Ampliació de Matemàtiques
Tema 6. Transformada de Fourier

Lali Barrière
Departament de Matemàtiques - UPC

Enginyeria de Sistemes Aeroespacials
Enginyeria d'Aeroports
Enginyeria d'Aeronavegació
EETAC

Continguts

6.1 Transformada de Fourier

Definició Donada una funció $f(t)$, la transformada de Fourier de f és

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-\mathrm{j}\omega t}\, dt$$

Diem que $f(t)$ és la transformada inversa o antitransformada de $F(\omega)$. Es compleix:

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{\mathrm{j}\omega t}\, d\omega$$

La notació:

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$$

equival a

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}, \quad F(\omega) \text{ és la transformada de } f(t)$$

i també a

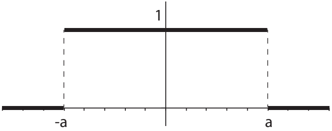
$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}, \quad f(t) \text{ és l'antitransformada de } F(\omega)$$

Tant $f(t)$ com $F(\omega)$ són funcions complexes de variable real.

Exemple 1: La funció impuls rectangular

L'impuls rectangular és la funció

$$p_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq a \\ 0 & \text{si } |t| > a \end{cases}$$



La seva transformada de Fourier és

$$\mathcal{F}\{p_a(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} p_a(t) e^{-\mathtt{j}\omega t}\, dt = \int_{-a}^{a} e^{-\mathtt{j}\omega t}\, dt = \left[\frac{1}{-\mathtt{j}\omega} e^{-\mathtt{j}\omega t}\right]_{-a}^{a} =$$

$$= \frac{1}{-\mathtt{j}\omega}\left(e^{-\mathtt{j}\omega a} - e^{\mathtt{j}\omega a}\right) = \frac{2}{\omega} \sin \omega a$$

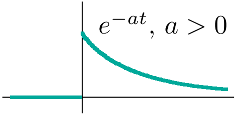
Exemple 2: La funció exponencial

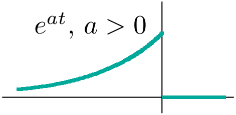
- La funció $f(t) = \begin{cases} e^{-at} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$, amb $a > 0$, té transformada

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-\mathtt{j}\omega t}\, dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-at} e^{-\mathtt{j}\omega t}\, dt = \frac{1}{a + \mathtt{j}\omega}$$

- La funció $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t > 0 \\ e^{at} & \text{si } t < 0 \end{cases}$, amb $a > 0$, té transformada

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-\mathtt{j}\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{0} e^{at} e^{-\mathtt{j}\omega t}\, dt = \frac{1}{a - \mathtt{j}\omega}$$





No existeix la transformada de la funció $f(t) = e^{at}$, amb $a \neq 0$, perquè

$$\lim_{x \to +\infty} f(t) = \infty, \text{ si } a > 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} f(t) = \infty, \text{ si } a < 0$$

Sèrie de Fourier i transformada de Fourier

Donada un funció $f(t)$, considerem la funció T-periòdica:

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ f(t+T) & \text{si } |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

amb sèrie de Fourier: $f_T(t) \simeq \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, e^{\mathtt{j}k\omega_0 t}$, amb $c_k = \displaystyle\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-\mathtt{j}k\omega_0 t}\, dt$.

Recordem: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, i per a $k \geq 1$, $\omega_k = k\omega_0$. Definim la funció (de variable discreta):

$$F(\omega_k) = Tc_k = \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-\mathtt{j}k\omega_0 t}\, dt$$

Es compleix:

$$f_T(t) \simeq \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, e^{\mathtt{j}k\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k\omega_0) \, e^{\mathtt{j}k\omega_0 t} \omega_0.$$

La transformada de Fourier s'obté fent tendir el període T a $+\infty$.

$$F(\omega_k) = Tc_k = \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-\mathrm{j}k\omega_0 t}\, dt \quad \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-\mathrm{j}\omega t}\, dt$$

$$f_T(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k\omega_0)\, e^{\mathrm{j}k\omega_0 t}\omega_0 \qquad \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{\mathrm{j}\omega t}\, d\omega$$

Hem de tenir en compte que, quan $T \to +\infty$:

- En la transformada: f_T passa a ser f.
- En l'antitransformada:
  - ω_0 és la diferència entre dos valors consecutius $\omega_{k+1} - \omega_k$ i, per tant, passa a ser $d\omega$.
  - $k\omega_0$ és el punt on estem avaluant la funció F, i per tant passa a ser $F(\omega)$.

Observació

- Espectre d'amplitud i espectre de freqüència

Donada una funció real o complexa $f(t)$, la seva transformada de Fourier és una funció $F(\omega)$ complexa. Podem escriure:

$$F(\omega) = R(\omega) + \mathtt{j} I(\omega) = |F(\omega)| \cdot e^{\mathtt{j}\phi(\omega)}$$

$|F(\omega)|$ es diu espectre d'amplitud de f.
$\phi(\omega)$ es diu espectre de fase de f.

Existència i convergència de la transformada de Fourier

- Condició suficient d'existència de la transformada de Fourier

  Si f és contínua a trossos i de quadrat integrable, és a dir,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt < +\infty$$

  aleshores existeix la transformada de Fourier de $f(t)$.
  La condició és suficient però no necessària.

- Si $f(t)$ és $\mathcal{C}^1$ a trossos, aleshores:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{\mathrm{j}\omega t_0}\, d\omega = \frac{1}{2}(f(t_0^+) + f(t_0^-))$$

  Per tant, si f és contínua en t_0, aleshores:

$$f(t_0) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{f(t_0)\}\}$$

  És l'equivalent de les condicions de Dirichlet per a sèries de Fourier.

Propietats relacionades amb operacions

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$$

1. Linealitat

$$af(t) + bg(t) \;\longleftrightarrow\; aF(\omega) + bG(\omega)$$

2. Translació en temps

$$f(t - t_0) \;\longleftrightarrow\; e^{-\mathtt{j}\omega t_0} F(\omega)$$

   Translació en freqüència

$$f(t)\, e^{\mathtt{j}\omega_0 t} \;\longleftrightarrow\; F(\omega - \omega_0)$$

3. Dualitat

$$F(t) \;\longleftrightarrow\; 2\pi f(-\omega)$$

4. Canvi d'escala

$$f(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Observació Com a conseqüència, fent $a = -1$:

$$f(-t) \longleftrightarrow F(-\omega)$$

Per tant:

- $f(t)$ és parella si i només si $F(\omega)$ és parella.
- $f(t)$ és senar si i només si $F(\omega)$ és senar.

5. Derivació en temps

$$\begin{aligned} f'(t) &\longleftrightarrow \mathtt{j}\omega F(\omega) \\ f^{(n)}(t) &\longleftrightarrow (\mathtt{j}\omega)^n F(\omega) \end{aligned}$$

Derivació en freqüència

$$\begin{aligned} -\mathtt{j}tf(t) &\longleftrightarrow \frac{d}{d\omega} F(\omega) \\ (-\mathtt{j}t)^n f(t) &\longleftrightarrow \frac{d^n}{d\omega^n} F(\omega) \end{aligned}$$

6. Modulació

$$f(t)\cos\omega_0 t \longleftrightarrow \frac{1}{2}(F(\omega-\omega_0)+F(\omega+\omega_0))$$

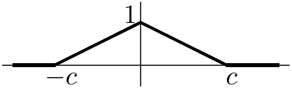
7. Conjugació

$$\overline{f(t)} \longleftrightarrow \overline{F(-\omega)}$$

Exemple 3: La funció impuls triangular

L'impuls triangular és la funció

$$q_c(t) = \begin{cases} 1 + t/c & \text{si } -c < t < 0 \\ 1 - t/c & \text{si } 0 < t < c \\ 0 & \text{si } |t| > c \end{cases}$$



La seva transformada de Fourier es pot calcular directament o aplicant les propietats de derivació en temps i de linealitat.

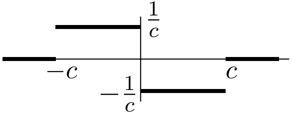
Directament

$$Q_c(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} q_c(t) e^{-\mathrm{j}\omega t} dt = \int_{-c}^{0} \left(1 + \frac{t}{c}\right) e^{-\mathrm{j}\omega t} dt + \int_{0}^{c} \left(1 - \frac{t}{c}\right) e^{-\mathrm{j}\omega t} dt =$$

$$= \frac{1}{\omega^2 c}(-e^{\mathrm{j}\omega c} + 2 - e^{-\mathrm{j}\omega c}) = \frac{4}{\omega^2 c} \sin^2 \frac{\omega c}{2}$$

Aplicant propietats. Observem que

$$q_c'(t) = \left.\begin{cases} 1/c & \text{si } -c < t < 0 \\ -1/c & \text{si } 0 < t < c \\ 0 & \text{si } |t| > c \end{cases}\right\} = \frac{1}{c} p_{\frac{c}{2}}\left(t + \frac{c}{2}\right) - \frac{1}{c} p_{\frac{c}{2}}\left(t - \frac{c}{2}\right)$$



Sabem que: $p_a(t - t_0) \longleftrightarrow e^{-\mathtt{j}\omega t_0} \dfrac{2}{\omega} \sin(\omega a)$

Per tant: $\mathcal{F}\{q_c'(t)\} = \dfrac{2}{\omega c} e^{\mathtt{j}\omega\frac{c}{2}} \sin\dfrac{\omega c}{2} - \dfrac{2}{\omega c} e^{-\mathtt{j}\omega\frac{c}{2}} \sin\dfrac{\omega c}{2} =$

$$= \frac{2}{\omega c} \sin\frac{\omega c}{2} (e^{\mathtt{j}\omega\frac{c}{2}} - e^{-\mathtt{j}\omega\frac{c}{2}}) = \frac{4\mathtt{j}}{\omega c} \sin\frac{\omega c}{2}$$

Aplicant la propietat de derivació: $\mathcal{F}\{q_c'(t)\} = \mathtt{j}\omega Q_c(\omega)$ obtenim

$$Q_c(\omega) = \frac{4}{\omega^2 c} \sin\frac{\omega c}{2}$$

Transformada de funcions reals

$$f(t) \longleftrightarrow \mathcal{F}(\omega) = R(\omega) + \mathtt{j} I(\omega)$$

$$f \text{ real} \Leftrightarrow f(t) = \overline{f(t)} \Leftrightarrow F(\omega) = \overline{F(-\omega)} \quad \text{[P. de conjugació]}$$

Això és equivalent a:

$$R(\omega) + \mathtt{j} I(\omega) = R(-\omega) - \mathtt{j} I(-\omega) \Leftrightarrow \begin{cases} R(\omega) = R(-\omega) \\ I(\omega) = -I(-\omega) \end{cases}$$

- La part real de $F(\omega)$ és una funció parella.
- La part imaginària de $F(\omega)$ és una funció senar.

Com a conseqüència:

- f és una funció real i parella si i només si la seva transformada de Fourier és una funció real i parella.

- f és una funció real i senar si i només si la seva transformada de Fourier és una funció imaginària pura i senar.

- Si f és real, a partir de la descomposició de f en suma d'una funció parella i una funció senar es dedueix:

$$f(t) = f_p(t) + f_s(t) \longleftrightarrow F(\omega) = R(\omega) + \mathtt{j}I(\omega) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_p(t) \longleftrightarrow R(\omega) \\ f_s(t) \longleftrightarrow \mathtt{j}I(\omega) \end{cases}$$

Transformacions sinus i cosinus

Definició

La transformada cosinus de la funció real $f(t)$ és:

$$\mathcal{F}_C\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t)\cos(\omega t)\,dt$$

La transformada sinus de la funció real $f(t)$ és:

$$\mathcal{F}_S\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t)\sin(\omega t)\,dt$$

Observació

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty}(f_p(t)+f_s(t))e^{-j\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty}(f_p(t)+f_s(t))(\cos\omega t - \mathtt{j}\sin\omega t)\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_p(t)\cos\omega t\,dt - \mathtt{j}\int_{-\infty}^{+\infty} f_s(t)\sin\omega t\,dt =$$

$$= 2\int_0^{+\infty} f_p(t)\cos\omega t\,dt - 2\mathtt{j}\int_0^{+\infty} f_s(t)\sin\omega t\,dt = 2\mathcal{F}_C\{f_p(t)\} - 2\mathtt{j}\mathcal{F}_S\{f_s(t)\}$$

Transformacions sinus i cosinus, funcions parelles i senars

Tenint en compte que $f(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{\mathtt{j}\omega t}\,d\omega$:

- f parella $\Rightarrow \begin{cases} \mathcal{F}\{f(t)\} = 2\mathcal{F}_C\{f(t)\} \\ f(t) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} F_c(\omega)\cos\omega t\,d\omega \end{cases}$

- f senar $\Rightarrow \begin{cases} \mathcal{F}\{f(t)\} = -2\mathtt{j}\mathcal{F}_S\{f(t)\} \\ f(t) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} F_s(\omega)\sin\omega t\,d\omega \end{cases}$

Igualtat de Parseval

La igualtat de Parseval proporciona una relació entre l'energia de $f(t)$ i la de la seva transformada.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2\, d\omega.$$

El producte de convolució

Definició El producte de convolució de dues funcions integrables f i g és la funció

$$(f * g)(t) = f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \cdot g(t-s)\, ds$$

Propietats

- $f * g = g * f$
- $f * (g + h) = f * g + f * h$
- $(f * g) * h = f * (g * h)$

Teorema de convolució

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$$

$$g(t) \longleftrightarrow G(\omega)$$

- Convolució en temps

$$f(t) * g(t) \longleftrightarrow F(\omega) \cdot G(\omega)$$

- Convolució en freqüència

$$f(t) \cdot g(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} F(\omega) * G(\omega)$$

6.4 Funcions generalitzades

δ de Dirac

Definició La funció generalitzada δ es defineix a partir del valor d'una integral:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \delta(t-t_0)\cdot g(t)\,dt = \begin{cases} g(t_0) & \text{si } t_0 \in (\alpha,\beta) \\ 0 & \text{si } t_0 \notin [\alpha,\beta] \end{cases}$$

Propietats

- $\delta(t) = \delta(-t)$
- $f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$
- $f(t) * \delta(t) = f(t)$
- $f(t) * \delta(t-t_0) = f(t-t_0)$

Propietats relacionades amb la transformada de Fourier

- $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mathrm{j}\omega t}\delta(t)\,dt = 1$
- $\mathcal{F}\{\delta(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mathrm{j}\omega t}\delta(t-t_0)\,dt = e^{-\mathrm{j}\omega t_0}$

  També es pot calcular aplicant la propietat de translació:

$$\mathcal{F}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-\mathrm{j}\omega t_0}\mathcal{F}\{\delta(t)\} = e^{-\mathrm{j}\omega t_0}$$

- Aplicant la propietat de dualitat:

$$\mathcal{F}\{1\} = 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

$$\mathcal{F}\{e^{-\mathrm{j}t\alpha}\} = 2\pi\delta(-\omega-\alpha) = 2\pi\delta(\omega+\alpha)$$

- Si $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$, aleshores, aplicant el teorema de convolució:

$$\mathcal{F}\{f(t)*\delta(t)\} = \mathcal{F}\{f(t)\}\mathcal{F}\{\delta(t)\} = F(\omega)$$

$$\mathcal{F}\{f(t)*\delta(t-t_0)\} = F(\omega)e^{-\mathrm{j}\omega t_0} = \mathcal{F}\{f(t-t_0)\}$$

Transformada de les funcions sinus i cosinus

Observació

- Hem vist, utilitzant la funció δ que:

$$\begin{array}{rcl} 1 & \longleftrightarrow & 2\pi\delta(\omega) \\ e^{\mathrm{j}\omega_0 t} & \longleftrightarrow & 2\pi\delta(\omega-\omega_0) \end{array}$$

  Aquestes transformades NO es poden calcular directament, perquè NO EXISTEIXEN les integrals:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mathrm{j}\omega t} dt \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\mathrm{j}t\omega_0} e^{-\mathrm{j}t\omega} dt$$

- Aquestes funcions no compleixen la condició suficient d'existència de la transformada de Fourier:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \, dt = +\infty \qquad \text{per a } f(t) = 1 \text{ i } f(t) = e^{\mathrm{j}\omega_0 t}$$

Transformada de les funcions sinus i cosinus

La transformada de les funcions sinus i cosinus tampoc es pot calcular directament, perquè NO EXISTEIX la integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mathtt{j}\omega t} \sin t \, dt$$

i tampoc es compleix la condició suficient d'existència de la transformada de Fourier.

Utilitzant

$$e^{\mathtt{j}\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

i la fórmula d'Euler, s'obté:

$$\cos\omega_0 t = \frac{e^{\mathtt{j}\omega_0 t} + e^{-\mathtt{j}\omega_0 t}}{2} \quad \longleftrightarrow \quad \pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$$

$$\sin\omega_0 t = \frac{e^{\mathtt{j}\omega_0 t} - e^{-\mathtt{j}\omega_0 t}}{2j} \quad \longleftrightarrow \quad \mathtt{j}\pi(\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0))$$

Funció u de Heaviside

Definició La funció u de Heaviside es defineix per:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Propietats

- $u'(t) = \delta(t)$
- $u(t) = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{sgn}(t))$, on

$$\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ -1 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Transformada de Fourier de la funció de Heaviside

$$u(t) \longleftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{\mathtt{j}\omega}$$

$$u(t - t_0) \longleftrightarrow e^{-j\omega t_0}\left(\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{\mathtt{j}\omega}e^{-\mathtt{j}\omega t_0}$$

Propietat d'integració

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$$

$$\int_{\infty}^{t} f(s)\, ds \longleftrightarrow \frac{1}{\mathrm{j}\omega} F(\omega) + \pi F(0)\delta(\omega), \text{ per a } \omega \neq 0$$

Funcions periòdiques

$f(t)$ funció T-periòdica, amb sèrie de Fourier:

$$f(t) \simeq \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\mathtt{j}k\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

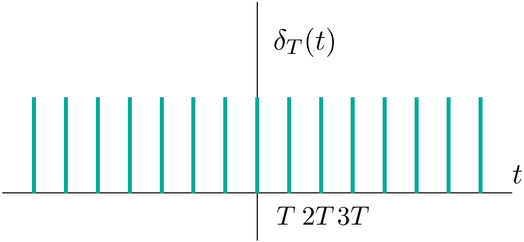
La transformada de Fourier de f és:

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, \mathcal{F}\{e^{\mathtt{j}k\omega_0 t}\} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, \delta(\omega - k\omega_0).$$

Tren de deltes

Definició Un tren de deltes és la funció generalitzada

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$



Transformada d'un tren de deltes

Considerem el tren de deltes com l'extensió T-periòdica de $\delta(t)$.
Els coeficients de la seva sèrie de Fourier complexa són:

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)\, e^{-\mathtt{j}k\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T} e^{-\mathtt{j}k\omega_0 0} = \frac{1}{T}$$

Per tant:

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{\mathtt{j}k\omega_0 t} = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\mathtt{j}\omega_0 k t}$$

I la transformada de Fourier de $\delta_T(t)$ és:

$$\mathcal{F}\{\delta_T(t)\} = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\, \delta(\omega - k\omega_0) = \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0) = \omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega)$$

La transformada de Fourier d'un tren de deltes és també un tren de deltes.

Extensió periòdica com a producte de convolució amb un tren de deltes

Si $f(t)$ està definida en l'interval $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$, la seva extensió periòdica es pot expressar com:

$$f(t) * \delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t - kT)$$