La transformada de Laplace

J. Luis A. Yebra, 2004
Traducció: Cristina Dalfó
Revisió febrer 2011: Cristina Dalfó, Margarida Espona, Miquel Rius

La transformada de Laplace és un mètode directe i potent de resolució de problemes d'equacions i sistemes d'equacions diferencials lineals amb coeficients constants i uns valors inicials donats.

L'ús de la transformada de Laplace en aquest context, i en particular la seva aplicació en problemes d'enginyeria elèctrica, no va començar fins a la dècada de 1930 —un segle i mig després que el matemàtic, astrònom i físic francès Pierre-Simon Laplace introduís la seva transformada— com a conseqüència dels treballs de Van der Pol i Doetsch, que va fer abandonar el càlcul operacional de Heaviside d'aplicació més restringida i incòmoda i mancada aleshores d'una justificació adequada.

Presentem el mètode de la transformada de Laplace simplement com un artifici matemàtic que ens permet transformar una equació diferencial, conjuntament amb les condicions inicials adequades, en una equació algebraica. Així, el seu ús pot assimilar-se al dels logaritmes cosa que ens permet, per exemple, reduir el problema de calcular el producte de dos nombres al problema més simple de sumar els seus logaritmes. En tots dos casos, hem de fer primer una transformació i, posteriorment, la transformació inversa.

En particular, estudiarem l'aplicació al cas d'equacions diferencials amb termes discontinus, en la qual la transformada de Laplace és especialment útil.

1 La transformada de Laplace

Comencem definint formalment la transformada de Laplace d'una funció f real.

Definició 1 *Sigui $f(t)$ una funció real definida per a $0 \le t < \infty$. La* **transformada de Laplace** *de $f(t)$, que denotem per $\mathcal{L}\{f(t)\}$ o per $F(s)$, és la funció de variable real s:*

$$\boxed{F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt} \qquad \left(= \lim_{A\to+\infty} \int_0^A e^{-st} f(t)\, dt\right). \tag{1}$$

Notació: Segons el context, utilitzarem alguna de les notacions següents:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}, \qquad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}, \qquad f(t) \leftrightarrow F(s).$$

Respectivament, diem que $F(s)$ és la *transformada de Laplace* de $f(t)$, que $f(t)$ és la *transformada inversa* o *antitransformada* de $F(s)$, o que $f(t)$ i $F(s)$ són una parella "funció - transformada". (En el Teorema 2 veurem que l'antitransformada és única en certes condicions.)

Exemple 1.1. $f(t) = 1$

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}\, dt = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A e^{-st}\, dt = \lim_{A\to+\infty} \frac{1-e^{-sA}}{s} = \frac{1}{s},$$

si $s > 0$, i sense solució si $s \leq 0$.

D'ara endavant, escriurem directament $\int_0^\infty$ en lloc de $\lim_{A\to+\infty} \int_0^A$.

Exemple 1.2. $f(t) = t$. Per a $s > 0$, integrant per parts obtenim:

$$\mathcal{L}\{t\} = \int_0^\infty te^{-st}\, dt = -t\frac{e^{-st}}{s}\bigg|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\, dt = 0 + \frac{1}{s}\frac{1}{s} = \frac{1}{s^2} \qquad (s > 0).$$

Exemple 1.3. $f(t) = t^n$. De nou, per a $s > 0$, integrant per parts trobem:

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \int_0^\infty t^n e^{-st}\, dt = -t^n\frac{e^{-st}}{s}\bigg|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty nt^{n-1}e^{-st}\, dt = \frac{n}{s}\,\mathcal{L}\{t^{n-1}\}$$

i iterant arribem a

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n}{s}\,\mathcal{L}\{t^{n-1}\} = \frac{n}{s}\frac{n-1}{s}\,\mathcal{L}\{t^{n-2}\} = \cdots = \frac{n!}{s^n}\,\mathcal{L}\{1\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad (s > 0).$$

Exemple 1.4. $f(t) = e^{\alpha t}$

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{\alpha t}\, dt = \int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t}\, dt = \frac{1}{s-\alpha} \qquad (s > \alpha).$$

Exemple 1.5. $f(t) = \cos\beta t$ i $g(t) = \sin\beta t$.

Podem determinar les seves transformades directament com en els exemples anteriors (feu-ho com a exercici). Tanmateix, resulta més còmode utilitzar la fórmula d'Euler, $e^{j\beta t} = \cos\beta t + j\sin\beta t$, si acceptem que el resultat de l'exemple anterior és vàlid quan en lloc d'una constant real α tenim un nombre complex $\alpha + j\beta$:

$$\mathcal{L}\{e^{(\alpha+j\beta)t}\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{(\alpha+j\beta)t}\, dt = \frac{1}{s-\alpha-j\beta} \qquad (s > \alpha). \tag{2}$$

Observem que això significa que *ampliem la definició de la transformada de Laplace al cas de funcions complexes de variable t real*. En particular, per a la funció $e^{j\beta t} = \cos\beta t + j\sin\beta t$ obtenim

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\cos\beta t\} + j\mathcal{L}\{\sin\beta t\} &= \int_0^\infty e^{-st}\cos\beta t\, dt + j\int_0^\infty e^{-st}\sin\beta t\, dt \\
&= \int_0^\infty e^{-st}(\cos\beta t + j\sin\beta t)\, dt \\
&= \int_0^\infty e^{-st}e^{j\beta t}\, dt = \frac{1}{s-j\beta} = \frac{s+j\beta}{s^2+\beta^2} \qquad (s > 0).
\end{aligned}$$

Igualant les parts real i imaginària arribem a

$$\mathcal{L}\{\cos\beta t\} = \frac{s}{s^2+\beta^2}, \qquad \mathcal{L}\{\sin\beta t\} = \frac{\beta}{s^2+\beta^2}, \qquad (s>0).$$

Exemple 1.6. La funció $f(t)=e^{t^2}$ no admet cap transformada de Laplace, ja que per a qualsevol s, quan $A\to+\infty$,

$$\int_0^A e^{-st}e^{t^2}\,dt \longrightarrow \infty.$$

La integral $\int_0^\infty$ no existeix per a cap valor de s. En efecte, fixat s, tenim $e^{-st}e^{t^2}=e^{t(t-s)}>e^t$ per a $t>s+1$, i per tant, per a $A>s+1$

$$\int_0^A e^{-st}e^{t^2}\,dt > \int_{s+1}^A e^t\,dt = e^A - e^{s+1} \longrightarrow \infty$$

quan $A\to+\infty$.

Com podem observar en aquests exemples, la transformada de Laplace d'una funció $f(t)$ pot no existir per a alguns valors de $s\in\mathbb{R}$, i fins i tot, com en el darrer exemple, pot passar que no existeixi per a cap valor de s.

Com que la transformada de Laplace està definida mitjançant una integral impròpia, per assegurar l'existència de la transformada de Laplace primer hem d'assegurar l'existència per a cada $A>0$ de la integral $\int_0^A e^{-st}f(t)\,dt$. Per a això només cal que la funció f a cada interval finit $0\le t\le A$ sigui contínua a trossos. Després necessitem la convergència de la integral en l'interval $(0,\infty)$, és a dir, l'existència del límit

$$\lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-st}f(t)\,dt$$

per a certs valors de s que constituiran aleshores el domini de definició de la funció transformada F. Anem a veure que si f és una *funció d'ordre exponencial* γ, és a dir, si existeix una constant M per a la qual

$$|f(t)|\le Me^{\gamma t}, \qquad 0\le t<\infty, \tag{3}$$

la integral convergeix per a tot $s>\gamma$. En efecte, aleshores tindrem

$$|e^{-st}f(t)| = e^{-st}|f(t)| \le Me^{-st}e^{\gamma t} = Me^{-(s-\gamma)t}, \qquad 0\le t<\infty,$$

i, per tant, per a $s>\gamma$,

$$\int_0^A |e^{-st}f(t)|\,dt \le \int_0^A Me^{-(s-\gamma)t}\,dt \le M\int_0^\infty e^{-(s-\gamma)t}\,dt = \frac{M}{s-\gamma}. \tag{4}$$

Aleshores, la integral $\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$ és absolutament convergent i, per tant, convergent. A més, a partir del càlcul anterior obtenim que per a $s>\gamma$

$$|F(s)| = \left|\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt\right| \le \int_0^\infty |e^{-st}f(t)|\,dt \le M\int_0^\infty e^{-(s-\gamma)t}\,dt = \frac{M}{s-\gamma}$$

i, d'aquí,

$$\lim_{s\to+\infty} F(s) = 0. \tag{5}$$

Acabem de demostrar el resultat següent:

Teorema 1 *(d'existència de la transformada de Laplace): Donada una funció $f(t)$, $0 \leq t < \infty$, si*
(i) f és contínua a trossos a cada interval finit,
(ii) f és d'ordre exponencial γ ($\Leftrightarrow |f(t)| \leq Me^{\gamma t}$, $0 \leq t < \infty$),
aleshores la seva transformada de Laplace existeix per a $s > \gamma$.

Dels exemples anteriors, $e^{\alpha t}$ és òbviament d'ordre exponencial α i la seva transformada existeix per a $s > \alpha$, mentre que $\cos t$ és d'ordre exponencial 0, ja que $|\cos t| \leq 1 = 1e^{0t}$, i la seva transformada existeix per a $s > 0$.

Anomenarem **funcions admissibles** a les funcions que satisfan les condicions (i) i (ii) (per a algun γ). La classe de les funcions admissibles és suficientment àmplia per a la majoria de les aplicacions. Per exemple, inclouen els polinomis i les funcions periòdiques contínues a trossos en cada període. A més, la suma i el producte de funcions admissibles són funcions admissibles.

D'ara endavant, per a una funció admissible f d'ordre exponencial γ considerarem $F(s)$ definida només per a $s > \gamma$ sense explicitar-ho. A més, com que $|e^{-st}f(t)| \leq Me^{-(s-\gamma)t}$, per a $s > \gamma$ tenim

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-st} f(t) = 0, \tag{6}$$

cosa que utilitzarem sovint.

2 Primeres propietats i aplicació a les equacions diferencials

Tal com suggereix l'expressió $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, $\mathcal{L}$ és un operador que transforma "funcions de t" en "funcions de s". A més, és un operador lineal:

Propietat 1 *(de linealitat). Si $f(t)$ i $g(t)$ són funcions admissibles i a i b són dues constants, la funció $af(t) + bg(t)$ també és admissible i*

$$\boxed{\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\,\mathcal{L}\{f(t)\} + b\,\mathcal{L}\{g(t)\}.} \tag{7}$$

Demostració: En efecte,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}(af(t) + bg(t))\,dt \\
&= a\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt + b\int_0^\infty e^{-st} g(t)\,dt \\
&= a\,\mathcal{L}\{f(t)\} + b\,\mathcal{L}\{g(t)\}.
\end{aligned}$$

La utilitat de la transformada de Laplace en la resolució d'equacions diferencials es basa en la següent propietat de derivació, que se sol resumir (de manera inexacta) dient que "derivar una funció $f(t)$ equival a multiplicar la seva transformada $F(s)$ per s". Tenint en compte que si $f'(t)$ és admissible aleshores $f(t)$ també ho és, tenim:

Propietat 2 *(de derivació). Si $f'(t)$ és admissible*

$$\boxed{\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) = sF(s) - f(0).} \tag{8}$$

En general, si $f^{(n)}(t)$ és admissible, aleshores

$$\boxed{\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \cdots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).} \tag{9}$$

Demostració: Integrant per parts i considerant (6) tenim

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\, dt = e^{-st} f(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = -f(0) + sF(s).$$

Per a $f''(t)$ tenim

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s\mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0) = s\left(s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)\right) - f'(0) = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0).$$

En general, per inducció,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} &= s\mathcal{L}\{f^{(n-1)}(t)\} - f^{(n-1)}(0) \\
&= s\left(s^{n-1}F(s) - s^{n-2}f(0) - \cdots - f^{(n-2)}(0)\right) - f^{(n-1)}(0) \\
&= s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \cdots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).
\end{aligned}$$

Observació. Escrivim $f(0)$ (i anàlogament $f'(0)$, etc.) suposant que $f(t)$ està definida per a $t = 0$. De no ser així, com que f és admissible i per tant contínua a trossos, ha d'existir $f(0^+) = \lim_{t\to 0} f(t)$. Aleshores tenim

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^\infty e^{-st} f'(t)\, dt = \lim_{\epsilon\to 0}\left(e^{-st} f(t)\Big|_\epsilon^\infty + s\int_\epsilon^\infty e^{-st} f(t)\, dt\right) = -f(0^+) + sF(s).$$

Utilitzant únicament les dues propietats anteriors ja podem resoldre problemes d'equacions diferencials lineals amb coeficients constants i valors inicials.

Exemple 2.1. Trobeu la solució del problema de valor inicial

$$y'' + y = 5e^{2t}, \qquad y(0) = 2, \qquad y'(0) = 1.$$

Si designem $\mathcal{L}\{y(t)\}$ per $Y(s)$, tenim

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y'' + y\} &= \mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y\} = s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) \\
&= (s^2+1)Y(s) - 2s - 1, \\
\mathcal{L}\{5e^{2t}\} &= \frac{5}{s-2}.
\end{aligned}$$

Igualant les dues transformades obtenim $s^2Y(s) - 2s - 1 + Y(s) = 5/(s-2)$, d'on podem aïllar $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+1}\left(\frac{5}{s-2} + 2s + 1\right) = \frac{2s^2 - 3s + 3}{(s^2+1)(s-2)}.$$

Ara només cal trobar quina funció té aquesta transformada $Y(s)$. Si descomponem la funció racional $Y(s)$ en fraccions simples obtenim (veurem aquest procés amb detall a la secció 4):

$$Y(s) = \frac{2s^2 - 3s + 3}{(s^2+1)(s-2)} = \frac{s-1}{s^2+1} + \frac{1}{s-2} = \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s-2}.$$

En els termes de la dreta de l'equació podem reconèixer les transformades següents:

$$\frac{s}{s^2+1} = \mathcal{L}\{\cos t\}, \qquad \frac{1}{s^2+1} = \mathcal{L}\{\sin t\}, \qquad \frac{1}{s-2} = \mathcal{L}\{e^{2t}\}.$$

Amb la propietat de linealitat obtenim

$$Y(s) = \mathcal{L}\{\cos t - \sin t + e^{2t}\},$$

amb el que arribem a la conclusió que

$$y(t) = \cos t - \sin t + e^{2t},$$

tenint en compte que si les transformades de dues funcions coincideixen, aleshores les funcions també han de coincidir. Això és així com a conseqüència del resultat següent (la demostració del qual ometem).

Teorema 2 *(de la unicitat de la transformada de Laplace). Si f i g són funcions admissibles i $F(s) = G(s)$ per a tot s prou gran, aleshores $f(t) = g(t)$ en cada punt t on les dues funcions són contínues. En particular, si f i g són contínues per a tot $t \geq 0$, $f \equiv g$.*

Gràcies a aquest resultat podrem invertir la transformada de Laplace, és a dir, podrem determinar $f(t)$ a partir de $F(s)$, en molts casos (en particular, si $F(s)$ és una funció racional, és a dir, el quocient de dos polinomis: $F(s) = P(s)/Q(s)$), sense que haguem de recórrer a una fórmula general d'inversió que requereix integració en el camp complex. Aleshores només caldrà descompondre la funció donada $F(s)$ en sumands que siguin transformades de funcions conegudes com hem fet en l'exemple anterior. Això requereix saber descompondre en fraccions simples qualsevol funció racional, cosa que estudiarem més endavant, i de disposar d'una llista adequada de parelles $f(t) \leftrightarrow F(s)$. Per facilitar aquestes tasques desenvolupem les propietats següents.

3 Altres propietats de la transformada de Laplace

Suposarem sempre que $f(t)$ és una funció admissible amb transformada $F(s)$.

Propietat 3 *(d'integració):*

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\,du\right\} = \frac{F(s)}{s}.} \tag{10}$$

Demostració: Amb $g(t) = \displaystyle\int_0^t f(u)\,du$ tenim que $g'(t) = f(t),\ g(0) = 0$. Utilitzant la propietat de derivació obtenim

$$F(s) = \mathcal{L}\{g'(t)\} = s\mathcal{L}\{g(t)\} = s\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\ du\right\}.$$

Propietat 4 *(de multiplicació per t):*

$$\boxed{\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds}F(s).} \tag{11}$$

Demostració:

$$\frac{d}{ds}F(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-st}(-t)f(t)\,dt = -\mathcal{L}\{tf(t)\}.$$

Propietat 5 *(de divisió per t). Si $f(t)/t$ és admissible, aleshores*

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u)\,du.} \tag{12}$$

Demostració: Amb $g(t) = f(t)/t$, tenim que $f(t) = tg(t)$. D'acord amb la propietat anterior $F(s) = -\frac{d}{ds}G(s)$, on $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$. Integrant, obtenim

$$\begin{aligned}\int_s^\infty F(u)\,du &= \lim_{A\to+\infty}\int_s^A F(u)\,du = \lim_{A\to+\infty}\int_s^A -\frac{d}{du}G(u)\,du \\ &= \lim_{A\to+\infty}(G(s)-G(A)) = G(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\},\end{aligned}$$

on hem utilitzat (5): $\lim_{A\to+\infty} G(A) = 0$.

Observem que les propietats 4 i 5 són, en un cert sentit, recíproques de les propietats 2 i 3. El mateix passa amb les propietats 6 i 7, les quals de vegades són anomenades propietats de translació.

Propietat 6 *(de multiplicació per $e^{\alpha t}$):*

$$\boxed{\mathcal{L}\{e^{\alpha t}f(t)\} = F(s-\alpha).} \tag{13}$$

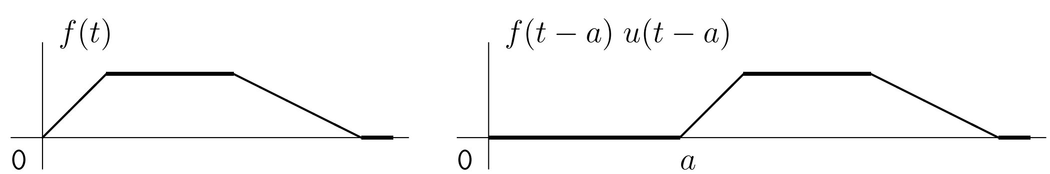
Demostració:

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t}f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{\alpha t}f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t}f(t)\,dt = F(s-\alpha).$$

Amb la notació $f(t-a)\,u(t-a)$, que és justificarà més endavant, tenim la propietat següent.

Propietat 7 *(de translació).*

$$f(t-a)u(t-a) = \begin{cases} f(t-a) & si\ t \geq a \\ 0 & si\ t < a \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-sa}F(s).} \tag{14}$$



Demostració: Fent el canvi $t - a = \tau$ (o $t = \tau + a$) en la integral obtenim

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\,u(t-a)\} = \int_a^\infty e^{-st}f(t-a)\,dt = \int_0^\infty e^{-s\tau}e^{-sa}f(\tau)\,d\tau = e^{-sa}F(s).$$

Propietat 8 *(de canvi d'escala). Per a $a > 0$,*

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right).} \tag{15}$$

Demostració: Fent el canvi $at = \tau$ obtenim

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(at)\, dt = \int_0^\infty e^{-s\tau/a} f(\tau)\, \frac{d\tau}{a} = \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-(s/a)\tau} f(\tau)\, d\tau = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right).$$

Si f és una funció periòdica de període T, $f(t+T) = f(t)$, la propietat següent permet calcular la seva transformada integrant en un únic període.

Propietat 9 *(per a funcions periòdiques). Si $f(t+T) = f(t)$,*

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt.} \tag{16}$$

Demostració:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t)\, dt.$$

Fent el canvi $t = T + \tau$ en la segona integral obtenim

$$\int_T^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-s(T+\tau)} f(T+\tau)\, d\tau = e^{-sT} \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)\, d\tau = e^{-sT} F(s)$$

i, per tant,

$$F(s) = \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt + e^{-sT} F(s)$$

d'on només cal aïllar $F(s)$.

Finalment, anem a veure la propietat que relaciona els comportaments de $f(t)$ i $F(s)$ en 0 i ∞, i de la qual l'apartat a) ja l'hem obtingut a (5) per a qualsevol funció admissible.

Propietat 10 *(dels valors inicial i final).*

a) $$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0.$$

A més, si $f'(t)$ és admissible i existeixen els límits indicats, tenim

b) $$f(0^+) = \lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to+\infty} sF(s). \tag{17}$$

c) $$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s). \tag{18}$$

Demostració: Tant b) com c) són conseqüència de la propietat de derivació. A partir de la formulació

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0^+) = sF(s) - \lim_{t\to 0} f(t)$$

i, com que $f'(t)$ és admissible es compleix que $\mathcal{L}\{f'(t)\} \to 0$ quan $s \to +\infty$, obtenim b). D'altra banda, a partir de la formulació

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A e^{-st} f'(t)\, dt = sF(s) - f(0),$$

fent $s \to 0$ els termes de la dreta, obtenim $\lim_{s\to 0} sF(s) - f(0)$, mentre que en l'expressió del mig obtenim

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 0}\left[\lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-st} f'(t)\, dt\right] &= \lim_{A\to+\infty}\left[\lim_{s\to 0}\int_0^A e^{-st} f'(t)\, dt\right] = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A f'(t)\, dt \\
&= \lim_{A\to+\infty} f(A) - f(0) = \lim_{t\to+\infty} f(t) - f(0).
\end{aligned}$$

De la igualtat dels dos límits arribem a c). (En el darrer desenvolupament hem utilitzat que existeix $\lim_{t\to+\infty} f(t)$ i també que és possible intercanviar l'ordre dels límits quan $A \to +\infty$ i quan $s \to 0$ perquè $F(s)$ està definida en un entorn de $s = 0$.)

A la taula A hem resumit aquestes propietats, mentre que la taula B conté una llista de les funcions més usuals amb les seves corresponents transformades. A les dues taules hi ha resultats que es deduiran posteriorment. Les sis primeres parelles funció-transformada havien estat obtinguts en els exemples inicials. A continuació, obtindrem les cinc parelles següents amb l'ús de les propietats anteriors.

A: Propietats de la transformada de Laplace

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

1. Linealitat: $\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}$.
2. Derivació: $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0), \mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$,
   $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$.
3. Integració: $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\, du\right\} = \dfrac{F(s)}{s}$.
4. Multiplicació per t: $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\dfrac{d}{ds}F(s)$.
5. Divisió per t: $\mathcal{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u)\, du$.
6. Multiplicació per $e^{\alpha t}$: $\mathcal{L}\{e^{\alpha t}f(t)\} = F(s-\alpha)$.
7. Translació: $\mathcal{L}\{f(t-a)\, u(t-a)\} = e^{-as}F(s)$.
8. Canvi d'escala: $\mathcal{L}\{f(at)\} = \dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{s}{a}\right) \qquad (a > 0)$.
9. Funcions periòdiques: $\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt$.
10. Valors inicial i final: a) $\lim\limits_{s\to+\infty} F(s) = 0$.
    b) $f(0^+) = \lim\limits_{t\to 0} f(t) = \lim\limits_{s\to+\infty} sF(s)$. c) $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \lim\limits_{s\to 0} sF(s)$.
11. Producte de convolució:

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)g(t-u)\, du\right\} = F(s)G(s)$$

B: Taula de transformades de Laplace

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$	$e^{(\alpha+j\beta)t}$	$\frac{1}{s-\alpha-j\beta}$	$t\sin\beta t$	$\frac{2\beta s}{(s^2+\beta^2)^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$e^{\alpha t}\cos\beta t$	$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$	$e^{\alpha t}\sin\beta t$	$\frac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$	$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
$\cos\beta t$	$\frac{s}{s^2+\beta^2}$	$t^n e^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$	$\delta(t)$	1
$\sin\beta t$	$\frac{\beta}{s^2+\beta^2}$	$t\cos\beta t$	$\frac{s^2-\beta^2}{(s^2+\beta^2)^2}$	$\delta(t-a)$	e^{-as}

Exemple 3.1. Utilitzant la propietat 6

$$\mathcal{L}\{\cos\beta t\} = \frac{s}{s^2+\beta^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{L}\{e^{\alpha t}\cos\beta t\} = \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2},$$

$$\mathcal{L}\{\sin\beta t\} = \frac{\beta}{s^2+\beta^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{L}\{e^{\alpha t}\sin\beta t\} = \frac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2},$$

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{L}\{e^{\alpha t}\, t^n\} = \frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}.$$

Exemple 3.2. Utilitzant la propietat 4

$$\mathcal{L}\{t\cos\beta t\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{\cos\beta t\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+\beta^2}\right) = \frac{s^2-\beta^2}{(s^2+\beta^2)^2},$$

$$\mathcal{L}\{t\sin\beta t\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{\sin\beta t\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{\beta}{s^2+\beta^2}\right) = \frac{2\beta s}{(s^2+\beta^2)^2}.$$

Exemple 3.3. Naturalment, l'ús de les propietats anteriors pot reiterar-se. Així, per obtenir la transformada de la funció

$$\int_0^t e^{-u}\, u\sin u\, du$$

n'hi ha prou a aplicar successivament les propietats 4, 6 i 3 a partir de la transformada de la funció $f(t) = \sin t$:

$$\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\{t\sin t\} = \frac{2s}{(s^2+1)^2} \quad \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}\{e^{-t}t\sin t\} = \frac{2(s+1)}{((s+1)^2+1)^2} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\left\{\int_0^t e^{-u}\, u\sin u\, du\right\} = \frac{2(s+1)}{s((s+1)^2+1)^2}.$$

4 Transformada inversa a partir de la descomposició en fraccions simples

En general, per trobar la transformada inversa d'una funció $F(s)$ caldria considerar s com una variable complexa i integrar en el pla complex, però afortunadament en la majoria de les aplicacions la transformada de Laplace és una funció racional $F(s) = P(s)/Q(s)$. En aquest cas és fàcil invertir la transformada pel mètode de descomposició en fraccions simples, el qual desenvolupem a continuació.

Sigui $F(s) = P(s)/Q(s)$, on $P(s)$ i $Q(s)$ són polinomis en s amb coeficients reals i amb grau(P) <grau(Q) (recorddem la propietat 10 a): $\lim_{s\to+\infty} F(s) = 0$). En primer lloc, veurem la inversió de la transformada de Laplace a partir de la descomposició anomenada real— és la mateixa que es fa en el càlcul de primitives de funcions racionals— i, posteriorment, estudiarem la inversió a partir de la descomposició complexa.

Totes dues descomposicions es basen en la factorització del polinomi $Q(s)$, però mentre que en la descomposició real un terme com s^2-2s+2 ja no pot factoritzar-se perquè no té arrels reals, en la descomposició complexa el podem escriure com $(s-1-2j)(s-1+2j)$.

Recordem també que, d'acord amb el Teorema Fonamental de l'Àlgebra, un polinomi de grau n té exactament n arrels complexes (tenint en compte la seva multiplicitat), i que si $a=\alpha+j\beta$ és una arrel complexa d'un polinomi amb coeficients reals, aleshores $\overline{a}=\alpha-j\beta$ també és arrel i amb la mateixa multiplicitat que a.

4.1 Descomposició real

Considerem per separat el cas amb arrels reals i el corresponent a les arrels complexes de l'equació $Q(s)=0$.

1. Si α és una arrel real de $Q(s)$ amb multiplicitat m, en la descomposició en fraccions simples de $F(s)$ apareixen els termes
$$\frac{A_1}{s-\alpha}, \quad \frac{A_2}{(s-\alpha)^2}, \quad \ldots, \quad \frac{A_m}{(s-\alpha)^m}.$$
En general, tenim
$$\frac{A_k}{(s-\alpha)^k}=\frac{A_k}{(k-1)!}\frac{(k-1)!}{(s-\alpha)^k}=\mathcal{L}\left\{\frac{A_k}{(k-1)!}t^{k-1}e^{\alpha t}\right\} \qquad 1\le k\le m.$$

2. Si $\alpha+j\beta$ i $\alpha-j\beta$ són arrels complexes de $Q(s)$ amb multiplicitat m, obtenim els termes
$$\frac{A_1s+B_1}{(s-\alpha)^2+\beta^2}, \quad \frac{A_2s+B_2}{((s-\alpha)^2+\beta^2)^2}, \quad \ldots, \quad \frac{A_ms+B_m}{((s-\alpha)^2+\beta^2)^m}.$$
Per invertir el primer, si recordem que $\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\cos\beta t\}=\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$ i $\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\sin\beta t\}=\frac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$, obtenim
$$\frac{A_1s+B_1}{(s-\alpha)^2+\beta^2}=\frac{A_1(s-\alpha)+A_1\alpha+B_1}{(s-\alpha)^2+\beta^2}=\mathcal{L}\left\{A_1e^{\alpha t}\cos\beta t+\frac{A_1\alpha+B_1}{\beta}e^{\alpha t}\sin\beta t\right\}.$$
Anàlogament, podem fer el càlcul del terme següent de la descomposició a partir de $\mathcal{L}\{te^{\alpha t}\sin\beta t\}=\frac{2\beta(s-\alpha)}{((s-\alpha)^2+\beta^2)^2}$ i
$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\sin\beta t-\beta te^{\alpha t}\cos\beta t\}=\frac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}-\beta\frac{(s-\alpha)^2-\beta^2}{((s-\alpha)^2+\beta^2)^2}=\frac{2\beta^3}{((s-\alpha)^2+\beta^2)^2}.$$
El cas dels termes successius no el fem perquè les arrels complexes amb multiplicitat més gran que 1 apareixen amb menor freqüència en les aplicacions. A més, en aquest cas la inversió és més còmoda per altres mètodes que veurem més endavant (convolució) o fent la descomposició complexa.

Exemple 4.1. Sigui
$$F(s)=\frac{s^3-4s^2+4s-4}{s^4-4s^3+6s^2-4s}.$$
Descomponem el denominador: $Q(s)=s^4-4s^3+6s^2-4s=s(s-2)(s^2-2s+2)=s(s-2)((s-1)^2+1))$. La descomposició real de $F(s)$ és
$$\begin{aligned}\frac{s^3-4s^2+4s-4}{s^4-4s^3+6s^2-4s} &= \frac{A}{s}+\frac{B}{s-2}+\frac{Cs+D}{s^2-2s+2}\\ &= \frac{A(s-2)(s^2-2s+2)+Bs(s^2-2s+2)+(Cs+D)s(s-2)}{s^4-4s^3+6s^2-4s}.\end{aligned}$$

Podem calcular els coeficients A, B, C i D donant valors adequats a s en la igualtat

$$s^3 - 4s^2 + 4s - 4 = A(s-2)(s^2 - 2s + 2) + Bs(s^2 - 2s + 2) + (Cs + D)s(s-2).$$

Les arrels reals de $Q(s)$ són valors de s especialment útils. Així, amb $s = 0$ i $s = 2$ obtenim:

$$s = 0 \;\Rightarrow\; -4 = -4A \;\Rightarrow\; A = 1, \qquad\qquad s = 2 \;\Rightarrow\; -4 = 4B \;\Rightarrow\; B = -1.$$

Podem obtenir els coeficients C i D a partir d'altres valors de s, per exemple

$$s = 1 \;\Rightarrow\; C + D = 1; \quad s = -1 \;\Rightarrow\; C - D = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad C = 1, \quad D = 0.$$

Aleshores, la descomposició de $F(s)$ és

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s-2} + \frac{s}{s^2 - 2s + 2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s-2} + \frac{s-1}{(s-1)^2 + 1} + \frac{1}{(s-1)^2 + 1}$$

i invertint cadascun dels termes obtenim

$$f(t) = 1 - e^{2t} + e^t \cos t + e^t \sin t.$$

A l'apartat 4.3 presentem un altre mètode per calcular els coeficients.

4.2 Descomposició complexa

Aquesta descomposició és conceptualment més senzilla, perquè no hem de distingir entre arrels reals i complexes. Si tenim el polinomi $Q(s)$ amb arrel $a = \alpha + j\beta$ de multiplicitat m, on β pot ser 0, obtenim els termes

$$\frac{A_1}{s-a}, \quad \frac{A_2}{(s-a)^2}, \quad \ldots, \quad \frac{A_m}{(s-a)^m}.$$

Aleshores, per a $1 \leq k \leq m$, en general, tenim

$$\frac{A_k}{(s-a)^k} = \frac{A_k}{(k-1)!}\frac{(k-1)!}{(s-a)^k} = \mathcal{L}\left\{\frac{A_k}{(k-1)!}t^{k-1}e^{at}\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{A_k}{(k-1)!}t^{k-1}e^{\alpha t}e^{j\beta t}\right\}.$$

Com que l'arrel conjugada $\overline{a} = \alpha - j\beta$ té la mateixa multiplicitat que a, en la descomposició de $F(s)$ també apareixen els termes

$$\frac{\overline{A_1}}{s-\overline{a}}, \quad \frac{\overline{A_2}}{(s-\overline{a})^2}, \quad \ldots, \quad \frac{\overline{A_m}}{(s-\overline{a})^m},$$

la transformada inversa dels quals és anàloga:

$$\frac{\overline{A_k}}{(s-\overline{a})^k} = \mathcal{L}\left\{\frac{\overline{A_k}}{(k-1)!}t^{k-1}e^{\overline{a}t}\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{\overline{A_k}}{(k-1)!}t^{k-1}e^{\alpha t}e^{-j\beta t}\right\}.$$

Ajuntant els termes corresponents a una parella d'arrels conjugades i expressant els coeficients en la forma $A = |A|e^{j\phi}$, $\overline{A} = |A|e^{-j\phi}$, per als primers termes obtenim

$$\boxed{\frac{A_1}{s-a} + \frac{\overline{A_1}}{s-\overline{a}} = \mathcal{L}\{|A_1|e^{j\phi}e^{\alpha t}e^{j\beta t} + |A_1|e^{-j\phi}e^{\alpha t}e^{-j\beta t}\} = \mathcal{L}\{2\,|A_1|\,e^{\alpha t}\cos(\beta t + \phi)\}.}$$

En general, tenim

$$\boxed{\frac{A_k}{(s-a)^k}+\frac{\overline{A_k}}{(s-\overline{a})^k}=\mathcal{L}\left\{\frac{2|A_k|}{(k-1)!}t^{k-1}e^{\alpha t}\cos(\beta t+\phi)\right\}.}$$

Exemple 4.2. Sigui de nou

$$F(s)=\frac{s^3-4s^2+4s-4}{s^4-4s^3+6s^2-4s},$$

on la factorització del denominador és $Q(s)=s(s-2)(s-1-j)(s-1+j)$ i la descomposició complexa de $F(s)$ és (a continuació veurem com calculem els coeficients):

$$F(s)=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-2}+\frac{C}{s-1-j}+\frac{\overline{C}}{s-1+j}=\frac{1}{s}+\frac{-1}{s-2}+\frac{\frac{1}{2}-j\frac{1}{2}}{s-1-j}+\frac{\frac{1}{2}+j\frac{1}{2}}{s-1+j}.$$

Invertint cada terme i expressant $C=\dfrac{1}{2}-j\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\pi/4}$, $\overline{C}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{j\pi/4}$, obtenim

$$\begin{aligned}
f(t) &= 1-e^{2t}+\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\pi/4}e^{(1+j)t}+\frac{\sqrt{2}}{2}e^{j\pi/4}e^{(1-j)t}\\
&= 1-e^{2t}+\frac{\sqrt{2}}{2}e^{t}\left(e^{-j\pi/4}e^{jt}+e^{j\pi/4}e^{-jt}\right)\\
&= 1-e^{2t}+\sqrt{2}\,e^{t}\cos(t-\frac{\pi}{4}).
\end{aligned}$$

Comproveu que aquest resultat coincideix amb el que hem obtingut amb la descomposició real.

4.3 Càlcul dels coeficients

Podem trobar els coeficients que apareixen en totes dues descomposicions de $F(s)$ en fraccions simples amb el mètode dels coeficients indeterminats, com en l'exemple 4.1. Per fer la descomposició complexa i pels termes corresponents a arrels reals en la descomposició real, en particular quan són simples, el mètode següent és més còmode (malgrat l'aparent complexitat del cas general).

Si a és una arrel, real o complexa, del polinomi Q amb multiplicitat m, tindrem

$$F(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=\sum_{k=1}^{m}\frac{A_k}{(s-a)^k}+R(s),$$

on $R(s)$, que agrupa els sumatoris anàlegs de les altres arrels de $Q(s)$, és una funció racional de s, el denominador de la qual $Q(s)/(s-a)^m$ ja no té l'arrel a. Si multipliquem els dos membres per $(s-a)^m$, tindrem

$$\begin{aligned}
(s-a)^m\frac{P(s)}{Q(s)} &= \sum_{k=1}^{m}A_k(s-a)^{m-k}+(s-a)^mR(s)\\
&= A_1(s-a)^{m-1}+\cdots+A_{m-1}(s-a)+A_m+(s-a)^mR(s).
\end{aligned}$$

Per a $s = a$, obtenim

$$\left.(s-a)^m \frac{P(s)}{Q(s)}\right|_{s=a} = 0 + \cdots + 0 + A_m + 0 = A_m.$$

Trobem el coeficient A_{m-1} derivant i, després, fent $s = a$:

$$\left[\frac{d}{ds}\left((s-a)^m \frac{P(s)}{Q(s)}\right)\right]_{s=a} = \left[A_1(s-a)^{m-2} + \cdots + A_{m-1} + 0 + \cdots\right]_{s=a} = A_{m-1}.$$

En general, per al coeficient A_k tenim

$$\boxed{A_k = \frac{1}{(m-k)!}\left[\frac{d^{m-k}}{ds^{m-k}}\left((s-a)^m \frac{P(s)}{Q(s)}\right)\right]_{s=a}.} \tag{19}$$

Exemple 4.3. Els coeficients de la descomposició complexa

$$F(s) = \frac{s^3 - 4s^2 + 4s - 4}{s^4 - 4s^3 + 6s^2 - 4s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-1-j} + \frac{\overline{C}}{s-1+j}$$

en la qual totes les arrels són simples, poden calcular-se així:

$$A = sF(s)|_{s=0} = \left.\frac{s^3 - 4s^2 + 4s - 4}{(s-2)\underbrace{(s-1-j)(s-1+j)}_{s^2-2s+2}}\right|_{s=0} = \frac{-4}{-4} = 1,$$

$$B = (s-2)F(s)|_{s=2} = \left.\frac{s^3 - 4s^2 + 4s - 4}{s\underbrace{(s-1-j)(s-1+j)}_{s^2-2s+2}}\right|_{s=2} = \frac{-4}{4} = -1,$$

$$C = (s-1-j)F(s)|_{s=1+j} = \left.\frac{s^3 - 4s^2 + 4s - 4}{s(s-2)(s-1+j)}\right|_{s=1+j} = \frac{1}{2} - j\frac{1}{2},$$

i, com a comprovació,

$$\overline{C} = (s-1+j)F(s)|_{s=1-j} = \left.\frac{s^3 - 4s^2 + 4s - 4}{s(s-2)(s-1-j)}\right|_{s=1-j} = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2}.$$

Exemple 4.4. Sigui $F(s) = \dfrac{8}{s^4 + 4s^2}$. Ara $Q(s) = s^4 + 4s^2 = s^2(s^2+4) = s^2(s-2j)(s+2j)$ i la descomposició complexa de $F(s)$ és

$$F(s) = \frac{8}{s^4 + 4s^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-2j} + \frac{\overline{C}}{s+2j}.$$

Per trobar els coeficients A i B, corresponents a l'arrel doble $s = 0$, utilitzem (19) a partir de

$$s^2F(s) = \frac{8}{(s^2+4)} = As + B + s^2\left(\frac{C}{s-2j} + \frac{\overline{C}}{s+2j}\right)$$

i obtenim

$$B = s^2 F(s)\Big|_{s=0} = \frac{8}{s^2+4}\Big|_{s=0} = 2, \qquad A = \left[\frac{d}{ds}(s^2F(s))\right]_{s=0} = \frac{-16s}{(s^2+4)^2}\Big|_{s=0} = 0.$$

Anàlogament per als altres coeficients, que corresponen a arrels simples:

$$C = (s-2j)F(s)|_{s=2j} = \frac{8}{s^2(s+2j)}\Big|_{s=2j} = \frac{1}{2}j = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}, \qquad \overline{C} = -\frac{1}{2}j = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}},$$

d'on obtenim

$$f(t) = 2t + \frac{1}{2}\left(e^{j(2t+\frac{\pi}{2})} + e^{-j(2t+\frac{\pi}{2})}\right) = 2t + \cos\left(2t+\frac{\pi}{2}\right).$$

5 Altres aplicacions

El procés seguit en la resolució de problemes de valor inicial en equacions diferencials pot utilitzar-se també per a sistemes d'equacions diferencials o equacions integrodiferencials, com mostrem a continuació amb exemples concrets.

5.1 Sistemes d'equacions diferencials

Exemple 5.1 Considerem el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = 2x - y + e^{3t}, & x(0)=1, \\ y' = x + 4y, & y(0) = 0. \end{cases}$$

Ara el procediment de la transformada de Laplace és anàleg a l'utilitzat amb una única equació diferencial: transformem cada equació amb $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ i tenint en compte els valors inicials donats, per obtenir un sistema algebraic de dues equacions amb les dues funcions $X(s)$ i $Y(s)$ com a incògnites:

$$\begin{cases} sX(s) - 1 = 2X(s) - Y(s) + \frac{1}{s-3}, \\ sY(s) = X(s) + 4Y(s), \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} (s-2)X(s) + Y(s) = 1 + \frac{1}{s-3} = \frac{s-2}{s-3}, \\ -X(s) + (s-4)Y(s) = 0. \end{cases}$$

La solució d'aquest sistema d'equacions és

$$X(s) = \frac{s^2-6s+8}{(s-3)^3}, \qquad Y(s) = \frac{s-2}{(s-3)^3},$$

i ara només cal invertir la transformada. Per a $X(s)$ tenim

$$X(s) = \frac{s^2-6s+8}{(s-3)^3} = \frac{A}{(s-3)} + \frac{B}{(s-3)^2} + \frac{C}{(s-3)^3} = \frac{1}{(s-3)} - \frac{1}{(s-3)^3},$$

on hem calculat els coeficients utilitzant (19) a partir de $(s-3)^3X(s) = s^2-6s+8$:

$$\begin{aligned} C &= (s^2-6s+8)\Big|_{s=3} = -1, \\ B &= \left[\frac{d}{ds}(s^2-6s+8)\right]_{s=3} = 0, \\ A &= \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{ds^2}(s^2-6s+8)\right]_{s=3} = 1. \end{aligned}$$

Anàlogament,

$$Y(s) = \frac{s-2}{(s-3)^3} = \frac{(s-3)+1}{(s-3)^3} = \frac{1}{(s-3)^2} + \frac{1}{(s-3)^3}.$$

Per tant, la solució del problema de valor inicial del sistema és

$$x(t) = (1 - \frac{1}{2}t^2)e^{3t}, \qquad y(t) = (t + \frac{1}{2}t^2)e^{3t}.$$

5.2 Equacions integrodiferencials

Exemple 5.2 Ara tenim el problema següent:

$$y'(t) - 2y(t) - 3\int_0^t y(u)\,du = t, \qquad y(0) = 1.$$

Escrivint $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$, obtenim

$$sY(s) - 1 - 2\,Y(s) - 3\,\frac{Y(s)}{s} = \frac{1}{s^2} \quad \Longrightarrow \quad Y(s) = \frac{s^2+1}{(s+1)s(s-3)} = \frac{1/2}{s+1} - \frac{1/3}{s} + \frac{5/6}{s-3}.$$

Per tant,

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{3} + \frac{5}{6}e^{3t}.$$

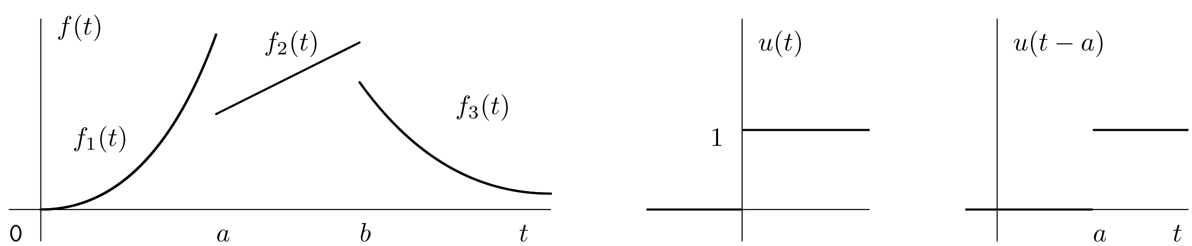
6 Funcions discontínues. La funció de Heaviside

L'ús de la transformada de Laplace és molt útil quan l'excitació d'un sistema, representat en l'equació diferencial pel segon membre $f(t)$, salta bruscament en un o diversos instants. Per exemple, podem tenir el problema

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = f(t) = \begin{cases} f_1(t) & 0 < t \le a, \\ f_2(t) & a < t \le b, \\ f_3(t) & b < t < \infty, \end{cases}$$

la resolució del qual amb els mètodes propis d'Equacions Diferencials és incòmoda, mentre que utilitzant la transformada de Laplace segueix els passos habituals amb l'única diferència que ara

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt = \int_0^a e^{-st}f_1(t)\,dt + \int_a^b e^{-st}f_2(t)\,dt + \int_b^\infty e^{-st}f_3(t)\,dt.$$



De totes maneres, tant per calcular $F(s)$ sense haver de calcular cadascuna de les integrals anteriors, com posteriorment per invertir la transformada, convé estructurar l'estudi de les diferents situacions que se'ns poden presentar. Comencem per la funció discontínua més senzilla.

Definició 2 *La funció de* Heaviside *o funció* esglaó unitat *és*

$$\boxed{u_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leq a, \\ 1 & \text{si} \quad a < t < \infty. \end{cases}} \tag{20}$$

Si $a = 0$ simplement escrivim $u(t)$, i aleshores $u_a(t) = u(t-a)$, notació que utilitzarem d'ara endavant. Vegeu la seva representació gràfica en la figura corresponent. La seva transformada de Laplace ve donada per

$$\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \int_0^\infty e^{-st} u(t-a)\, dt = \int_a^\infty e^{-st}\, dt = \frac{e^{-sa}}{s} \qquad (s > 0). \tag{21}$$

En particular, si $a = 0$,

$$\boxed{\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s} \qquad (s > 0).} \tag{22}$$

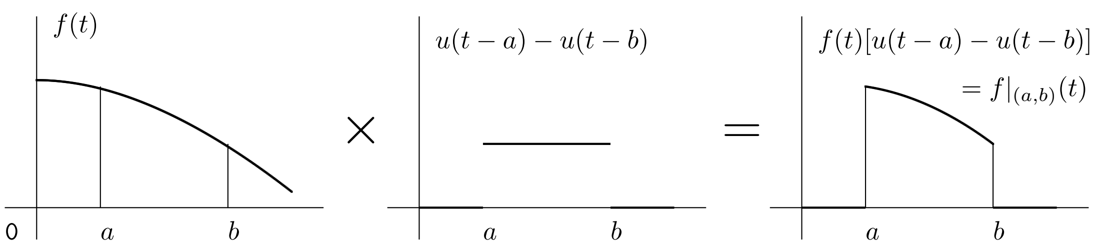
Observeu que $\mathcal{L}\{u(t)\} = \mathcal{L}\{1\}$, perquè totes dues funcions coincideixen per a $t > 0$. Amb més generalitat, sempre tindrem $f(t) = f(t)\, u(t)$ per a $t > 0$.

A partir d'$u(t)$ podem construir altres funcions discontínues elementals. Per exemple, per a $0 < a < b$ la funció

$$u(t-a) - u(t-b) = \begin{cases} 0 & \text{si} \;\; 0 < t \leq a, \\ 1 & \text{si} \;\; a < t \leq b, \\ 0 & \text{si} \;\; b < t < \infty, \end{cases}$$

representa un impuls rectangular unitari d'amplada $b - a$. A més, aquesta funció és útil per expressar una funció que s'anul·la fora d'un interval entre a i b:

$$f\Big|_{(a,b)}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \;\; 0 < t \leq a \\ f(t) & \text{si} \;\; a < t \leq b \\ 0 & \text{si} \;\; b < t < \infty \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad f\Big|_{(a,b)}(t) = f(t)\,[u(t-a) - u(t-b)]\,.$$



Ara la funció discontínua $f(t)$ considerada al començament pot expressar-se com

$$\begin{aligned} f(t) &= f_1\Big|_{(0,a)}(t) + f_2\Big|_{(a,b)}(t) + f_3\Big|_{(b,\infty)}(t) \\ &= f_1(t)\,[u(t) - u(t-a)] + f_2(t)\,[u(t-a) - u(t-b)] + f_3(t)\, u(t-b) \\ &= f_1(t)\, u(t) - f_1(t)\, u(t-a) + f_2(t)\, u(t-a) - f_2(t)\, u(t-b) + f_3(t)\, u(t-b) \\ &= f_1(t)\, u(t) + [f_2(t) - f_1(t)]\, u(t-a) + [f_3(t) - f_2(t)]\, u(t-b). \end{aligned}$$

Amb la propietat de linealitat podem determinar la seva transformada, només cal sumar la transformada de cada sumand. Utilitzant la propietat de translació, obtenim

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\; u(t-a)\} = e^{-as} F(s),$$

però cal tenir en compte que la funció que hi ha no és $f(t)$ sinó $f(t-a)$. Per tant, prèviament caldrà que obtinguem una funció de $t - a$ mitjançant la substitució $t = (t-a) + a$ com mostrem en els exemples següents.

Exemple 6.1. Determineu la transformada de Laplace de la funció

$$f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{si } \; 0 < t \le 1, \\ 2-t & \text{si } \; 1 < t \le 2, \\ 0 & \text{si } \; 2 < t < \infty. \end{cases}$$

Com en el desenvolupament anterior, reescrivim la funció

$$\begin{aligned} f(t) &= t^2\,[u(t)-u(t-1)] + (2-t)\,[u(t-1)-u(t-2)] \\ &= t^2\,u(t) + (2-t-t^2)\,u(t-1) + (t-2)\,u(t-2). \end{aligned}$$

Transformem el primer i el tercer sumands:

$$\mathcal{L}\{t^2\;u(t)\} = \mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2}{s^3}, \qquad\qquad \mathcal{L}\{(t-2)\;u(t-2)\} = e^{-2s}\mathcal{L}\{t\} = e^{-2s}\frac{1}{s^2}.$$

Respecte al segon sumand, escrivim $2-t-t^2$ com una funció de $t-1$:

$$2-t-t^2 = 2-(t-1+1)-(t-1+1)^2 = -3(t-1)-(t-1)^2.$$

Aleshores,

$$\mathcal{L}\{(2-t-t^2)\;u(t-1)\} = \mathcal{L}\left\{\left[-3(t-1)-(t-1)^2\right]\;u(t-1)\right\} = e^{-s}\left(-\frac{3}{s^2}-\frac{2}{s^3}\right),$$

ja que $\mathcal{L}\{-3t-t^2\} = -3/s^2 - 2/s^3$. Així arribem a

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{2}{s^3} - e^{-s}\left(\frac{3}{s^2}+\frac{2}{s^3}\right) + e^{-2s}\frac{1}{s^2}.$$

Exemple 6.2. Trobeu l'antitransformada de Laplace de la funció

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{si } \; 0 < t \le \pi, \\ 0 & \text{si } \; \pi < t < \infty. \end{cases}$$

Ara $f(t) = \sin t\,(u(t)-u(t-\pi)) = \sin t - \sin t\,u(t-\pi)$. Tenint en compte que $\sin t = \sin((t-\pi)+\pi) = -\sin(t-\pi)$, obtenim

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{\sin t + \sin(t-\pi)\,u(t-\pi)\} = \frac{1}{s^2+1} + e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+1} = \frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1}.$$

Exemple 6.3. Trobeu l'antitransformada de Laplace de

$$F(s) = \frac{s+3}{s^2+1}e^{-\pi s}.$$

Momentàniament, no considerem l'exponencial:

$$\frac{s+3}{s^2+1} = \frac{s}{s^2+1} + \frac{3}{s^2+1} = \mathcal{L}\{\cos t + 3\sin t\}.$$

Utilitzant la propietat de translació, $\mathcal{L}\{f(t-a)\;u(t-a)\} = e^{-as}F(s)$, obtenim

$$f(t) = (\cos(t-\pi) + 3\sin(t-\pi))\,u(t-\pi) = -(\cos t + 3\sin t)\,u(t-\pi).$$

També, a partir de la descomposició complexa:

$$\begin{aligned} \frac{s+3}{s^2+1} &= \frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}j}{s-j} + \frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}j}{s+j} = \frac{\sqrt{10}}{2}\left(\frac{e^{j\phi}}{s-j} + \frac{e^{-j\phi}}{s+j}\right) \\ &= \mathcal{L}\left\{\frac{\sqrt{10}}{2}(e^{j\phi}e^{jt} + e^{-j\phi}e^{-jt})\right\} = \mathcal{L}\{\sqrt{10}\cos(t+\phi)\}, \end{aligned}$$

on $\phi = -\arctan 3$, i obtenim que $f(t) = \sqrt{10}\cos(t+\phi-\pi)\, u(t-\pi)$.

Exemple 6.4. Resoleu el problema de valor inicial

$$y'' - y = f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \; 0 < t \le 1, \\ 1 + e^{2t} & \text{si } \; 1 < t < \infty, \end{cases} \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1.$$

En transformar l'equació, obtenim

$$s^2 Y(s) - 1 - Y(s) = F(s),$$

on, amb $f(t) = 1(u(t) - u(t-1)) + (1 + e^{2t})\, u(t-1) = u(t) + e^{2t} u(t-1)$, trobem

$$F(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} + \mathcal{L}\{e^2 e^{2(t-1)} u(t-1)\} = \frac{1}{s} + e^2 \frac{1}{s-2} e^{-s}.$$

Per tant,

$$Y(s) = \frac{s+1}{s(s^2-1)} + \frac{e^2}{(s-2)(s^2-1)} e^{-s}.$$

Ara

$$\frac{s+1}{s(s^2-1)} = \frac{1}{s(s-1)} = \frac{1}{(s-1)} - \frac{1}{s} = \mathcal{L}\{e^t - 1\},$$

$$\frac{1}{(s-2)(s^2-1)} = \frac{1/3}{(s-2)} - \frac{1/2}{(s-1)} + \frac{1/6}{(s+1)} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{3}e^{2t} - \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{6}e^{-t}\right\},$$

$$e^2 \frac{1}{(s-2)(s^2-1)} e^{-s} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^2}{6}[2e^{2(t-1)} - 3e^{t-1} + e^{1-t}]u(t-1)\right\},$$

i, per tant,

$$y(t) = e^t - 1 + \frac{e^2}{6}[2e^{2(t-1)} - 3e^{t-1} + e^{1-t}]u(t-1).$$

7 La "funció" δ de Dirac

Moltes aplicacions requereixen la resolució de problemes de valor inicial de la forma

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f_\epsilon(t), \qquad y(0) = y_0, \qquad y'(0) = y_1, \tag{23}$$

on la funció $f_\epsilon(t)$ s'anul·la fora d'un interval petit, diguem-ne $(a, a+\epsilon)$, en el qual pren valors "grans". A més, normalment aquests valors són desconeguts, i únicament coneixem el valor A de la integral de $f_\epsilon(t)$ en aquest interval $(a, a+\epsilon)$ o en qualsevol interval (α, β) que contingui ϵ:

$$\int_\alpha^\beta f_\epsilon(t)\, dt = A,$$

quan $\alpha \le a < a + \epsilon \le \beta$. Aquestes situacions es presenten en problemes de tipus impulsional.

Per exemple, en un sistema mecànic format per una massa m que penja d'una molla elàstica de constant k que un martell colpeja en un instant $t = a$. Durant un interval curt de temps $(a, a+\epsilon)$, en el qual el martell està en contacte amb la massa, li comunica un impuls de valor A:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + ky = f_\epsilon(t), \qquad \int_\alpha^\beta f_\epsilon(t)\, dt = A.$$

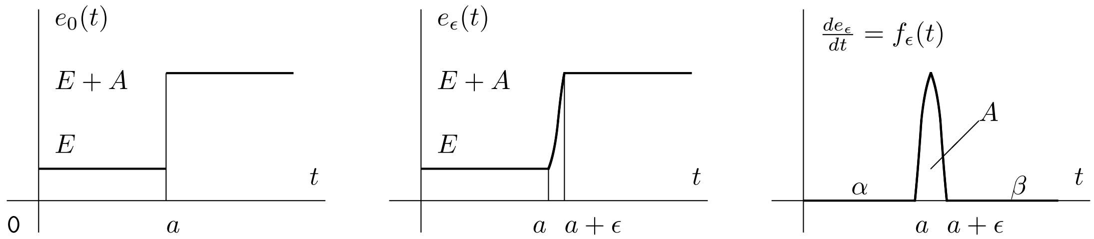
També, en el cas d'un circuit elèctric format per una resistència R, una bobina amb autoinducció L i un condensador amb capacitat C, col·locats en sèrie tenim:

$$e(t) = R\, y + L\,\frac{dy}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t y(u)\, du,$$

equació que derivem per obtenir l'equació diferencial

$$L\,\frac{d^2y}{dt^2} + R\,\frac{dy}{dt} + \frac{1}{C}\,y = \frac{de}{dt} = f_\epsilon(t), \qquad \int_\alpha^\beta f_\epsilon(t)\,dt = A,$$

quan la tensió aplicada al circuit $e(t)$ canvia bruscament en l'instant a (de fet entre a i $a+\epsilon$) des d'un valor E fins a un valor $E+A$, com il·lustrem a la figura.



Per tractar aquest tipus de situacions, considerem el cas ideal obtingut fent $\epsilon \to 0$. Fixat $A = 1$, si $f_\epsilon \to f_0$ aquesta funció hauria de satisfer

$$f_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq a, \\ +\infty & \text{si } t = a, \end{cases} \qquad \int_\alpha^\beta f_0(t)\,dt = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in [\alpha,\beta), \\ 0 & \text{si } a \notin [\alpha,\beta), \end{cases}$$

condicions que cap funció ordinària pot complir.

Observem que el que realment ens interessa no és obtenir el límit de f_ϵ quan $\epsilon \to 0$, sinó resoldre el problema de valor inicial en el cas $\epsilon \to 0$, i que per resoldre aquest problema mitjançant la transformada de Laplace no ens calen els valors de f_0, només el valor de

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_0^\infty e^{-st} f_\epsilon(t)\,dt.$$

Amb més generalitat, intentem calcular

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_\alpha^\beta g(t) f_\epsilon(t)\,dt,$$

on $g(t)$ és una funció contínua.

Lema 1 *Si $g(t)$ és una funció contínua en $[\alpha,\beta]$, aleshores*

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_\alpha^\beta g(t) f_\epsilon(t)\,dt = \begin{cases} g(a) & \textit{si } a \in [\alpha,\beta), \\ 0 & \textit{si } a \notin [\alpha,\beta). \end{cases}$$

*D*emostració: Si a és tal que $\alpha \le a < \beta$, per a ϵ prou petit $\alpha \le a < a+\epsilon < \beta$ i

$$\int_\alpha^\beta g(t) f_\epsilon(t)\,dt = \int_a^{a+\epsilon} g(t) f_\epsilon(t)\,dt \overset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} g(a),$$

ja que amb $m_\epsilon = \min\{g(t) : t \in [a, a+\epsilon]\}$, $M_\epsilon = \max\{g(t) : t \in [a, a+\epsilon]\}$ tenim

$$m_\epsilon = m_\epsilon \int_a^{a+\epsilon} f_\epsilon(t)\,dt \le \int_\alpha^\beta g(t) f_\epsilon(t)\,dt \ \le M_\epsilon \int_a^{a+\epsilon} f_\epsilon(t)\,dt = M_\epsilon.$$

Com que $g(t)$ és contínua, tant m_ϵ com M_ϵ tendeixen cap a $g(a)$ quan $\epsilon \to 0$. Mentre que si $a \ge \beta$, $f_\epsilon(t) = 0$ en $[\alpha,\beta]$, i si $a < \alpha$ per a ϵ prou petit $a+\epsilon < \alpha$ i aleshores també $f_\epsilon(t) = 0$ en $[\alpha,\beta]$. Per tant en tots dos casos

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_\alpha^\beta g(t) f_\epsilon(t)\,dt = 0.$$

Aquest resultat ens permet considerar el cas ideal $\epsilon \to 0$ en la situació descrita. Per això, d'acord amb el lema anterior, definim la "funció" δ de Dirac de la següent forma:

Definició 3 *La "funció" $\delta(t-a)$ és tal que*

$$\int_\alpha^\beta g(t)\delta(t-a)\,dt = \begin{cases} g(a) & si \;\; a \in [\alpha, \beta), \\ 0 & si \;\; a \notin [\alpha, \beta), \end{cases} \tag{24}$$

per a qualsevol funció $g(t)$ contínua en $[\alpha, \beta]$.

Posem funció entre cometes perquè δ, com abans f_0, no és una funció en el sentit ordinari. Es diu que δ és una **funció generalitzada**.

Ara el cas $\epsilon \to 0$ en el problema inicial (23) ens porta al problema

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = A\delta(t-a), \qquad y(0) = y_0, \qquad y'(0) = y_1. \tag{25}$$

Per a la seva resolució, utilitzant la transformada de Laplace, només cal conèixer $\mathcal{L}\{\delta(t-a)\}$:

$$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = \int_0^\infty e^{-st}\delta(t-a)\,dt = e^{-sa}, \tag{26}$$

d'acord amb la definició de $\delta(t-a)$, ja que e^{-st} és una funció contínua i $0 \leq a < \infty$. En particular, per a $a = 0$,

$$\boxed{\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1.} \tag{27}$$

Exemple 7.1. La solució del problema de valor inicial

$$y'' + y = 3\delta(t-\pi), \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0,$$

té com a transformada de Laplace $Y(s)$ donada per

$$s^2 Y(s) - s + Y(s) = 3e^{-\pi s} \qquad \Longrightarrow \qquad Y(s) = \frac{s}{s^2+1} + \frac{3}{s^2+1}e^{-\pi s}.$$

Per tant,

$$y(t) = \cos t + 3\sin(t-\pi)\,u(t-\pi) = \begin{cases} \cos t & \text{si } \;0 \leq t \leq \pi, \\ \cos t - 3\sin t & \text{si } \;t > \pi. \end{cases}$$

Observeu que l'excitació $3\delta(t-\pi)$ modifica la solució per a $t > \pi$.

7.1 Antitransformades de funcions racionals amb polinomis del mateix grau

D'altra banda, podem considerar ara la inversió de funcions racionals $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ en les quals els polinomis $P(s)$ i $Q(s)$ tenen el mateix grau. Com que aleshores $F(s)$ no compleix la propietat 10 a): $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$, la seva inversa no pot ser una funció admissible i haurà de ser una funció generalitzada. Després de dividir per expressar $F(s)$ en la forma $P(s)/Q(s) = A + R(s)/Q(s)$, tenim

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{A + \frac{R(s)}{Q(s)}\right\} = A\delta(t) + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{R(s)}{Q(s)}\right\},$$

on podem calcular el segon sumand com abans, perquè grau(R) <grau(Q).

Exemple 7.2. Com que

$$F(s) = \frac{3s^2+4s+13}{s^2+2s+5} = 3 + \frac{-2s-2}{s^2+2s+5} = 3 - 2\,\frac{s+1}{(s+1)^2+4},$$

tenim que $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = 3\,\delta(t) - 2\,e^{-t}\cos 2t$.

Com suggereixen les gràfiques anteriors d'$e_0(t)$, $e_\epsilon(t)$ i de_ϵ/dt, podem esperar que

$$\boxed{\frac{d}{dt}u(t-a) = \delta(t-a).} \tag{28}$$

En efecte, si $g(t)$ és una funció contínuament diferenciable en $[\alpha,\beta]$ i $\alpha \le a < \beta$, integrant per parts, obtenim

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta g(t)\frac{d}{dt}u(t-a)\,dt &= g(t)\,u(t-a)\Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta g'(t)\,u(t-a)\,dt \\ &= g(\beta) - \int_a^\beta g'(t)\,dt = g(\beta) - g(\beta) + g(a) = g(a). \end{aligned}$$

En canvi, si $a \notin [\alpha,\beta)$, $\frac{d}{dt}u(t-a) = 0$ en $[\alpha,\beta]$ i

$$\int_\alpha^\beta g(t)\frac{d}{dt}u(t-a)\,dt = 0.$$

Per tant, d'acord amb la definició de la funció $\delta(t-a)$ en (24), es compleix (28).

També podem comprovar aquest resultat, utilitzant la propietat de derivació de la transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}u(t-a)\right\} = s\frac{e^{-sa}}{s} - u(t-a)\Big|_{t=0} = e^{-sa} - 0 = e^{-sa} = \mathcal{L}\{\delta(t-a)\}.$$

Què passa quan $a = 0$? En aquest cas es compleix

$$\boxed{\frac{d}{dt}u(t) = \delta(t),} \tag{29}$$

suposant que $u(0) = 0$, que és l'única distinció que hi ha entre les funcions $u(t)$ i 1 per a $t \ge 0$.

8 El producte de convolució

És freqüent haver de determinar la resposta d'un sistema fix davant de diferents excitacions. Per exemple, quan volem determinar el corrent en un element d'un circuit al qual s'apliquen successivament diverses tensions.

Considerem una situació la formulació de la qual porta a un problema de valor inicial de la forma:

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = f(t), \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0, \tag{30}$$

on per simplificar hem suposat condicions inicials homogènies, problema que hem de resoldre per a diferents funcions $f(t)$. Aquest model correspon a un sistema *lineal*, ja que el problema (30) és lineal, i *invariant amb el temps*, perquè els coeficients de l'equació diferencial són constants.

La resolució del problema (30) mitjançant la transformada de Laplace porta a

$$Y(s) = \frac{1}{a_2s^2 + a_1s + a_0}F(s).$$

Ara només cal invertir la transformada per obtenir $y(t)$. Ho volem fer de manera que en modificar $f(t)$, i per tant $F(s)$, no haguem de refer tots els càlculs. Per això observem que $Y(s)$ té la forma

$$Y(s) = H(s)F(s), \qquad \text{on} \qquad H(s) = \frac{1}{a_2s^2 + a_1s + a_0} = \mathcal{L}\{h(t)\}, \tag{31}$$

essent $h(t)$ la solució del problema de valor inicial (30) quan $F(s) = 1$, és a dir, quan $f(t) = \delta(t)$:

$$a_2 h'' + a_1 h' + a_0 h = \delta(t), \qquad h(0) = 0, \qquad h'(0) = 0. \tag{32}$$

La funció $h(t)$ rep el nom de ***resposta impulsional*** del sistema, i depèn únicament de "la part fixa" del sistema, la qual correspon aquí als coeficients a_2, a_1 i a_0. La seva transformada de Laplace $H(s)$ es coneix com la ***funció de transferència*** del sistema, perquè el seu producte per $F(s)$ dóna $Y(s)$.

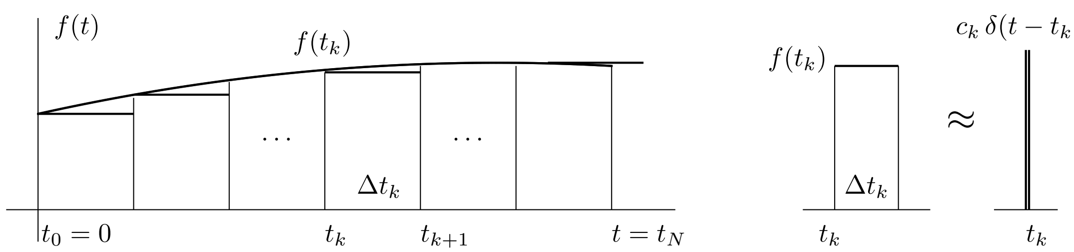
L'expressió $Y(s) = H(s)F(s)$ en (31) suggereix que $y(t)$ està relacionada amb $h(t)$ i $f(t)$, però la qüestió és com és aquesta relació. En general, $y(t) \neq h(t)f(t)$, perquè $\mathcal{L}\{h(t)f(t)\} \neq \mathcal{L}\{h(t)\}\mathcal{L}\{f(t)\}$.

Per tenir una idea del que podem obtenir, aproximem f com es veu en la figura mitjançant la suma

$$f(t) \approx \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k)[u(t-t_k) - u(t-t_{k+1})],$$

a partir de la qual, utilitzant l'aproximació $u(t-t_k) - u(t-t_{k+1}) \approx (t_{k+1} - t_k)\,\delta(t-t_k) = \Delta t_k\,\delta(t-t_k)$, obtenim

$$f(t) \approx \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k)\Delta t_k \delta(t-t_k) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \delta(t-t_k), \qquad \text{on} \qquad c_k = f(t_k)\Delta t_k.$$



Ara utilitzem dues propietats bàsiques de les soluciones del problema de valor inicial (30). En primer lloc, com que és un problema lineal, és vàlid el principi de superposició de solucions i la solució corresponent a una combinació lineal d'excitacions és la corresponent combinació lineal de les soluciones que obtenim per a cadascuna d'aquestes excitacions. Per això, podem aproximar $y(t)$ com

$$y(t) \approx \sum_{k=0}^{N-1} c_k\, y_k(t),$$

on $y_k(t)$ és la solució de

$$a_2 y_k'' + a_1 y_k' + a_0 y_k = \delta(t-t_k), \qquad y_k(0) = 0, \qquad y_k'(0) = 0.$$

En segon lloc, per la invariància del sistema amb el temps i, tenint en compte que la solució de (32) és $h(t) (= h(t)\,u(t))$, tindrem

$$y_k(t) = h(t-t_k)\,u(t-t_k),$$

(això també es pot deduir gràcies a la propietat de translació, $\mathcal{L}\{y_k(t)\} = H(s)\mathcal{L}\{\delta(t-t_k)\} = H(s)e^{-st_k}$).

Així obtenim

$$y(t) \approx \sum_{k=0}^{N-1} c_k\, h(t-t_k)\,u(t-t_k) = \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k)\,\Delta t_k\, h(t-t_k)\,u(t-t_k).$$

El segon membre d'aquesta expressió es pot interpretar com una suma de Riemann, de manera que quan $N \to \infty$ i $\max\{\Delta t_k : 0 \le k \le N-1\} \to 0$, obtindrem

$$y(t) = \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)\, d\tau,$$

on hem tingut en compte que $u(t-\tau) = 1$ per a $\tau < t$.

Tot això ens porta a introduir el *producte de convolució* i el *teorema de convolució*:

Definició 4 *El* **producte de convolució** *de dues funcions f i h, que denotem per $f * h$, és la funció donada per la integral:*

$$\boxed{(f*h)(t) = f(t)*h(t) = \int_0^t f(u)h(t-u)\, du.} \tag{33}$$

De la discussió anterior podem esperar que $\mathcal{L}\{f*h\} = \mathcal{L}\{y\} = F(s)H(s) = \mathcal{L}\{f\}\mathcal{L}\{h\}$. En efecte, tenim el següent resultat, la demostració del qual ometem.

Teorema 3 *(de convolució). Si f i h són dues funcions admissibles, el seu producte de convolució $f*h$ també ho és i*

$$\boxed{\mathcal{L}\{f*h\} = \mathcal{L}\{f\}\mathcal{L}\{h\}.} \tag{34}$$

Utilitzant el teorema de convolució és elemental verificar les següents propietats del producte de convolució (només cal comprovar en cada cas que les transformades dels dos membres coincideixen):

(i) $f*g = g*f$,
(ii) $f*(g+h) = f*g + f*h$,
(iii) $f*(g*h) = (f*g)*h$,
(iv) $f*\delta = f$.

Com a conclusió, podem dir que, utilitzant la resposta impulsional, la solució del problema de valor inicial (30) és

$$y(t) = (f*h)(t) = \int_0^t f(u)h(t-u)\, du. \tag{35}$$

Si modifiquem el segon membre de l'equació, $f(t)$, només cal que calculem de nou el seu producte de convolució amb la resposta impulsional del sistema.

Exemple 8.1. La funció de transferència corresponent al problema

$$y'' + y = f(t), \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0,$$

és tal que $(s^2+1)H(s) = 1$ i, per tant, la resposta impulsional és

$$h(t) = \sin t.$$

Ara, quan $f(t) = 1$,

$$y(t) = 1 * h(t) = \int_0^t \sin(t-u)\, du = \cos(t-u)\Big|_0^t = 1 - \cos t,$$

mentre que quan $f(t) = t$,

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t (t-u)\sin u\, du = t\int_0^t \sin u\, du - \int_0^t u \sin u\, du \\ &= t(1-\cos t) + t\cos t - \sin t = t - \sin t \end{aligned}$$

(comproveu la solució en els dos casos resolent directament el problema de valor inicial).

El teorema de convolució també és molt útil per invertir la transformada de Laplace quan $F(s)$ es pot expressar com a producte de dues funcions que tenen antitransformades conegudes.

Exemple 8.2. La funció amb transformada de Laplace

$$F(s) = \frac{s}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{s^2+1}\frac{s}{s^2+1}$$

és

$$\begin{aligned} f(t) &= \sin t * \cos t = \int_0^t \sin u \cos(t-u)\, du \\ &= \int_0^t \sin u\ (\cos t \cos u + \sin t \sin u)\, du \\ &= \cos t \int_0^t \sin u\ \cos u\ du + \sin t \int_0^t \sin^2 u\ du \\ &= \cos t\, \frac{\sin^2 t}{2} + \sin t \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right) = \frac{1}{2} t \sin t. \end{aligned}$$

Exemple 8.3. Anàlogament, la funció amb transformada de Laplace

$$F(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{s^2+1}\frac{1}{s^2+1}$$

és

$$\begin{aligned} f(t) &= \sin t * \sin t = \int_0^t \sin u\ \sin(t-u)\, du \\ &= \int_0^t \sin u\ (\sin t \cos u - \cos t \sin u)\, du \\ &= \sin t \int_0^t \sin u\ \cos u\ du - \cos t \int_0^t \sin^2 u\ du \\ &= \sin t\, \frac{\sin^2 t}{2} - \cos t \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t). \end{aligned}$$