

# Ampliació de Matemàtiques

## Tema 4. Teoremes integrals

Lali Barrière

Departament de Matemàtiques - UPC

Enginyeria de Sistemes Aeroespacials

Enginyeria d'Aeroports

Enginyeria d'Aeronavegació

EETAC

# Continguts

4.1 Gradient, divergència, rotacional i laplacà

4.2 Teorema de Stokes

4.3 Camps conservatius a  $\mathbb{R}^3$

4.4 Teorema de la divergència de Gauss

4.5 Camps solenoïdals

## 4.1 Gradient, divergència, rotacional i laplaciana

### Observacions

- ▶ Utilitzem l'operador nabra:  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$
- ▶  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , camp escalar.
- ▶  $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , camp vectorial.

### Definicions

1. El gradient del camp escalar  $f$  és

$$\text{grad} f = \nabla f = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

**Observació:**  $\nabla f$  és un camp vectorial.

2. La divergència del camp vectorial  $\vec{F}$  és

$$\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (f_1, f_2, f_3) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

**Observació:**  $\text{div } \vec{F}$  és un camp escalar.

3. El rotacional del camp vectorial  $\vec{F}$  és

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{F} &= \nabla \times \vec{F} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (f_1, f_2, f_3) = \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \\ &= \left( \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

**Observació:**  $\operatorname{rot} \vec{F}$  és un camp vectorial.

Si  $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$  diem que  $\vec{F}$  és **irrotacional**.

4. Si  $f$  es un camp escalar de classe  $\mathcal{C}^2$ , el **laplacà de  $f$**  és:

$$\Delta f = \nabla^2 f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

## Relacions gradient-divergència-rotacional

- ▶  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  camp escalar  $\mathcal{C}^2 \implies \text{rot}(\text{grad } f) = \nabla \times (\nabla f) = 0$
- ▶  $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  camp vectorial  $\mathcal{C}^2 \implies \text{div}(\text{rot } \vec{F}) = \nabla(\nabla \times f) = 0$

## Interpretacions físiques

1. El **gradient** ens indica la direcció de **màxim creixement**.
2. La **divergència** ens indica el flux “cap a fora” per unitat de volum.
3. El **rotacional** ens indica la **circulació** per unitat d'àrea.

## 4.2 Teorema de Stokes

- ▶  $\sigma : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrització regular i de classe  $\mathcal{C}^2$  d'una superfície  $S$ .
- ▶  $D$  limitada per una corba simple i regular a trossos  $\Gamma$ .
- ▶  $C = \sigma(\Gamma)$  és la **vora de la superfície  $S$** .
- ▶  $\vec{F} : S \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  camp vectorial de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Llavors:

$$\iint_S (\text{rot } \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

amb  $C$  recorreguda en el sentit induït per l'orientació a  $S$ .

### Observació

Si  $S$  és una superfície tancada, no té vora, i aleshores:

$$\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = 0$$

## El teorema de Stokes generalitza el teorema de Green

**Teorema de Green**  $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ ,  $C$  corba tancada simple i  $D$  la regió del pla interior a  $C$ . Aleshores:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Si apliquem el teorema de Stokes amb:

- ▶ Camp vectorial:  $\vec{G}(x, y, z) = (P(x, y), Q(x, y), 0)$
- ▶ Superfície:  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D, z = 0\}$

Obtenim el teorema de Green:

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{G} \cdot d\vec{s} &= \iint_S \nabla \times \vec{G} \cdot d\vec{S} = \iint_D \left( 0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cdot (0, 0, 1) dx dy = \\ &= \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned}$$

## 4.3 Camps conservatius a $\mathbb{R}^3$

Un camp de forces és conservatiu si el treball que realitza una partícula que es mou entre dos punts no depèn del camí que segueix.

### Teorema de caracterització

$\vec{F}$  camp vectorial  $\mathcal{C}^1$  a  $D \subset \mathbb{R}^3$  qualsevol. Les tres condicions següents són equivalents:

1.  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$ , per a tota corba tancada  $C$ .
2.  $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}$ , on  $C_1$  i  $C_2$  tenen els mateixos extrems.
3. Existeix un camp escalar  $f$ ,  $\mathcal{C}^2$ , anomenat **potencial**, tal que:  
 $\vec{F} = \nabla f$ .

Quan es compleix qualsevol d'aquestes tres condicions diem que  $\vec{F}$  és un **camp conservatiu**.

### Condició necessària

Si  $\vec{F}$  és un camp conservatiu, aleshores:  $\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = 0$



## Regions simplement connexes a $\mathbb{R}^3$

Un conjunt  $A \subset \mathbb{R}^3$  és **simplement connex** si tota corba tancada de  $A$  és la vora d'una superfície  $S$ , que està tota ella també inclosa a  $A$ .

### Exemples

- ▶  $\mathbb{R}^3$  menys un nombre finit de punts és simplement connex.
- ▶  $\mathbb{R}^3$ menys una recta **NO** és simplement connex.
- ▶  $\mathbb{R}^3$ menys un segment és simplement connex.
- ▶  $\mathbb{R}^3$ menys una esfera és simplement connex.
- ▶  $\mathbb{R}^3$ menys una bola és simplement connex.
- ▶  $\mathbb{R}^3$ menys una corba (no tancada) infinita **NO** és simplement connex.

Un conjunt  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  és **simplement connex** si tota corba tancada continguda en  $A$  es pot deformar de manera contínua fins a convertir-la en un punt, sense sortir de  $A$ .

## Camps conservatius en regions simplement connexes

$\vec{F}$  camp vectorial  $\mathcal{C}^1$  a  $D \subseteq \mathbb{R}^3$ , amb  $D$  **regió simplement connexa**. Les quatre condicions següents són equivalents:

1.  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$ , per a tota corba tancada simple.
2.  $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}$ , on  $C_1$  i  $C_2$  tenen els mateixos extrems.
3. Existeix un camp escalar  $f$ ,  $\mathcal{C}^2$ , anomenat **potencial**, tal que:  
 $\vec{F} = \nabla f$ .
4.  $\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = 0$ .

Quan  $D$  és simplement connex i es compleix qualsevol d'aquestes quatre condicions diem que  $\vec{F}$  és un **camp conservatiu**.

## Estudi de camps conservatius

$\vec{F}$  camp vectorial  $\mathcal{C}^1$  a  $D \subseteq \mathbb{R}^3$

- ▶  $\vec{F}$  és conservatiu si és el gradient d'un camp escalar  $f$ , que es diu **potencial escalar**.
- ▶ Si  $\vec{F}$  és conservatiu, aleshores  $\nabla \times \vec{F} = 0$ .
- ▶ Si  $\nabla \times \vec{F} = 0$  i  $D$  és simplement connex, aleshores  $\vec{F}$  és conservatiu.
- ▶ Si  $\nabla \times \vec{F} = 0$  i  $D$  NO és simplement connex, aleshores  $\vec{F}$  podria ser conservatiu o no ser-ho.

En un domini NO simplement connex, amb un camp  $\vec{F}$  amb  $\nabla \times \vec{F} = 0$ :

1. Si trobem una corba tancada  $C$ , tal que  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} \neq 0$ , sabem que  $\vec{F}$  no és conservatiu.
2. Si trobem un potencial de  $\vec{F}$ , sabem que  $\vec{F}$  és conservatiu.

## Càlcul del potencial

El potencial escalar es pot calcular de dues maneres:

1. Resolem el sistema:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= P \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= Q \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= R \end{aligned} \right\}$$

2. Si  $\vec{F} = (P, Q, R)$  és un camp conservatiu, el potencial  $f$  es calcula:

$$f(x, y, z) = \int_0^x P(t, 0, 0) dt + \int_0^y Q(x, t, 0) dt + \int_0^z R(x, y, t) dt$$

## 4.4 Teorema de la divergència de Gauss

- ▶  $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  camp vectorial  $C^1$ .
- ▶  $W$  sòlid de  $\mathbb{R}^3$  limitat per la superfície  $S$ .
- ▶  $S$  orientada cap a l'exterior.

Aleshores:

$$\iiint_W \operatorname{div} \vec{F} \, dV = \iiint_W \nabla \cdot \vec{F} \, dV = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

### Càlcul del volum

Si  $\vec{F} = (x, y, z)$  llavors  $\nabla \cdot \vec{F} = 3$ , per tant:

$$\operatorname{Vol}(W) = \iiint_W 1 \, dx \, dy \, dz = \frac{1}{3} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

## 4.5 Camps solenoïdals

### Definició

$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  camp vectorial  $\mathcal{C}^1$  és **solenoïdal** si existeix un camp vectorial  $\vec{G} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $\vec{F} = \nabla \times \vec{G}$ .

Diem que  $\vec{G}$  és un **potencial vectorial** de  $\vec{F}$ .

### Propietats

- ▶ Si  $\vec{F}$  és solenoïdal, aleshores per a tota  $S$  superfície tancada

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$$

- ▶ Si  $\vec{F}$  és solenoïdal, aleshores  $\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{G}) = 0$ .  
El recíproc **no sempre** és cert, **depèn de les propietats del domini de definició de  $\vec{F}$** .

És a dir: hi ha camps que satisfan  $\nabla \cdot \vec{F} = 0$ , que no són solenoïdals.

## Conjunts estrellats

### Definició

Un conjunt  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  és **estrellat** si existeix un punt  $p \in A$  tal que per a qualsevol altre punt  $q \in A$  el segment  $\overline{pq}$  està contingut a  $A$ .

### Exemples

1.  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$  és un conjunt estrellat.
2.  $\mathbb{R}^3$  menys un punt **NO** és estrellat.

### Propietat

- ▶  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  és un conjunt estrellat.
- ▶  $\vec{F} : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  camp vectorial  $\mathcal{C}^1$  a  $A$ .
- ▶  $\nabla \cdot \vec{F} = 0$  (en  $A$ ).

Aleshores:  $\vec{F}$  és un camp solenoïdal.