Apunts de Càlcul
Tema 5. Nombres complexos

Lali Barrière, Josep M. Olm
Departament de Matemàtica Aplicada 4 - UPC

Enginyeria de Sistemes de Telecomunicació
Enginyeria Telemàtica
EETAC

Continguts

5.1 La unitat imaginària

Conjunts de nombres

- Els conjunts numèrics estudiats fins ara són $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$, que satisfan:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

- Cadascun d'ells completa l'anterior, en el sentit que podem fer operacions que no tenien solució en el conjunt precedent:
  - A $\mathbb{Z}$ podem calcular $1-2$, cosa que no podem fer a $\mathbb{N}$.
  - A $\mathbb{Q}$ podem calcular (treballar amb) $\frac{3}{2}$, cosa que no podem fer a $\mathbb{Z}$.
  - A $\mathbb{R}$ podem calcular (treballar amb) $\sqrt{2}$, cosa que no podem fer a $\mathbb{Q}$.
- Fins ara hem treballat al conjunt $\mathbb{R}$.

A $\mathbb{R}$ no podem calcular arrels quadrades de nombres negatius!!!

Arrels quadrades de nombres negatius: la unitat imaginària

- Observem:
$$\sqrt{-2} = \sqrt{(-1)\cdot 2} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{2}$$
i el mateix raonament serviria per a qualsevol altre nombre negatiu.
- Per tant, si coneixem
$$\sqrt{-1},$$
podem calcular l'arrel quadrada de qualsevol nombre negatiu.
- **Definició.** Anomenem l'arrel quadrada de -1 unitat imaginària. La representem amb la lletra $\mathtt{j}$. Així:
$$\mathtt{j} = \sqrt{-1}$$
- De la definició es dedueix que: $\mathtt{j}^2 = -1$

Utilitzant $\mathtt{j}$, totes les equacions de segon grau tenen solució.

Solucions d'equacions de segon grau

Exemple

- Fins ara, l'equació
$$x^2 - 4x + 13 = 0$$
no té solucions (reals). Les solucions haurien de ser
$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-52}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2},$$
que no existeixen perquè a $\mathbb{R}$ no existeix l'arrel d'un nombre negatiu.
- A partir d'ara, podem resoldre l'equació (a $\mathbb{C}$):

$$x^2 - 4x + 13 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = 2 \pm 3 \cdot \sqrt{-1} \Rightarrow x = 2 \pm 3 \cdot \mathrm{j}$$

Solucions d'equacions de segon grau

Exercici 1. Resoldre les equacions següents, usant la unitat imaginària:

1. $x^2 = -1$
2. $x^2 = -4$
3. $x^2 + x + 1 = 0$

5.2 Forma binòmica d'un complex

Un nombre complex en forma binòmica és un nombre de la forma

$$z = a + b \cdot \mathtt{j}, \quad \text{amb } a, b \in \mathbb{R}$$

- a és la part real de z: $Re(z) = a$.
- b és la part imaginària de z: $Im(z) = b$.
- Si $Re(z) = 0$, aleshores $z = b \cdot \mathtt{j}$. Diem que z és imaginari pur.
- Si $Im(z) = 0$, aleshores $z = a$ i z és real.
- Donat $z = a + b \cdot \mathtt{j}$, el conjugat de z és

$$\bar{z} = a - b \cdot \mathtt{j}$$

Escrivim $\mathbb{C}$ per designar el conjunt dels nombres complexos Es compleix

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Suma, producte i divisió

- Donats $z_1 = a + b \cdot \mathtt{j}$ i $z_2 = c + d \cdot \mathtt{j}$:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a+c) + (b+d) \cdot \mathtt{j} \\ z_1 \cdot z_2 &= (ac - bd) + (ad + bc) \cdot \mathtt{j} \end{aligned}$$

- Es compleix $z = a + b \cdot \mathtt{j} \Rightarrow z \cdot \bar{z} = (a + b \cdot \mathtt{j}) \cdot (a - b \cdot \mathtt{j}) = a^2 + b^2$.
- Donats $z_1 = a + b \cdot \mathtt{j}$ i $z_2 = c + d \cdot \mathtt{j}$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \cdots = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot \mathtt{j}$$

Dividir dos nombres complexos és, en realitat, racionalitzar un trencat.

Exercici 2. Donats $z_1 = 2 - 3\mathtt{j}$ i $z_2 = 5 + 4\mathtt{j}$, calcular $\frac{z_1}{z_2}$.

Potenciació

- Notem que:

$$\begin{array}{ll} \mathtt{j}^0 = 1 & \mathtt{j}^4 = \mathtt{j}^3 \cdot \mathtt{j} = -\mathtt{j} \cdot \mathtt{j} = -\mathtt{j}^2 = 1 = \mathtt{j}^0 \\ \mathtt{j}^1 = \mathtt{j} & \mathtt{j}^5 = \mathtt{j}^4 \cdot \mathtt{j}^1 = \mathtt{j}^1 = \mathtt{j} \\ \mathtt{j}^2 = -1 & \mathtt{j}^6 = \mathtt{j}^4 \cdot \mathtt{j}^2 = \mathtt{j}^2 = -1 \\ \mathtt{j}^3 = \mathtt{j}^2 \cdot \mathtt{j} = -1 \cdot \mathtt{j} = -\mathtt{j} & \mathtt{j}^7 = \mathtt{j}^4 \cdot \mathtt{j}^3 = \mathtt{j}^3 = -\mathtt{j} \quad \ldots \end{array}$$

- Per tant, donat $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathtt{j}^n = \mathtt{j}^r$$

  on r és el residu de dividir n entre 4.

- El càlcul de $(a + b \cdot \mathtt{j})^n$ per n petites ($n = 2, 3, 4$) es pot fer en forma binòmica. Per a n més grans és preferible usar una altra representació dels complexos.

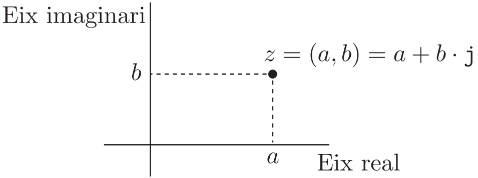
Exercici 3. Calcular:

$$\mathtt{j}^{51}, \quad (1 + 2\mathtt{j})^2, \quad (2 - 2\mathtt{j})^2$$

5.3 El pla complex

Representació gràfica de nombres complexos

- Els nombres reals es representen a la recta real, $\mathbb{R}$.
- Al nombre complex complex $z = a + b \cdot \mathtt{j}$ li podem fer correspondre el punt del pla de coordenades cartesianes (a, b).



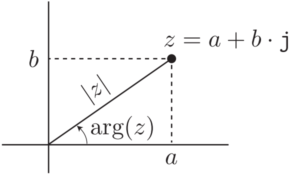
- El conjunt de tots els complexos, representats com a punts del pla, rep el nom de pla complex, i s'identifica amb $\mathbb{R}^2$.

Exercici 4. Representar en el pla complex:

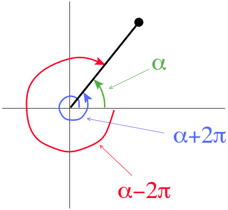
$$1 + \mathtt{j}, \quad 2 - 2\mathtt{j}, \quad \mathtt{j}, \quad -4\mathtt{j}, \quad -1 + \sqrt{3}\mathtt{j}, \quad -3$$

Mòdul i argument d'un complex $z = a + b \cdot \mathrm{j}$

- $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ és el mòdul de z.
- $\arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ $(+\pi$ si $a < 0)$ és l'argument de z.



- L'argument d'un complex no és únic: $\arg(z) \equiv \arg(z) + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- L'argument principal de z és el que compleix $0 \leq \arg(z) < 2\pi$.



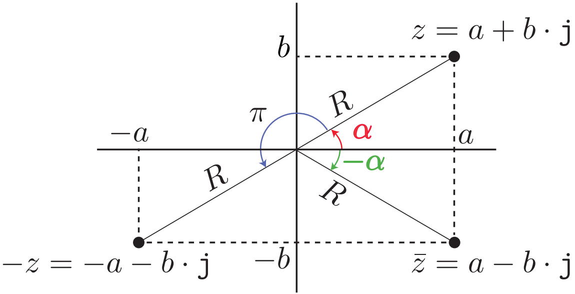
Propietats

- z i $\bar{z}$ són simètrics respecte de l'eix real:

$$|\bar{z}| = |z| \quad \text{i} \quad \arg(\bar{z}) = -\arg(z)$$

- z i $-z$ són simètrics respecte de l'origen de coordenades:

$$|-z| = |z| \quad \text{i} \quad \arg(-z) = \arg(z) + \pi$$



Exercicis

- **Exercici 5.** Trobar el mòdul i l'argument de:
$$1+\mathrm{j},\quad 2-2\mathrm{j},\quad \mathrm{j},\quad -4\mathrm{j},\quad -1+\sqrt{3}\mathrm{j},\quad -3$$
- **Exercici 6.** Expressar en forma binòmica, representar gràficament i trobar el mòdul i l'argument:
$$\frac{1+\mathrm{j}}{1-\mathrm{j}},\quad \frac{2-\mathrm{j}\sqrt{3}}{1+\mathrm{j}},\quad \frac{(1+\mathrm{j})^2}{1-\mathrm{j}},\quad (1-\mathrm{j})^4$$

Fórmula d'Euler i forma exponencial

- Fórmula d'Euler. Nombre complex de mòdul 1 i argument α:

$$e^{\alpha \mathtt{j}} = \cos\alpha + \mathtt{j} \cdot \sin\alpha$$

- Forma exponencial d'un nombre complex
  Si $z = a + b \cdot \mathtt{j}$, amb $|z| = R$ i $\arg(z) = \alpha$:

$$z = a + b \cdot \mathtt{j} = R \cdot (\cos\alpha + \mathtt{j} \cdot \sin\alpha) = R \cdot e^{\alpha \mathtt{j}}$$

Forma binòmica		Forma exponencial
$a + b \cdot \mathtt{j}$	$\rightarrow$	$R = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\alpha = \arctan\frac{b}{a}\,(+\pi,$ si $a < 0)$
$a = R \cdot \cos\alpha$ $b = R \cdot \sin\alpha$	$\leftarrow$	$R \cdot e^{\alpha \mathtt{j}}$

Producte, divisió i potenciació

- Producte i divisió

$$z_1 = R_1 \cdot e^{\alpha_1 \mathtt{j}},\ z_2 = R_2 \cdot e^{\alpha_2 \mathtt{j}} \Rightarrow \begin{cases} z_1 \cdot z_2 = R_1 \cdot R_2 \cdot e^{(\alpha_1+\alpha_2)\mathtt{j}} \\ \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{R_1}{R_2} \cdot e^{(\alpha_1-\alpha_2)\mathtt{j}} \end{cases}$$

- Potenciació

$$z = R \cdot e^{\alpha \mathtt{j}} \Rightarrow z^n = R^n \cdot e^{n\alpha \mathtt{j}}$$

Es dedueix directament de les propietats de l'exponencial!!!

Exercicis

- **Exercici 7.** Demostrar que $e^{\mathrm{j}\pi} + 1 = 0$.
- **Exercici 8.** Representar gràficament i trobar el mòdul i l'argument:
$$e^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}, \quad \overline{e^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}}, \quad -\mathrm{j}e^{\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}, \quad -2e^{\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}$$
- **Exercici 9.** Donar el resultat en forma binòmica i en forma exponencial:
$$5\mathrm{j}^{23} + 2\mathrm{j}^{13}, \quad (1+\mathrm{j})^{53}, \quad \frac{1+2\mathrm{j}}{2-\mathrm{j}} \cdot e^{\frac{\pi}{3}\mathrm{j}}, \quad \frac{2e^{-\frac{\pi}{3}\mathrm{j}}(1-\mathrm{j})^2}{(1+j)e^{\frac{\pi}{6}\mathrm{j}}}$$

Forma exponencial i relacions trigonomètriques

A partir de la forma exponencial del nombres complexos i de les propietats de les potències, es poden deduir analíticament diferents relacions trigonomètriques

- $e^{(\alpha+\beta)\mathtt{j}} = e^{\alpha\mathtt{j}} \cdot e^{\beta\mathtt{j}} \Rightarrow$

$$\cos(\alpha+\beta) + \mathtt{j}\sin(\alpha+\beta) = (\cos\alpha + \mathtt{j}\sin\alpha)\cdot(\cos\beta + \mathtt{j}\sin\beta) =$$

$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + \mathtt{j}(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$$

- $e^{n\alpha\mathtt{j}} = (e^{\alpha\mathtt{j}})^n \Rightarrow$

$$\cos n\alpha + \mathtt{j}\sin n\alpha = (\cos\alpha + \mathtt{j}\sin\alpha)^n$$

- $e^{\alpha\mathtt{j}} = \cos\alpha + \mathtt{j}\sin\alpha$, $e^{-\alpha\mathtt{j}} = \cos\alpha - \mathtt{j}\sin\alpha \Rightarrow$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}\left(e^{\alpha\mathtt{j}} + e^{-\alpha\mathtt{j}}\right),\ \sin\alpha = \frac{1}{2\mathtt{j}}\left(e^{\alpha\mathtt{j}} - e^{-\alpha\mathtt{j}}\right)$$

Exercicis

- **Exercici 10.** Demostrar:

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

- **Exercici 11.** Utilitzant l'exercici anterior i les raons trigonomètriques de l'angle $\frac{\pi}{6}$, trobeu les raons trigonomètriques de l'angle $\frac{\pi}{12}$.

5.5 Arrels n-èsimes d'un complex

Si $z = R \cdot e^{\alpha \mathtt{j}}$, volem calcular $\sqrt[n]{z}$, amb $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$.

- Volem trobar els nombres complexos $w = S \cdot e^{\beta \mathtt{j}}$ que compleixen $w = \sqrt[n]{z}$, és a dir, $w^n = z$.
- Observem:

$$w = \sqrt[n]{z} \Longleftrightarrow w^n = z \Longleftrightarrow (S \cdot e^{\alpha \mathtt{j}})^n = R \cdot e^{\alpha \mathtt{j}} \Longleftrightarrow S^n \cdot e^{n\beta \mathtt{j}} = R \cdot e^{\alpha \mathtt{j}}$$

- A més: $\alpha = \arg(z) \equiv \arg(z) + k \cdot 2\pi = \alpha + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Així,

$$w = \sqrt[n]{z} \Longleftrightarrow S^n \cdot e^{n\beta_k \mathtt{j}} = R \cdot e^{(\alpha + k \cdot 2\pi)\mathtt{j}}$$

- Per tant, les arrels buscades són els nombres complexos $S \cdot e^{\beta \mathtt{j}}$ tals que

$$S^n = R \Longleftrightarrow S = \sqrt[n]{R}$$

$$n\beta_k = \alpha + k \cdot 2\pi \Longleftrightarrow \beta_k = \frac{\alpha + k \cdot 2\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Hi ha un nombre infinit de possibles valors per a k!!!

Observació

Fem variar k en $\mathbb{Z}$ per a trobar tots els possibles valors de β_k.

- Per a $k = 0, \ldots, n-1$, tots els β_k donen valors de w diferents:

$$\beta_0 = \frac{\alpha}{n}$$
$$\beta_1 = \frac{\alpha + 2\pi}{n} = \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}$$
$$\ldots$$
$$\beta_{n-1} = \frac{\alpha + (n-1)\cdot 2\pi}{n} = \frac{\alpha}{n} + \frac{(n-1)\cdot 2\pi}{n}$$

- Altres valors de k donen β_k diferents però no nous valors de w.

$$\beta_n = \frac{\alpha + n\cdot 2\pi}{n} = \frac{\alpha}{n} + 2\pi = \beta_0 + 2\pi$$
$$\beta_{n+1} = \frac{\alpha + (n+1)\cdot 2\pi}{n} = \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n} + 2\pi = \beta_1 + 2\pi$$
$$\ldots$$

Només $0 \leq k < n$ donen valors de l'arrel diferents!!!

Càlcul d'arrels n-èsimes

Si $z = R \cdot e^{\alpha \mathtt{j}}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, aleshores

$$w^n = z \Rightarrow w = \sqrt[n]{R} \cdot e^{\frac{\alpha + k \cdot 2\pi}{n} \mathtt{j}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

- Si $z \neq 0$, z té n arrels n-èsimes diferents.
- Escrivim:

$$\sqrt[n]{z} = \left\{ \sqrt[n]{R} \cdot e^{\frac{\alpha + k \cdot 2\pi}{n} \mathtt{j}} \right\}_{k=0,1,\ldots,n-1} = \begin{cases} w_0 = \sqrt[n]{R} \cdot e^{\frac{\alpha}{n} \mathtt{j}} \\ w_1 = \sqrt[n]{R} \cdot e^{\frac{\alpha + 2\pi}{n} \mathtt{j}} \\ \cdots \\ w_{n-1} = \sqrt[n]{R} \cdot e^{\frac{\alpha + (n-1) 2\pi}{n} \mathtt{j}} \end{cases}$$

Propietats

$$\sqrt[n]{Re^{\alpha \mathrm{j}}} = \sqrt[n]{R} e^{\frac{\alpha + k\cdot 2\pi}{n}\mathrm{j}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

- Totes les arrels tenen el mateix mòdul, $\sqrt[n]{R}$.
- La diferència angular entre dues arrels consecutives és constant:

$$\beta_k - \beta_{k-1} = \frac{2\pi}{n}$$

- Les arrels n-èsimes d'un nombre complex es troben en els vèrtexs d'un polígon regular de n costats, amb centre a l'origen de coordenades.

Exercici 12. Calcular i representar gràficament:

$$\sqrt[6]{1}, \quad \sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}\mathrm{j}}$$

Exercici 13. Doneu en forma binòmica i exponencial les arrels cúbiques de

$$\frac{1+\sqrt{2}\mathrm{j}}{1-\sqrt{2}\mathrm{j}}$$