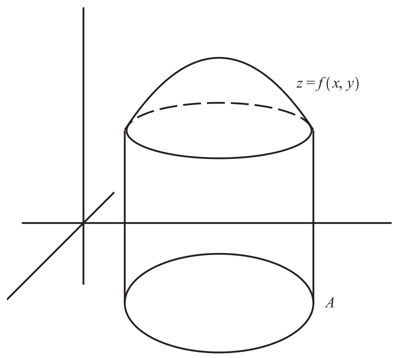


Figura 1:

Per a calcular el volum d'aquesta regió, podem procedir d'una forma similar a com vàrem calcular l'àrea sota una funció $y = f(x)$ entre a i b en el tema anterior:

Superposem una quadrícula rectangular a A (figura 2). Per cada rectangle

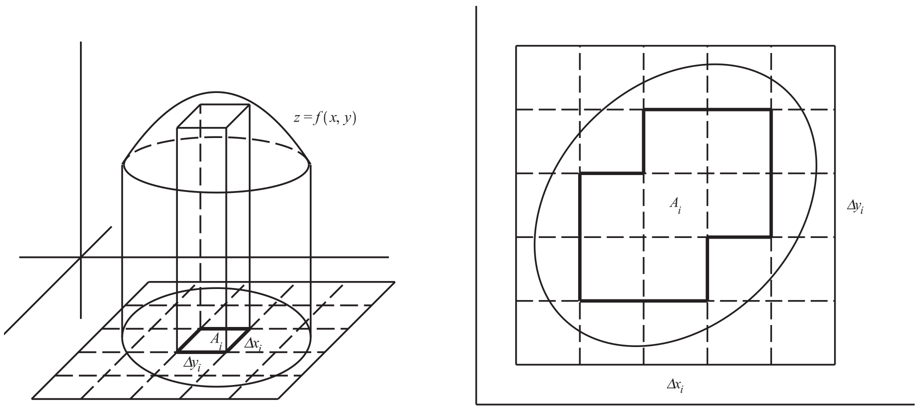


Figura 2:

A_i de costats Δx_i i Δy_i calculem el volum del prisma que té aquest rectangle per base i $f(x_i, y_i)$ per altura, on (x_i, y_i) és un punt del rectangle A_i. El volum d'aquest prisma és (figura 3)

$$f(x_i, y_i)\Delta x_i \Delta y_i.$$

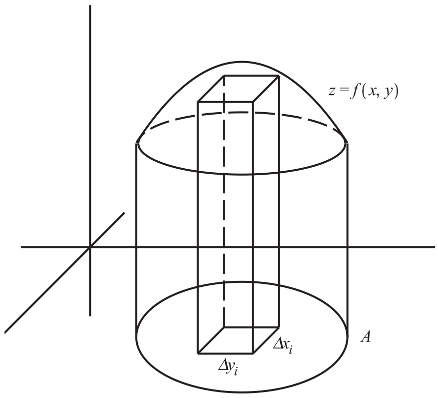


Figura 3:

La suma de tots el volums de tots aquests prismes és aproximadament el volum V de la nostra regió:

$$V \simeq \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta x_i \Delta y_i.$$

Per cada una d'aquestes quadrícules, considerem $|\Delta|$ = màxim de les diagonals dels rectangles A_i.

Prenent el límit d'aquestes sumes quan $|\Delta| \to 0$ obtenim el volum desitjat.

Usant aquest procediment per a una funció de dues variables qualsevol (no necessàriament positiva) tenim la següent definició de la integral doble:

Definició 1.1. *Si $f(x, y)$ està definida i fitada en una regió A fitada del pla, aleshores la integral doble de f en A és el número*

$$\int_A f = \iint_A f(x, y)dxdy = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta x_i \Delta y_i.$$

quan aquest límit existeix.

El següent teorema assegura que, en condicions relativament generals, la integral doble (el límit de la definició anterior) existeix.

Teorema 1.2. *Condicions d'integrabilitat. Si f és fitada en A i contínua (excepte com a màxim en els punts d'un nombre finit de corbes regulars) en A i A és una regió fitada i limitada per un nombre finit de corbes regulars, aleshores f és integrable en A. (És a dir, existeix $\iint_A f(x,y)dxdy$).*

Teorema 1.3. *Propietats de la integral doble.*

1. $\int_A (f+g) = \int_A f + \int_A g$.
2. $\int_A (c \cdot f) = c \cdot \int_A f$.
3. $\int_A f \leq \int g$ *si* $f \leq g$ *en* A.
4. $\int_A f = \int_{A_1} f + \int_{A_2} f$ *si* $A = A_1 \cup A_2$ *i* $A_1 \cap A_2$ *és una corba regular (figura 4).*

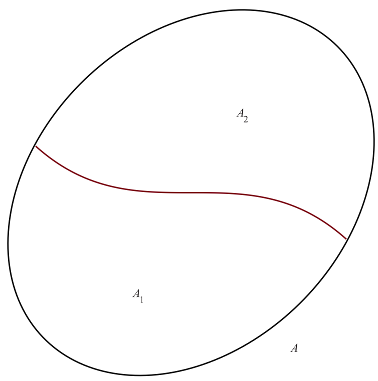
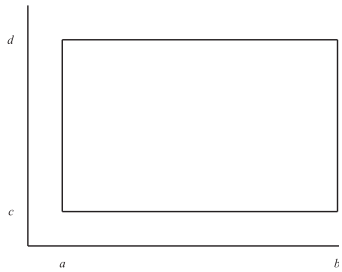


Figura 4:

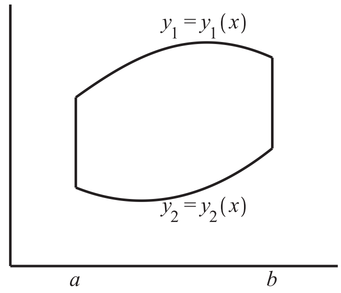
2 Càlcul de la integral doble

El càlcul d'una integral doble es redueix al càlcul de dues integrals simples com veurem en aquesta secció. Aquest resultat s'anomena Teorema de Fubini. Això val per a funcions contínues (excepte com a molt en un nombre finit de corbes regulars) i fitades en regions del pla A d'algun dels tipus següents:

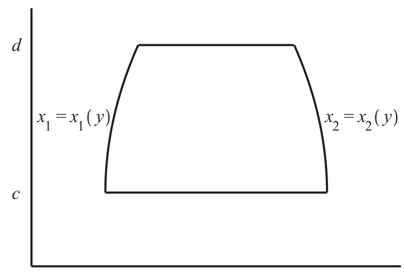
Tipus 0: $\quad A : \begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d. \end{cases}$



Tipus I $\quad A : \begin{cases} a \leq x \leq b \\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x). \end{cases}$



Tipus II $\quad A : \begin{cases} c \leq y \leq d \\ x_1(y) \leq x \leq x_2(y). \end{cases}$



Teorema 2.1. *Teorema de Fubini Si f és contínua (excepte com a molt en un nombre finit de corbes regulars) i fitada, aleshores*

Tipus 0:

$$\iint_A f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx.$$

Tipus I:

$$\iint_A f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$

Tipus II:

$$\iint_A f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx.$$

Interpretació geomètrica del Teorema de Fubini:

Ens restringirem a justificar la primera igualtat del teorema anterior. Els altres casos són similars:

Recordem del tema anterior que si tenim un cos a l'espai situat entre $x = a$ i $x = b$ del qual en coneixem les àrees $A(x)$ de les seves seccions perpendiculars a l'eix OX, aleshores podem calcular el seu volum V amb la fórmula

$$V = \int_a^b A(x)dx.$$

En el cas d'una regió de tipus 0, el volum del cos és per tant $\int_a^b A(x)dx$. Però $A(x) = \int_c^d f(x,y)dy$ (figura 5). Així,

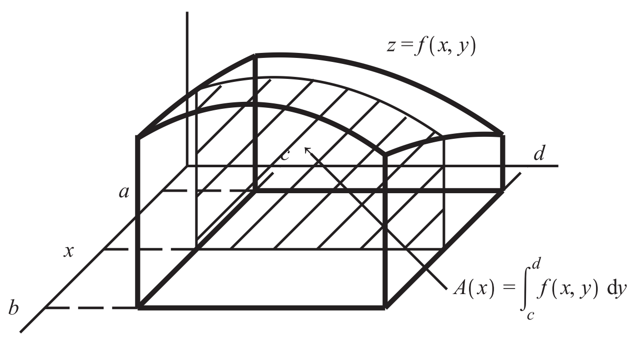


Figura 5: Teorema de Fubini

$$V = \int_a^b A(x)dx = V = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy.$$

Exemple 2.2. Per a calcular la integral de la funció $f(x,y) = 1 - x - y$ sobre la regió A del pla XY limitada pels eixos i la recta $x + y = 1$, primer descrivim la regió A:

$$A : \left\{ \begin{array}{c} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 - x. \end{array} \right.$$

La integral és

$$\begin{aligned} & \iint_A (1 - x - y))dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y)dy \\ = & \int_0^1 dx \left[y - xy - \frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} = \int_0^1 (1 - x - x(1 - x) - \frac{(1-x)^2}{2})dx \\ = & \int_0^1 \frac{1 - 2x + x^2}{2} dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

3 Aplicacions de la Integral doble

La integral doble té moltes aplicacions. A continuació en veurem algunes de les més importants.

3.1 Volum d'un sòlid

Donada una funció $z = f(x,y)$ de dues variables positiva (és a dir $f(x,y) \geq 0$) i un recinte A en el pla, el volum V de la regió de l'espai formada pels punts per sobre de la regió A i per sota de la gràfica de la funció $f(x,y)$ (figura) es pot calcular com

$$V = \iint_A f(x,y)dxdy.$$

Exemple 3.1. El volum limitat pel pla $z = 1 - x - y$ sobre la regió A del pla XY limitada pels eixos i la recta $x + y = 1$ es pot trobar calculant la integral de l'Exemple 2.2 i per tant val $\frac{1}{6}$.

3.2 Àrea d'una regió al pla

Considerem una regió A al pla XY de la que volem trobar-ne la seva àrea o superfície S. Fixem-nos que el volum del cos que té per base A i altura 1 és $S \cdot 1 = S$. Per tant l'àrea coincideix amb la integral de la funció constant $z = 1$ sobre la regió A:

$$S = \iint_A dxdy.$$

Aquesta fórmula és especialment útil quan es fa un canvi de variables per a calcular la integral que estudiarem a la Secció 4.

3.3 Massa, Moments i Centre de Massa d'una làmina plana

Considerem una làmina plana, que podem identificar amb una regió A de punts (x, y) del pla XY, amb una funció de densitat $\delta = \delta(x, y)$ (figura 6). La funció de densitat mesura la massa per unitat de superfície i la

Massa M d'una làmina amb densitat (variable) $\delta = \delta(x, y)$

es pot calcular amb la integral

$$M = \iint_A \delta(x, y)dxdy. \tag{1}$$

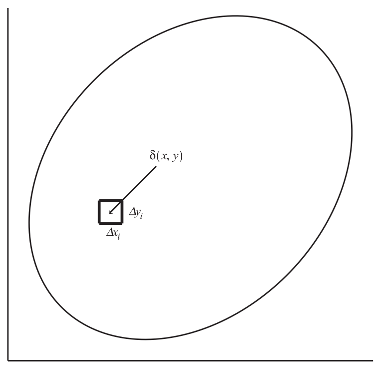


Figura 6:

Per a deduir la fórmula anterior, fixem-nos que considerant una quadricula que contingui A, a cada quadrat es té

$$\begin{aligned} \Delta M_i &\simeq \delta(x_i, y_i) \cdot \text{àrea}(A_i) \quad \text{i, per tant,} \\ M &= \sum_{i=1}^{n} \Delta M_i \simeq \sum_{i=1}^{n} \delta(x_y, y_i) \Delta x_i \Delta y_i. \end{aligned}$$

Prenent el límit de l'expressió anterior per totes les quadrícules quan $|\Delta| \to 0$, s'obté la integral (1) anterior.

Moments estàtics o de primer ordre respecte als eixos OX i OY

Els moments estàtics mesuren la tendència d'un objecte a girar entorn d'un eix. Els moments M_x i M_x d'una placa A respecte als eixos OX i OY es poden calcular amb les següents integrals:

$$M_x = \iint_A y \cdot \delta(x, y) dx dy. \tag{2}$$

$$M_y = \iint_A x \cdot \delta(x, y) dx dy.$$

Justifiquem per exemple la fórmula per a calcular M_x:

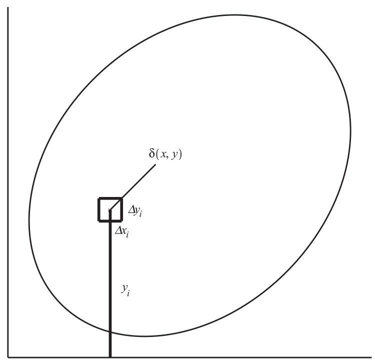


Figura 7:

Si en una quadrícula que contingui A considerem un element de massa ΔM_i, la seva distància a l'eix OX és y_i. El moment d'aquest element respecte d'aquest eix és doncs $\Delta M_i \cdot y_i$ (figura 7). La suma de tots aquests elements és

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta M_i \cdot y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \delta(x_i, y_i) \Delta x_i \Delta y_i.$$

Prenent el límit de l'expressió anterior per totes les quadrícules quan $|\Delta| \to 0$, s'obté la integral (2).

Centre de massa (cdm)

El centre de massa (cdm) G d'una làmina A amb funció de densitat $\delta(x, y)$ representa el punt d'equilibri en el sentit que la massa total M concentrada en G tindria els mateixos moments estàtics que la làmina:

$$M_y = M \cdot \overline{x} \qquad\qquad M_x = M \cdot \overline{y}.$$

Les coordenades del centre de massa $G = (\overline{x}, \overline{y})$ es poden trobar, doncs, amb les integrals

$$\overline{x} = \frac{1}{M} \iint_A x \cdot \delta(x, y) dxdy.$$

$$\overline{y} = \frac{1}{M} \iint_A y \cdot \delta(x, y) dxdy.$$

Si la densitat de la làmina és constant ($\delta = k$), aleshores $M = k \cdot a(A)$ on $a(A)$ és l'àrea de A i per a calcular les coordenades del centre de massa (que en el cas en què la densitat és constant també s'anomena centroide) podem emprar les següents fórmules:

$$\overline{x} = \frac{1}{a(A)} \iint_A xdxdy.$$

$$\overline{y} = \frac{1}{a(A)} \iint_A ydxdy.$$

Moments d'inèrcia o de segon ordre respecte als eixos OX i OY

Aquests moments mesuren la resistència a resistir-se a un canvi de moviment rotatori. Els moments d'inèrcia I_x i I_y respecte als eixos de coordenades es poden calcular amb les següents integrals:

$$I_x = \iint_A y^2 \cdot \delta(x, y) dxdy.$$

$$I_y = \iint_A x^2 \cdot \delta(x,y)dxdy.$$

4 Canvis de variables

Hi ha situacions en què el càlcul d'una integral doble se simplifica fent un canvi de variables, és a dir, substituint les dues variables x, y per unes altres u, v (figura 8).

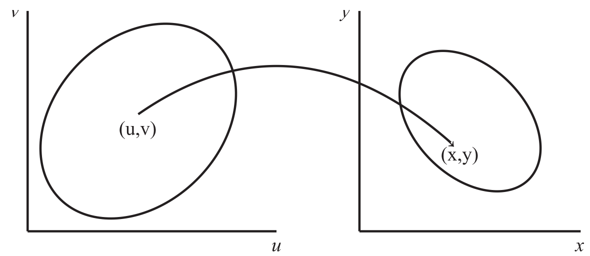


Figura 8:

Expressem aquest canvi mitjançant dues funcions

$$\text{Canvi}: \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v). \end{cases}$$

Definició 4.1. *Si $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, aleshores el jacobià de x i y respecte a u i v, notat per $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$, és*

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Exemple 4.2. Calculem el jacobià del canvi a polars

$$\text{Canvi}: \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta. \end{cases}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r.$$

Teorema 4.3. *Teorema del canvi de variables. Siguin A i B dues regions dels plans xy i uv relacionades per les equacions $x = x(u,v)$ i $y = y(u,v)$ de* *manera que cada punt de A és imatge d'un únic punt de B. Si f és contínua en A i el canvi té derivades parcials contínues en B i jacobià $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ no nul en B, aleshores*

$$\iint_A f(x,y)dxdy = \iint_B f(x(u,v),y(u,v)) \cdot \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv.$$

Exemple 4.4. Calcular la integral

$$\iint_A (4-x^2-y^2)dxdy$$

on A és el cercle de centre $(0,0)$ i radi $\sqrt{3}$.

El recinte A el podem expressar de manera molt senzilla en coordenades polars:

$$A : \left\{ \begin{array}{c} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq \sqrt{3}. \end{array} \right.$$

Les fórmules del canvi a polars són

$$\text{Canvi a polars} \left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array} \right.$$

i el jacobià del canvi a polars és r (Exemple 4.2). Així,

$$\iint_A (4-x^2-y^2)dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} (4-r^2)rdr = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} (4r-r^3)dr$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \left[\frac{4r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{3}} = \int_0^{2\pi} \frac{15}{4} d\theta = \left[\frac{15\theta}{4}\right]_0^{2\pi} = \frac{15\pi}{2}.$$

Noti's que en la primera igualtat hem substituït x^2+y^2 per r^2 **i hem multiplicat per r, el jacobià del canvi**.

Interpretació geomètrica del jacobià

Mirem primer què passa quan la transformació és una aplicació lineal.

$$\left\{ \begin{array}{l} x = au + bv \\ y = cu + dv \end{array} \right. \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Geomètricament, el quadrat generat pels vectors $e_1 = (1,0)$ i $e_2 = (0,1)$ es transforma en el paral·lelogram generat pels vectors (b,d) i (a,c) i la malla generada per e_1 i e_2 es transforma en la generada per (b,d) i (a,c). (Figura).

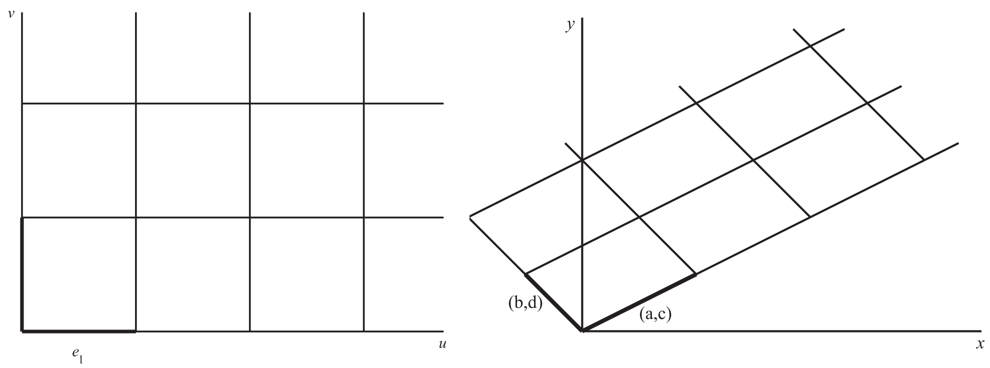


Figura 9:

El jacobià J en aquest cas és fàcil de calcular ja que coincideix amb el determinant de M: $J = \det M$. Si recordem que geomètricament **el determinant de M és l'àrea del paral·lelogram generat per (a,c) i** (b,d), el que ens mesura el jacobià és la relació que hi ha entre l'àrea del quadrat generat pels vectors e_1 i e_2 del pla uv i la del paral·lelogram generat per les seves imatges en el pla xy.

De forma similar, és fàcil veure que el jacobià d'una transformació afí és el determinant de la seva part lineal.

Això vol dir que, en les transformacions lineals i afins, la deformació és idèntica en qualsevol punt del pla i la relació d'àrees entre una figura del pla uv i la de la seva transformada en el pla xy és precisament el seu determinant que coincideix amb el jacobià [1]. Dit d'una altra manera, el jacobià és el coeficient de dilatació de les àrees.

Quan la transformació no és afí, aleshores la deformació varia i depèn del punt que tenim en compte. Considerem per exemple el canvi a coordenades

[1]De fet la relació entre les àrees és el *valor absolut* del jacobià (tal i com apareix en el Teorema 4.3).

polars.

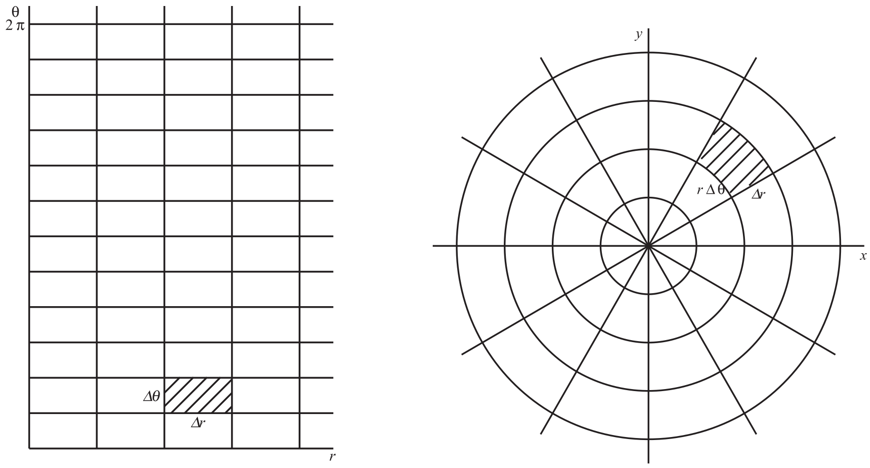


Figura 10:

Com es pot veure a la figura 10, els rectangles de l'esquerra es transformen en trossos de corona circular de diferent mida. Per exemple, el rectangle marcat a l'esquerra es transforma en el tros de corona circular marcat a la dreta. L'àrea del rectangle és $\Delta r \Delta\theta$ i la del tros de corona

$$\frac{(r+\Delta r)^2\Delta\theta}{2} - \frac{r^2\Delta\theta}{2} = r\Delta r\Delta\theta + \frac{(\Delta r)^2\Delta\theta}{2}.$$

La relació entre ambdues àrees és per tant

$$\frac{r\Delta r\Delta\theta + \frac{(\Delta r)^2\Delta\theta}{2}}{\Delta r\Delta\theta} = r + \frac{\Delta r}{2}.$$

Quan Δr i $\Delta\theta$ tendeixen a 0, aquesta expressió tendeix a r que és el jacobià de la transformació.

5 Dos teoremes de Pappus

En aquesta secció enunciarem dos teoremes de Pappus sobre els centres de massa (cdm).

Teorema 5.1. *Primer Teorema de Pappus. El cdm G de la reunió de dues regions planes disjuntes A_1 i A_2 està sobre el segment de recta que uneix el* *cdm G_1 de A_1 amb el cdm G_2 de A_2. A més, les coordenades $(\overline{x}, \overline{y})$ de G es poden calcular a partir de les coordenades $(\overline{x}_1, \overline{y}_1)$ de G_1 i $(\overline{x}_2, \overline{y}_2)$ de G_2 amb les fórmules*

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{1}{M}(M_1\overline{x}_1 + M_2\overline{x}_2) \\ \overline{y} &= \frac{1}{M}(M_1\overline{y}_1 + M_2\overline{y}_2) \end{aligned}$$

on M_1 és la massa de A_1, M_2 és la massa de A_2 i $M = M_1 + M_2$ és la massa total (figura 11).

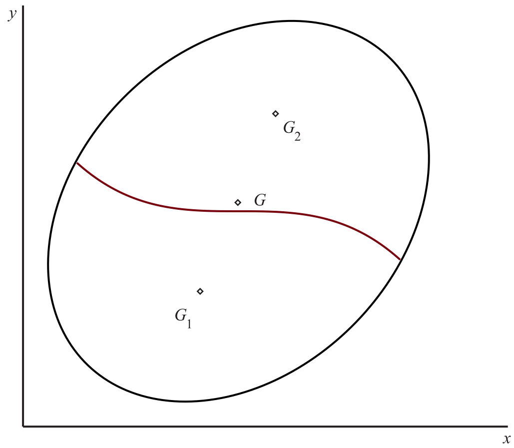


Figura 11:

Demostració.

$$\overline{x}M = \iint_A x \cdot \delta dxdy = \iint_{A_1} x \cdot \delta dxdy + \iint_{A_2} x \cdot \delta dxdy = \overline{x}_1 M_1 + \overline{x}_2 M_2.$$

$$\overline{y}M = \iint_A y \cdot \delta dxdy = \iint_{A_1} y \cdot \delta dxdy + \iint_{A_2} y \cdot \delta dxdy = \overline{y}_1 M_1 + \overline{y}_2 M_2.$$

□

Teorema 5.2. *Segon Teorema de Pappus. Sigui A una regió plana i S el sòlid de revolució obtingut fent girar A al voltant d'una recta. Si l'eix de revolució no talla la regió A, aleshores el volum $v(S)$ de S ve donat per*

$$v(S) = 2\pi r \cdot a(A)$$

on $a(A)$ és l'àrea de A i r la distància del centroide de A a l'eix de revolució.

Demostració. Podem suposar que l'eix de revolució és l'eix OX i en conseqüència r coincideix amb la coordenada $\overline{y}$ del cdm de A (figura 12).

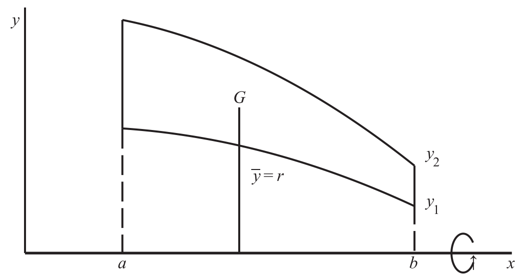


Figura 12:

La regió A la descrivim

$$A : \begin{cases} a \leq x \leq b \\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x). \end{cases}$$

Pel mètode de les corones, el volum $v(S)$ és

$$v(S) = \pi \int_a^b \left[y_2^2(x) - y_1^2(x)\right] dx$$

que és el mateix que obtenim al calcular l'expressió de la dreta de la igualtat del teorema:

$$\begin{aligned} 2\pi r \cdot a(A) &= 2\pi\overline{y} \cdot a(A) = 2\pi \iint_A y dx dy = 2\pi \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} y dy \\ &= 2\pi \int_a^b \frac{1}{2} \left[y^2\right]_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx = \pi \int_a^b \left[y_2^2(x) - y_1^2(x)\right] dx. \end{aligned}$$

□