Matemàtiques del Disseny

Geometria diferencial de corbes

EPSEVG & MA IV; Mercè Claverol i Antoni Ras

Índex

Geometria diferencial de corbes

Corba parametritzada regular

És una aplicació d'un interval de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{array}{rcl} \alpha : I \subset \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^n \\ t & \longmapsto & \alpha(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t)) \end{array}$$

Que és *derivable* (com a mínim 3 cops) en tots els punts i tal que

$$\boxed{\alpha'(t) \neq \vec{0}, \quad \forall t \in I}$$

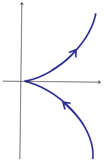
De t se'n diu el paràmetre de la corba.

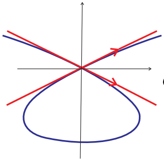
Exemples. Corbes al pla, $n = 2$, o a l'espai, $n = 3$:

- Recta: $\alpha(t) = (a + tv_1, b + tv_2)$, $t \in \mathbb{R}$ on (a, b) és un punt de la recta i (v_1, v_2) el vector director.
- Circumferència: $\alpha(t) = (a + r\cos t, b + r\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ on (a, b) és el centre i r el radi.
- Hèlix circular: $\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ on a és el radi i b el pas.

Geometria diferencial de corbes

$\alpha(t) = (t^2, t^3)$





$\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$

- La corba $\alpha(t) = (t^2, t^3)$ *no és regular* perquè $\alpha'(0) = (0,0)$ (al punt $(0,0)$ hi ha una punxa).
- La corba $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$ *és regular* perquè $\alpha'(t) = (3t^2 - 4, 2t) \neq \vec{0}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
  Observa que la corba no és injectiva: passa dos cops pel $(0,0)$ $(\alpha(-2) = \alpha(2) = (0,0))$, però són punts diferents perquè les rectes tangents també són diferents.

Observació: *La manera en què s'escull la parametrització és important*: $\alpha(t) = (t, 0)$ i $\beta(t) = (t^3, 0)$ tenen el mateix graf (la recta $y = 0$) però a $t = 0$ $\alpha(t)$ és regular i $\beta(t)$ no ho és.

Longitud

Donada una corba $\alpha(t)$, $t \in I$, amb $\alpha(t)$ derivable, la seva longitud entre dos punts ve donada per:

$$\boxed{L(a,b) = \int_a^b |\alpha'(t)|\,\mathrm{dt},\ (a,b) \subset I}$$

Exemples:

- Longitud d'una circumferència de radi a:
  $\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t)$, $t \in \mathbb{R}$
  $\alpha'(t) = (-a\sin t, a\cos t)$
  $L(0,2\pi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t}\,\mathrm{dt} = \int_0^{2\pi} a\,\mathrm{dt} = 2\pi a$
- Longitud d'una hèlix circular:
  $\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $t \in \mathbb{R}$
  $\alpha'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$
  $L(0,2\pi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\,\mathrm{dt} = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{dt} = 2\pi\sqrt{a^2+b^2}$

Curvatura

Donada una corba regular $\alpha(t)$, $t \in I$, es defineix la curvatura, $k(t)$ com:

$$\boxed{k(t) = \frac{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3},\ t \in I}$$

Ex. Calculem la curvatura en un punt arbitrari t d'una circumferència de radi a

$\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t)$, $t \in (0, 2\pi)$

$\alpha'(t) = (-a\sin t, a\cos t) \Longrightarrow |\alpha'(t)| = a$

$\alpha''(t) = (-a\cos t, -a\sin t)$

Com que les corbes són de $\mathbb{R}^2$, per calcular $\alpha'(t) \times \alpha''(t)$ afegim una $3^{\underline{a}}$ coordenada igual a 0:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ -a\sin t & a\cos t & 0 \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, a^2) \Longrightarrow |(0, 0, a^2)| = a^2$$

$$k(t) = \frac{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3} = \frac{a^2}{a^3} = \frac{1}{a} \quad \text{(és constant igual a 1/radi)}$$

Torsió

Donada una corba regular $\alpha(t)$, $t \in I$, es defineix la torsió, $\tau(t)$ com:

$$\boxed{\tau(t) = \frac{-\det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t))}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|^2},\ t \in I}$$

Ex. Calculem la torsió en un punt arbitrari t d'una hèlix circular:

$\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $t \in \mathbb{R}$; $\alpha'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$,

$\alpha''(t) = (-a\cos t, -a\sin t, 0)$, $\alpha'''(t) = (a\sin t, -a\cos t, 0)$

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = (ab\sin t, -ab\cos t, a^2)$$

$$|\alpha'(t) \times \alpha''(t)| = a(\sqrt{b^2 + a^2})$$

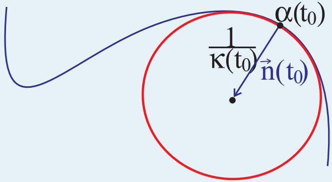
$$-\det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t)) = -\begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \\ a\sin t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix} = -a^2 b$$

$$\tau(t) = \frac{-a^2 b}{a^2(b^2 + a^2)} = \frac{-b}{b^2 + a^2}$$

Cercle osculador

Donada una corba $\alpha(t)$, $t \in I$, i un punt $\alpha(t_0)$ de la mateixa tal que $k(t_0) \neq 0$ es defineix el cercle osculador com la circumferència que:

1. Està dins del pla determinat per $\alpha(t_0)$ i els vectors tangent i normal.
2. Té radi: $\dfrac{1}{k(t_0)}$.



3. Té centre al punt: $\alpha(t_0) + \dfrac{1}{k(t_0)}\vec{n}(t_0)$ Aquest punt s'anomena centre de curvatura.

Cercle osculador

Ex. Calculem el cercle osculador en el punt $P = (a, 0)$ de l'el·lipse : $\alpha(t) = (a\cos t, b\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, sabent que $\vec{n}(0) = (-1, 0)$ (veure pàg. 16)

$$P = (a, 0) = \alpha(t_0) \Longrightarrow t_0 = 0$$

$$\alpha'(t) = (-a\sin t, b\cos t) \Longrightarrow \alpha'(0) = (0, b), \quad |\alpha'(0)| = b$$

$$\alpha''(t) = (-a\cos t, -b\sin t) \Longrightarrow \alpha''(0) = (-a, 0)$$

$$\alpha'(0) \times \alpha''(0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & b & 0 \\ -a & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, ab) \Longrightarrow |(0, 0, ab)| = ab$$

$$k(0) = \frac{|\alpha'(0) \times \alpha''(0)|}{|\alpha'(0)|^3} = \frac{ab}{b^3} = \frac{a}{b^2}$$

$$\vec{n}(0) = (-1, 0)$$

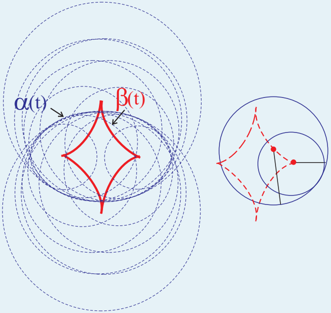
Radi $= \dfrac{1}{k(0)} = \dfrac{b^3}{ab} = \dfrac{b^2}{a}$

Centre $= \alpha(0) + \dfrac{1}{k(0)}\vec{n}(0) = (a, 0) + \dfrac{b^2}{a}(-1, 0) = (\dfrac{a^2 - b^2}{a}, 0)$

Equació de la circumferència: $(x - (a^2 - b^2)/a)^2 + y^2 = (b^2/a)^2$

Evoluta

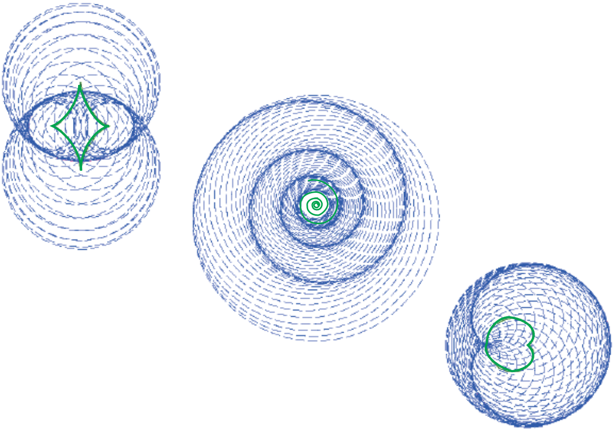
Donada una corba $\alpha(t)$, $t \in I$ es defineix la seva evoluta, $\beta(t)$, com la corba descrita pels centres de curvatura.



Exemple. Donada l'el·lipse: $\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t)$, $t \in (0, 2\pi)$, la seva evoluta és:

$$\beta(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k(t)}\vec{n}(t) = \left(\frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t, \frac{b^2 - a^2}{b} \sin^3 t \right) \text{ (veure figura)}$$

Cercle osculador. Evoluta



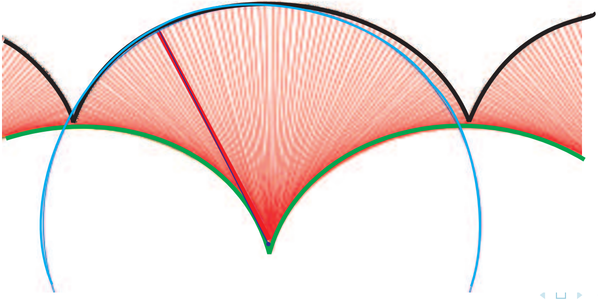
Cercles osculadors i evolutes de l'el·lipse, l'espiral logarítmica i de la cardiode.

Cercle osculador. Evoluta

Exemple. Cicloide amb els vectors normals i l'evoluta.

Veiem diferents posicions dels cercles osculadors on podem observar:

- com els cercles osculadors s'ajusten a la corba,
- els vectors que uneixen els punts de la cicloide amb els seus centres (centres de curvatura) són els vectors normals i
- aquests centres són els que descriuen l'evoluta.

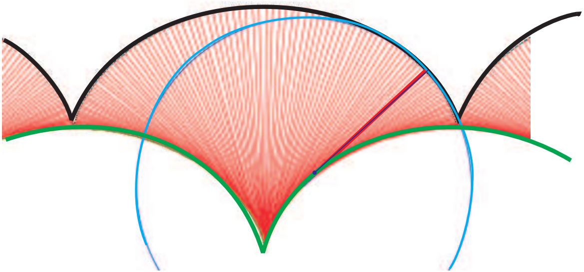


Cercle osculador. Evoluta

Exemple. Cicloide amb els vectors normals i l'evoluta.

Veiem diferents posicions dels cercles osculadors on podem observar:

- com els cercles osculadors s'ajusten a la corba,
- els vectors que uneixen els punts de la cicloide amb els seus centres (centres de curvatura) són els vectors normals i
- aquests centres són els que descriuen l'evoluta.

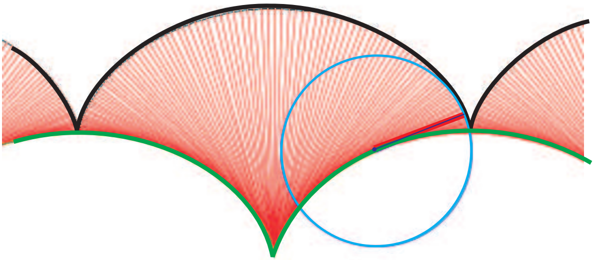


Cercle osculador. Evoluta

Exemple. Cicloide amb els vectors normals i l'evoluta.

Veiem diferents posicions dels cercles osculadors on podem observar:

- com els cercles osculadors s'ajusten a la corba,
- els vectors que uneixen els punts de la cicloide amb els seus centres (centres de curvatura) són els vectors normals i
- aquests centres són els que descriuen l'evoluta.

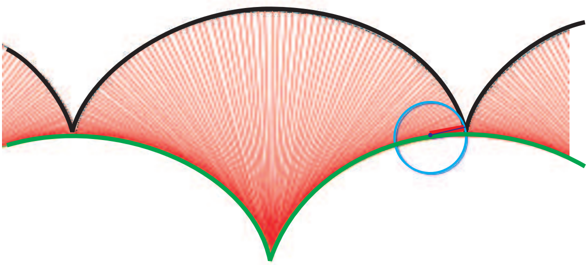


Cercle osculador. Evoluta

Exemple.Cicloide amb els vectors normals i l'evoluta.

Veiem diferents posicions dels cercles osculadors on podem observar:

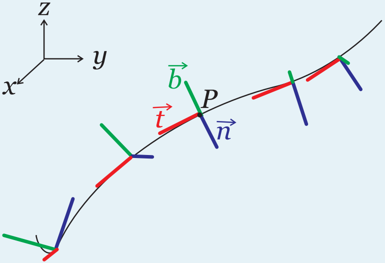
- com els cercles osculadors s'ajusten a la corba,
- els vectors que uneixen els punts de la cicloide amb els seus centres (centres de curvatura) són els vectors normals i
- aquests centres són els que descriuen l'evoluta.



Triedre de Frenet

És una referència afí ortonormal de $\mathbb{R}^3$, adaptada a la corba (regular). En cada punt $P=\alpha(t_0)$ la referència és: $\{P;\vec{t}(t_0),\vec{b}(t_0),\vec{n}(t_0)\}$ on els vectors es diuen vector tangent, binormal i normal .

- $P=\alpha(t_0)$
- $\vec{t}(t_0)=\dfrac{\alpha'(t_0)}{|\alpha'(t_0)|}$
- $\vec{b}(t_0)=\dfrac{\alpha'(t_0)\times\alpha''(t_0)}{|\alpha'(t_0)\times\alpha''(t_0)|}$
- $\vec{n}(t_0)=\vec{b}(t_0)\times t(t_0)$



Observació: A partir de les derivades del triedre, Fórmules de Frenet:

$$\vec{t}'=k\,|\alpha'|\,\vec{n},\quad \vec{b}'=\tau\,|\alpha'|\,\vec{n},\quad \vec{n}'=-k\,|\alpha'|\,\vec{t}-\tau\,|\alpha'|\,\vec{b}$$

s'obtenen les fórmules que hem donat per a curvatura k i torsió τ, que caracteritzen la corba.

Triedre de Frenet

Exemple.
Corba: El·lipse $\alpha(t) = (a\cos t, b\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$
Punt: *arbitrari*

Triedre de Frenet:

$$\vec{t}(t) = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} = \frac{(-a\sin t, b\cos t, 0)}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}$$

$$\vec{b}(t) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|} = \frac{(0,0,ab)}{ab} = (0,0,1),$$

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -a\sin t & b\cos t & 0 \\ -a\cos t & -b\sin t & 0 \end{vmatrix} = (0,0,ab) \Longrightarrow |(0,0,ab)| = ab$$

$$\vec{n}(t) = \vec{b}(t) \times \vec{t}(t) = \frac{(-b\cos t, -a\sin t, 0)}{\sqrt{b^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t}}$$

$$\vec{b}(t) \times \vec{t}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ -a\sin t & b\cos t & 0 \end{vmatrix} = \frac{(-b\cos t, -a\sin t, 0)}{\sqrt{b^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t}}$$

Triedre de Frenet

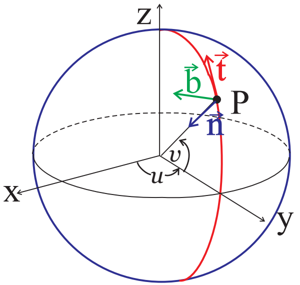
Exemple.
Corba: Meridià $\alpha(v) = (\frac{\sqrt{2}}{2}\cos v, \frac{\sqrt{2}}{2}\cos v, \sin v),\ v \in (-\pi/2, \pi/2)$
Punt: $P = (1/2, 1/2, \sqrt{2}/2)$

Triedre de Frenet:
$P = (1/2, 1/2, \sqrt{2}/2) = \alpha(\pi/4)$
$\Longrightarrow v_0 = \pi/4$

$$\vec{t}(v_0) = \frac{\alpha'(v_0)}{|\alpha'(v_0)|} \overset{v_0=\pi/4}{=} (-1/2, -1/2, \sqrt{2}/2)$$

$$\vec{b}(v_0) = \frac{\alpha'(v_0) \times \alpha''(v_0)}{|\alpha'(v_0) \times \alpha''(v_0)|} \overset{v_0=\pi/4}{=} (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0)$$

$$\vec{n}(v_0) = \vec{b}(v_0) \times \vec{t}(v_0) \overset{v_0=\pi/4}{=} (-1/2, -1/2, -\sqrt{2}/2)$$



Triedre de Frenet

Exemple.

Corba: Paral·lel $\alpha(u) = (\frac{\sqrt{2}}{2}\cos u, \frac{\sqrt{2}}{2}\sin u, \frac{\sqrt{2}}{2}), u \in (0, 2\pi)$

Punt: $P = (1/2, 1/2, \sqrt{2}/2)$

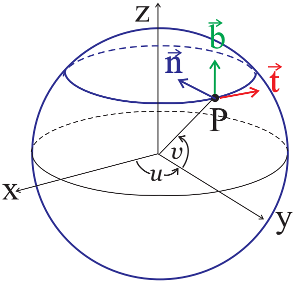
Triedre de Frenet:

$P = (1/2, 1/2, \sqrt{2}/2) = \alpha(\pi/4)$
$\Longrightarrow u_0 = \pi/4$

$$\vec{t}(u_0) = \frac{\alpha'(u_0)}{|\alpha'(u_0)|} \stackrel{u_0=\pi/4}{=} (\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$$

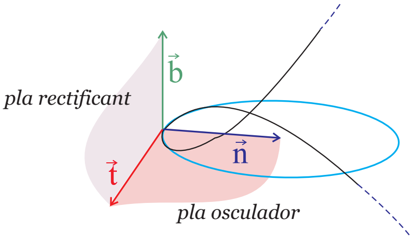
$$\vec{b}(u_0) = \frac{\alpha'(u_0) \times \alpha''(u_0)}{|\alpha'(u_0) \times \alpha''(u_0)|} \stackrel{u_0=\pi/4}{=} (0, 0, 1)$$

$$\vec{n}(u_0) = \vec{b}(u_0) \times \vec{t}(u_0) \stackrel{u_0=\pi/4}{=} (\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, 0)$$



Geometria diferencial de corbes

- El pla osculador és el determinat per: $\vec{n}$, $\vec{t}$.
- El pla rectificant és el generat per: $\vec{t}$, $\vec{b}$.



- La curvatura és la velocitat angular amb què gira el vector tangent. Ens diu quant es desvia la corba d'estar continguda en la recta tangent.
- La torsió és la velocitat angular amb què gira el pla rectificant. Ens diu quant es desvia la corba d'estar continguda en el pla osculador.

Disseny de corbes

Continuïtat geomètrica en el punt d'unió de dues corbes

1. Continuïtat G^0: Quan l'extrem final d'una corba és l'extrem inicial de l'altra.
2. Continuïtat G^1: Quan hi ha continuïtat G^0 i, a més, coincideixen les rectes tangents a cada corba en el punt d'unió

3. Continuïtat G^2: Quan hi ha continuïtat G^1 i, a més, coincideixen els cercles osculadors a cada corba en el punt d'unió.