Matemàtiques del Disseny

Geometria euclidiana

EPSEVG & MA IV; Mercè Claverol i Antoni Ras

Índex

Espai afí euclidià

Espai afí euclidià

Tot espai afí té un espai vectorial associat. Direm que l'espai afí és euclidià quan l'espai vectorial associat té una mètrica o producte escalar.

Als espais afins euclidians:

- Podrem calcular distàncies entre punts i/o varietats
- Tindrem referències ortonormals
- Distingirem les afinitats que respecten les distàncies: els desplaçaments

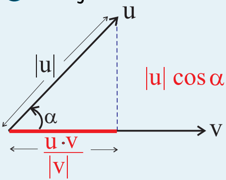
Producte escalar

Donats dos vectors: $u = (u_1, \cdots, u_n)$, $v = (v_1, \cdots, v_n)$, $\widehat{uv} = \alpha$

1. Producte escalar de dos vectors:

$$\boxed{u \cdot v = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n \; = \; |u|\,|v| \cos\alpha}$$

2. Mòdul: $|u| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}$
   $\dfrac{u}{|u|}$ és un vector unitari
3. Criteri de perpendicularitat per a $u \neq 0$ i $v \neq 0$:
   $u \perp v \iff u \cdot v = 0$
4. Projecció d'un vector u sobre un altre v:



$$|u| \cos\alpha = |u| \frac{u \cdot v}{|v|\,|u|} = \frac{u \cdot v}{|v|}$$

Projecció: $\dfrac{u \cdot v}{|v|}$

Vector projecció: $\dfrac{u \cdot v}{|v|} \dfrac{v}{|v|}$

Producte vectorial

*Només a $\mathbb{R}^3$ tenim una altra operació que ens serà molt útil el producte vectorial $u \times v$:

$$u = (u_1, u_2, u_3),\ v = (v_1, v_2, v_3),\ \widehat{uv} = \alpha$$

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

- Si u i v són LI, $u \times v$ és un vector perpendicular a u i a v.
- Mòdul: $\boxed{|u \times v| = |u|\,|v| \sin\alpha}$
- Propietats: $u \times v = -v \times u$, $\quad \lambda u \times v = u \times \lambda v = \lambda(u \times v)$
  $(u \times v) \times w \neq u \times (v \times w)$, $\quad u \times (v + w) = u \times v + u \times w$
- Si u i v són LD, $u \times v = 0$

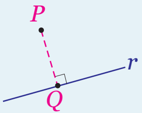
Perpendicularitat. Distàncies

Varietats (rectes i/o plans) perpendiculars (o ortogonals)

$$U \perp V \iff \overrightarrow{P_1P_2} \perp \overrightarrow{Q_1Q_2}, \quad \forall P_1, P_2 \in U, \forall Q_1, Q_2 \in V$$

- Distància entre dos punts : $d(P,Q) = |\overrightarrow{PQ}|$
- Distància d'un punt a una recta :
  $d(P,r) = d(P,Q)$ on $Q = r \cap s$ i s és la recta $\perp r$ que passa per P.

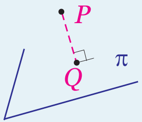
A $\mathbb{R}^2$: $d(P,r) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$,
$P = (x_0, y_0)$, $r = \{ax + by + c = 0\}$



- Distància d'un punt a un pla :
  $d(P,\pi) = d(P,Q)$ on $Q = \pi \cap s$ i s és la recta $\perp \pi$ que passa per P.

$$d(P,\pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

$P = (x_0, y_0, z_0)$, $\pi = \{ax + by + cz + d = 0\}$



Referències ortonormals

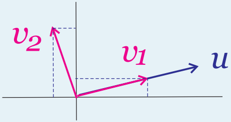
Una referència afí és ortonormal quan ho és la base del subespai associat:
$\{O; v_1, \cdots, v_n\}$ ortonormal $\Longleftrightarrow \{v_1, \cdots, v_n\}$ ortonormal

$$\{v_1, \cdots, v_n\} \text{ ortonormal} \Longleftrightarrow \begin{cases} |v_i| = 1, \ \forall i \\ v_i \cdot v_j = 0, \ \forall i, j, i \neq j \end{cases}$$

Construcció d'una base ortonormal

- de $\mathbb{R}^2$ a partir d'un vector $u \neq \overrightarrow{0}$, $u \in \mathbb{R}^2$:

- $v_1 := \dfrac{u}{|u|}$
- ${v_2}^T := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v_1^T$

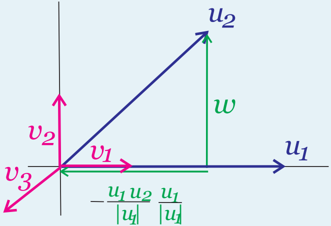


Aleshores $\{v_1, v_2\}$ és una base ortonormal

Referències ortonormals

Construcció d'una base ortonormal

- de $\mathbb{R}^3$ a partir de 2 vectors LI $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^3$:
  - $v_1 := \dfrac{u_1}{|u_1|}$
  - $v_2 := \dfrac{w}{|w|}$ on $w := u_2 - \dfrac{u_1 \cdot u_2}{u_1 \cdot u_1} u_1$
  - $v_3 := v_1 \times v_2$. Aleshores, $\{v_1, v_2, v_3\}$ és una base ortonormal

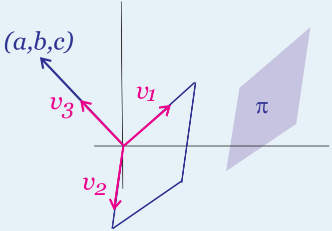


Observa que v_1, v_2 defineixen el mateix pla que u_1, u_2.

Referències ortonormals

Construcció d'una base ortonormal

- de $\mathbb{R}^3$ adaptada a un pla $\pi : \{ax + by + cz = d\}$:
  - $v_3 := \dfrac{(a,b,c)}{|(a,b,c)|}$
  - $v_1 := \dfrac{u_1}{|u_1|}$ on u_1 és qualsevol vector tal que $u_1 \cdot (a,b,c) = 0$
  - $v_2 := v_3 \times v_1$. Aleshores, $\{v_1, v_2, v_3\}$ és una base ortonormal



Observa que v_1, v_2 pertanyen al pla $\{ax + by + cz = 0\}$.

Desplaçaments

Isometria

Una isometria és una aplicació entre espais vectorials $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que conserva el producte escalar (i, per tant, la norma també).

$$\phi \text{ isometria} \iff u \cdot v = \phi(u) \cdot \phi(v) \iff |u| = |\phi(u)|$$

Desplaçament

Un desplaçament és una afinitat $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que conserva distàncies:

$$d(P, Q) = d(f(P), f(Q))$$

Això equival a dir que l'aplicació lineal ϕ associada a f és una isometria.

Desplaçaments

Els desplaçaments són les afinitats que conserven les distàncies.

A continuació donem la llista dels desplaçaments a $\mathbb{R}^2$ i a $\mathbb{R}^3$.

* Podeu trobar les descripcions dels desplaçaments (matrius ampliades i il·lustracions gràfiques) en el tema d'afinitats.

Desplaçaments a $\mathbb{R}^2$

- T_v Translació de vector v
- $G_{P,\theta}$ Gir d'angle θ i centre P
- Simetria
  - S_r axial respecte de la recta r
  - S_P central de centre el punt P

Desplaçaments

Desplaçaments a $\mathbb{R}^3$

- T_v Translació de vector v
- G_θ^r Gir d'angle θ al voltant d'una recta r
- Simetria
  - S_r axial respecte de la recta r
  - S_π especular respecte del pla π
  - S_P central de centre el punt P