Escola Superior d'Agricultura de Barcelona

Universitat Politècnica de Catalunya

EXERCICIS I PROBLEMES RESOLTS DE MATEMÀTIQUES I

Mònica Blanco
Marta Ginovart

CONTINGUTS

1. NOMBRES REALS

N **indica el conjunt de nombres naturals (els nombres de comptar).**

Z **indica el conjunt dels nombres enters (els naturals i els seu oposats). Els nombres naturals es poden considerar elements de Z** $(N \subset Z)$.

Q **indica el conjunt de fraccions d'enters. Cada fracció és un** **<u>nombre racional</u>** **i es representa de la forma** $\frac{p}{q}$ **(on *p*, *q* són enters amb** $q \neq 0$**). Dues fraccions** $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$, $\frac{r}{s}$ $(s \neq 0)$ **representen el mateix nombre racional si** $ps = qr$**. Els nombres enters es poden considerar pertanyents a *Q* fent la identificació de cada enter *n* amb la fracció** $\frac{n}{1}$.

<u>Operacions a *Q*</u>:

Suma: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

Producte: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

<u>Ordre a *Q*</u>: $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ **quan** $bd(ad - bc) \leq 0$

<u>Representació decimal d'un nombre racional:</u>

Teorema de la divisió entera[1]**: Donats enters positius *p*, *q* existeixen enters *n*, *r*** $(0 \leq r < q)$ **únics amb** $p = qn + r$.

Aprofitant aquest teorema podem expressar la fracció $\frac{p}{q}$ **fent successives divisions enteres:**

$$\frac{p}{q} = n + \frac{r}{q} = n + 10^{-1}\left(\frac{10r}{q}\right) = n + 10^{-1}\left(a_1 + \frac{r_1}{q}\right) = n + a_1 10^{-1} + 10^{-2}\left(\frac{10r_1}{q}\right) =$$

$$= n + a_1 10^{-1} + 10^{-2}\left(a_2 + \frac{r_2}{q}\right) = n + a_1 10^{-1} + a_2 10^{-2} + 10^{-3}\left(\frac{10r_2}{q}\right) = \ldots =$$

$$= n + a_1 10^{-1} + a_2 10^{-2} + \ldots + a_i 10^{-i} + 10^{-i-1}\left(\frac{10r_i}{q}\right) = \ldots$$

Això equival a dir que $\frac{p}{q} = n, a_1 a_2 a_3 \ldots$ **Els** a_i **es mouen entre 0 i 9. Els** r_i **són positius i més petits que *q*, la qual cosa implica que hi ha un nombre finit de valors enters** r_i. **Aquest desenvolupament és finit (quan algun** r_i **assoleix el valor 0), o bé és infinit (si els** r_i **són sempre diferents de 0). En el darrer cas, necessàriament s'ha de repetir algun** r_i. **Aleshores, quan s'obté un valor** r_i **que ja havia sortit, el cicle torna a començar: hem trobat un nombre decimal periòdic.**

[1] Veure AGUILÓ, F., BOADAS, J., GARRIGA, E., VILLALBÍ, R.: *Temes Clau de Càlcul*, edicions de la UPC, p. 42

Les expressions decimals infinites no periòdiques no es corresponen amb cap nombre racional, sinó amb els <u>nombres irracionals</u>. La unió dels dos conjunts de nombres, racionals i irracionals, és el conjunt *R* dels reals, que es pot identificar amb una recta.

1.1. Doneu la representació decimal dels nombres racionals següents utilitzant la descomposició en potències de 10: **a)** $\mathbf{\frac{22}{7}}$ **b)** $\mathbf{\frac{3}{4}}$ **c)** $\mathbf{\frac{1}{3}}$ **d)** $\mathbf{\frac{23}{12}}$

a) $\mathbf{\frac{22}{7}}$

$$\frac{22}{7}=3+\frac{1}{7}=3+10^{-1}\cdot\frac{10}{7}=3+10^{-1}\left(1+\frac{3}{7}\right)=$$

$$=3+1\cdot10^{-1}+10^{-1}\left(\frac{3}{7}\right)=3+1\cdot10^{-1}+10^{-2}\left(\frac{30}{7}\right)=$$

$$=3+1\cdot10^{-1}+10^{-2}\left(4+\frac{2}{7}\right)=3+1\cdot10^{-1}+4\cdot10^{-2}+10^{-2}\left(\frac{2}{7}\right)=$$

$$=3+1\cdot10^{-1}+4\cdot10^{-2}+10^{-3}\left(\frac{20}{7}\right)=3+1\cdot10^{-1}+4\cdot10^{-2}+10^{-3}\left(2+\frac{6}{7}\right)=$$

$$=3+1\cdot10^{-1}+4\cdot10^{-2}+2\cdot10^{-3}+10^{-3}\left(\frac{6}{7}\right)=$$

$$=3+1\cdot10^{-1}+4\cdot10^{-2}+2\cdot10^{-3}+10^{-4}\left(\frac{60}{7}\right)=$$

$$=3+1\cdot10^{-1}+4\cdot10^{-2}+2\cdot10^{-3}+10^{-4}\left(8+\frac{4}{7}\right)=$$

$$=3+1\cdot10^{-1}+4\cdot10^{-2}+2\cdot10^{-3}+8\cdot10^{-4}+10^{-4}\left(\frac{4}{7}\right)=$$

$$=3+1\cdot10^{-1}+4\cdot10^{-2}+2\cdot10^{-3}+8\cdot10^{-4}+10^{-5}\left(\frac{40}{7}\right)=$$

$$=3+1\cdot10^{-1}+4\cdot10^{-2}+2\cdot10^{-3}+8\cdot10^{-4}+10^{-5}\left(5+\frac{5}{7}\right)=$$

$$=3+1\cdot10^{-1}+4\cdot10^{-2}+2\cdot10^{-3}+8\cdot10^{-4}+5\cdot10^{-5}+10^{-5}\left(\frac{5}{7}\right)=$$

$$=3+1\cdot10^{-1}+4\cdot10^{-2}+2\cdot10^{-3}+8\cdot10^{-4}+5\cdot10^{-5}+10^{-6}\left(\frac{50}{7}\right)=$$

$$=3+1\cdot10^{-1}+4\cdot10^{-2}+2\cdot10^{-3}+8\cdot10^{-4}+5\cdot10^{-5}+10^{-6}\left(7+\frac{1}{7}\right)=$$

$$=3+1\cdot10^{-1}+4\cdot10^{-2}+2\cdot10^{-3}+8\cdot10^{-4}+5\cdot10^{-5}+7\cdot10^{-6}+10^{-6}\left(\frac{1}{7}\right)$$

Ens tornem a trobar $\frac{1}{7}$ com al començament. Aleshores, es repetirà el cicle. Per tant, $\frac{22}{7}$ és un nombre decimal periòdic equivalent a $3,\overline{142857}$.

b) $\mathbf{\frac{3}{4}}$

$$\frac{3}{4}=10^{-1}\left(\frac{30}{4}\right)=10^{-1}\left(7+\frac{2}{4}\right)=7\cdot10^{-1}+10^{-1}\left(\frac{2}{4}\right)=7\cdot10^{-1}+10^{-2}\left(\frac{20}{4}\right)=$$
$$=7\cdot10^{-1}+5\cdot10^{-2}=0{,}75$$

c) $\mathbf{\frac{1}{3}}$

$$\frac{1}{3}=10^{-1}\left(\frac{10}{3}\right)=10^{-1}\left(3+\frac{1}{3}\right)=3\cdot10^{-1}+10^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)=3\cdot10^{-1}+10^{-2}\left(\frac{10}{3}\right)=$$
$$=3\cdot10^{-1}+10^{-2}\left(3+\frac{1}{3}\right)=3\cdot10^{-1}+3\cdot10^{-2}+10^{-2}\left(\frac{1}{3}\right)=\ldots=0{,}\widehat{3}$$

d) $\mathbf{\frac{23}{12}}$

$$\frac{23}{12}=1+\frac{11}{12}=1+10^{-1}\left(\frac{10\cdot11}{12}\right)=1+10^{-1}\left(9+\frac{2}{12}\right)=1+9\cdot10^{-1}+10^{-2}\left(\frac{10\cdot2}{12}\right)=$$
$$=1+9\cdot10^{-1}+10^{-2}\left(1+\frac{8}{12}\right)=1+9\cdot10^{-1}+1\cdot10^{-2}+10^{-3}\left(\frac{10\cdot8}{12}\right)=$$
$$=1+9\cdot10^{-1}+1\cdot10^{-2}+10^{-3}\left(6+\frac{8}{12}\right)=1+9\cdot10^{-1}+1\cdot10^{-2}+6\cdot10^{-3}+10^{-3}\left(\frac{8}{12}\right)=$$
$$=1+9\cdot10^{-1}+1\cdot10^{-2}+6\cdot10^{-3}+10^{-4}\left(\frac{10\cdot8}{12}\right)=\ldots=1{,}91\widehat{6}$$

1.2. Verifiqueu si $\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}+\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}$ és un nombre enter.
<u>Indicació</u>: tingueu en compte, escollint *a* i *b* escaients, que:
$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)(a^2+2ab+b^2-3ab)=(a+b)\left[(a+b)^2-3ab\right]$**.**
Quan $a=\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}$ i $b=\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}$, aleshores:

$$a^3+b^3=\left(\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}\right)^3+\left(\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}\right)^3=45+29\sqrt{2}+45-29\sqrt{2}=90$$
$$a\cdot b=\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}=\sqrt[3]{\left(45+29\sqrt{2}\right)\left(45-29\sqrt{2}\right)}=$$
$$=\sqrt[3]{45^2-29^2\cdot2}=\sqrt[3]{343}=7$$

Fixeu - vos que l'expressió de $a\cdot b$ és ben senzilla.

$$(a+b)\left[(a+b)^2-3\cdot7\right]=90\Rightarrow(a+b)^3-21(a+b)-90=0$$

Volem trobar les arrels enteres d'aquesta equació de tercer grau en $a+b$. Descomposarem el polinomi $(a+b)^3-21(a+b)-90$ fent servir Ruffini. Provant amb els divisors de 90 obtenim:

	1	0	-21	-90
6		6	36	90
	1	6	15	0

No podem seguir fent Ruffini, doncs l'última fila correspon al polinomi $(a+b)^2 + 6(a+b) + 15$. Si busquem les seves arrels:

$$a+b = \frac{-6 \pm \sqrt{36-60}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-24}}{2}$$

resulta que són no reals.

Així doncs, l'única arrel real del polinomi $(a+b)^3 - 21(a+b) - 90$ és $a+b=6$ que, en particular, és entera.

1.3. Trobeu el conjunt de nombres reals que són solució de la següent inequació: $(x+1)(x-3) > 0$

El producte serà positiu quan els dos factors tinguin el mateix signe:

$(+)\cdot(+)$ o $(-)\cdot(-)$

Per tant:

Cas 1:

$$\begin{cases} x+1>0 \Leftrightarrow x>-1 \\ x-3>0 \Leftrightarrow x>3 \end{cases}$$

La intersecció dels conjunts de solucions d'aquestes inequacions és l'interval $(3,+\infty)$.

Cas 2:

$$\begin{cases} x+1<0 \Leftrightarrow x<-1 \\ x-3<0 \Leftrightarrow x<3 \end{cases}$$

La intersecció dels conjunts de solucions d'aquestes inequacions és l'interval $(-\infty,-1)$.

Així, la solució general serà la unió d'aquests dos intervals: $S = (-\infty,-1) \cup (3,\infty)$.

Mètode alternatiu: Ho podem fer d'una altra forma. Els zeros o arrels dels factors de primer grau del producte separen la recta dels reals segons el signe de l'expressió, doncs per als valors que es troben abans de cada arrel aquesta expressió pren un signe diferent del que pren en els valors que es troben després de l'arrel. Entre dues arrels el signe es manté constant ja que un canvi de signe implica l'existència d'una arrel. Per tant:

$$x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$$

$$x-3=0 \Leftrightarrow x=3$$

N'hi ha prou amb avaluar els factors en un valor intermig de cada interval. Per exemple:

- De l'interval $(-\infty,-1)$ agafem $x=-2$ i avaluem els factors:

$$x+1 \to -1$$

$$x-3 \to -5$$

Aleshores, el signe de $(x+1)(x-3)$ en l'interval $(-\infty,-1)$ és $(-)\cdot(-)=(+)$.

- De l'interval $(-1,3)$ prenem el valor $x=0$. Llavors:

$$x+1 \to +1$$

$$x-3 \to -3$$

i el signe de $(x+1)(x-3)$ en l'interval $(-1,3)$ és $(+)\cdot(-)=(-)$.

- Finalment, de l'interval $(3,+\infty)$ considerem el valor $x=4$:

$$x+1 \to +5$$

$$x-3 \to +1$$

Per tant, el signe de $(x+1)(x-3)$ en l'interval $(3,+\infty)$ és $(+)\cdot(+)=(+)$.

Resumim en una taula aquests resultats:

	$(-\infty,-1)$	$(-1,3)$	$(3,+\infty)$
$x+1$	-	+	+
$x-3$	-	-	+
$(x+1)(x-3)$	+	-	+

Ens interessen les columnes amb signe positiu a la darrera fila.
La solució és $S=(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$.

1.4. Trobeu el conjunt de nombres reals que són solució de la següent inequació:

$$\frac{x+1}{x^2-4}<0$$

Si la fracció ha de ser negativa vol dir que numerador i denominador han de tenir signes diferents. És a dir:

$$\frac{(+)}{(-)} \text{ o } \frac{(-)}{(+)}$$

<u>Cas 1</u>:

$$\begin{cases} x+1>0 \Leftrightarrow x>-1 \\ x^2-4<0 \Leftrightarrow x^2<4 \Leftrightarrow |x|<2 \Leftrightarrow -2<x<2 \end{cases}$$

Les solucions són les x que verifiquen les dues desigualtats, és a dir, les x que pertanyen a l'interval $(-1,2)$.

<u>Cas 2</u>:

$$\begin{cases} x+1<0 \Leftrightarrow x<-1 \\ x^2-4>0 \Leftrightarrow |x|>2 \Leftrightarrow x<-2 \text{ o } x>2 \end{cases}$$

Les solucions en aquest cas seran les x tals que $x<-2$, és a dir que pertanyen a l'interval $(-\infty,-2)$.

Per tant, la solució general serà la unió de les solucions particulars: $S=(-\infty,-2)\cup(-1,2)$

<u>Mètode alternatiu</u>: També ho podem resoldre amb la taula dels signes. Busquem les arrels del numerador i del denominador:

$$x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$$

$$x^2-4=0 \Leftrightarrow x=-2,\ x=2$$

Aquestes arrels divideixen la recta real segons el signe de la fracció. Calculem el valor del numerador i del denominador en un punt intermig de cada interval, doncs entre dues arrels el signe és constant.

- De l'interval $(-\infty,-2)$ agafem $x=-3$ i avaluem els factors:

$$x+1 \to -2$$

$$x^2-4 \to +5$$

Aleshores, el signe de $\dfrac{x+1}{x^2-4}$ en l'interval $(-\infty,-2)$ és $(-)\cdot(+)=(-)$.

- De l'interval $(-2,-1)$ prenem el valor $x=-1{,}5$. Llavors:

$$x+1 \to -0{,}5$$

$$x^2-4 \to -1{,}75$$

i el signe de $\dfrac{x+1}{x^2-4}$ en l'interval $(-2,-1)$ és $(-)\cdot(-)=(+)$.

- De l'interval $(-1,2)$ agafem $x=0$ i avaluem els factors:

$$x+1 \to +1$$
$$x^2-4 \to -4$$

Aleshores, el signe de $\dfrac{x+1}{x^2-4}$ en l'interval $(-1,2)$ és $(+)\cdot(-)=(-)$.

- Finalment, de l'interval $(2,+\infty)$ considerem el valor $x=4$:

$$x+1 \to +5$$
$$x^2-4 \to +12$$

Per tant, el signe de $\dfrac{x+1}{x^2-4}$ en l'interval $(2,+\infty)$ és $(+)\cdot(+)=(+)$.

Resumim en una taula aquests resultats:

	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,2)$	$(2,+\infty)$
x+1	-	-	+	+
x^2-4	+	-	-	+
$\dfrac{x+1}{x^2-4}$	-	+	-	+

Ens interessen les columnes amb signe negatiu a la darrera fila.
Així, la solució serà $S=(-\infty,-2)\cup(-1,2)$.

1.5. Trobeu el conjunt de nombres reals que són solució de la següent inequació:

$$\mathbf{|x^2-1|\le 1}$$

A partir de la definició del valor absolut podem distingir dos casos:
<u>Cas 1</u>:

$$x^2-1\le 1 \text{ si } x^2-1\ge 0$$

que equival a estudiar el sistema:

$$\begin{cases} x^2-1\ge 0 \Leftrightarrow x^2\ge 1 \Leftrightarrow |x|\ge 1 \Leftrightarrow x\le -1 \text{ o } x\ge 1 \\ x^2-1\le 1 \Leftrightarrow x^2\le 2 \Leftrightarrow |x|\le \sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2}\le x\le \sqrt{2} \end{cases}$$

La solució serà la intersecció dels conjunts de solucions de les dues inequacions, és a dir, les x que pertanyen a

$$\left[-\sqrt{2},-1\right]\cup\left[1,\sqrt{2}\right].$$

<u>Cas 2</u>:

$$-x^2+1\le 1 \text{ si } x^2-1<0$$

que equival a estudiar el sistema:

$$\begin{cases} x^2-1<0 \Leftrightarrow x^2<1 \Leftrightarrow |x|<1 \Leftrightarrow -1<x<1 \\ 1-x^2\le 1 \Leftrightarrow -x^2\le 0 \Leftrightarrow x^2\ge 0 \end{cases}$$

La segona desigualtat es compleix sempre. Per tant, la solució en aquest cas serà l'interval

(-1,1).

La solució final és la unió de les solucions obtingudes en cadascun dels casos:

$$S=\left[-\sqrt{2},-1\right]\cup(-1,1)\cup\left[1,\sqrt{2}\right]=\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$$

1.6. Trobeu el conjunt de nombres reals que són solució de la següent inequació:

$$\mathbf{\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}>0}$$

Primer s'escau de fer les operacions per després poder estudiar el signe de la fracció resultant.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}=\frac{1-x+x}{x(1-x)}=\frac{1}{x(1-x)}>0$$

Com que l'expressió ha de ser positiva, numerador i denominador han de tenir el mateix signe. El numerador és positiu, per tant només s'ha d'estudiar el cas en què el denominador sigui positiu. És a dir $x(1-x)>0$

Ens trobem amb un producte positiu. Aleshores, cal que els dos factors tinguin el mateix signe.

Cas 1:

$$\begin{cases} x>0 \\ 1-x>0 \Leftrightarrow x<1 \end{cases}$$

La solució d'aquest primer sistema és l'interval (0,1).

Cas 2:

$$\begin{cases} x<0 \\ 1-x<0 \Leftrightarrow x>1 \end{cases}$$

Aquest segon sistema no té solució, ja que les dues condicions són incompatibles.

Així doncs, la solució final és l'interval $S=(0,1)$.

1.7. Trobeu el conjunt de nombres reals que són solució de la següent inequació:

$$\mathbf{(x-\pi)(x+5)(x-3)>0}$$

Resoldrem aquest problema a partir de la taula dels signes. Primer hem de buscar les arrels de cadascun dels factors:

$$x-\pi=0 \Leftrightarrow x=\pi$$

$$x+5=0 \Leftrightarrow x=-5$$

$$x-3=0 \Leftrightarrow x=3$$

Després, avaluem cada factor en un punt intermig de cada interval:

	$(-\infty,-5)$	$(-5,3)$	$(3,\pi)$	$(\pi,+\infty)$
$x-\pi$	-	-	-	+
$x+5$	-	+	+	+
$x-3$	-	-	+	+
$(x-\pi)(x+5)(x-3)$	-	+	-	+

Les columnes que ens interessen són aquelles on apareix un (+) a la darrera fila. Així doncs, la solució serà $S=(-5,3)\cup(\pi,\infty)$.

1.8. Quins valors reals compleixen la desigualtat $\mathbf{\frac{3x}{-7}>1}$?

Per resoldre aquest apartat convé tenir en compte que sempre que canviem de signe els dos membres de la desigualtat hem de canviar el sentit de la desigualtat.

$$\frac{3x}{(-7)}>1 \Leftrightarrow 3x<-7 \Leftrightarrow x<-\frac{7}{3}$$

La solució en forma d'interval és: $S = \left(-\infty, -\frac{7}{3}\right)$

1.9. Resoleu $\frac{y+4}{3+y} > 2$. És $y = -5$ solució de la desigualtat anterior?

Primer escriurem aquesta desigualtat de forma que el problema quedi reduït a l'estudi del signe d'una fracció.

$$\frac{y+4}{y+3} > 2 \Leftrightarrow \frac{y+4}{y+3} - 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{y+4-2y-6}{y+3} > 0 \Leftrightarrow \frac{-(y+2)}{y+3} > 0 \Leftrightarrow \frac{y+2}{y+3} < 0$$

La fracció serà negativa quan el denominador i el numerador tinguin signes oposats.

Cas 1:

$$\begin{cases} y+2 > 0 \Leftrightarrow y > -2 \\ y+3 < 0 \Leftrightarrow y < -3 \end{cases}$$

Aquest cas no té sentit, les dues desigualtats són incompatibles.

Cas 2:

$$\begin{cases} y+2 < 0 \Leftrightarrow y < -2 \\ y+3 > 0 \Leftrightarrow y > -3 \end{cases}$$

La solució en aquest cas és l'interval (–3, –2).

La solució de la nostra desigualtat és el conjunt $S = (-3,-2)$. Per tant, $y = -5$ no n'és una solució.

Una comprovació directa també corrobora aquesta última afirmació:

$$\frac{-5+4}{-5+3} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} < 2$$

1.10. Obteniu els valors x reals per als quals $|7x+5| < 3$.

Fent servir la definició de valor absolut distingim els casos següents:

Cas 1:

Hem de resoldre la inequació $7x+5 < 3$ quan $7x+5 \geq 0$.

$$\begin{cases} 7x+5 < 3 \Leftrightarrow 7x < -2 \Leftrightarrow x < -\frac{2}{7} \\ 7x+5 \geq 0 \Leftrightarrow 7x \geq -5 \Leftrightarrow x \geq -\frac{5}{7} \end{cases}$$

La solució d'aquest cas és l'interval $\left[-\frac{5}{7}, -\frac{2}{7}\right)$, que resulta de la intersecció de les solucions de les dues inequacions.

Cas 2:

Ara resoldrem la inequació $-7x-5 < 3$ quan $7x+5 < 0$.

$$\begin{cases} -7x-5 < 3 \Leftrightarrow -7x < 8 \Leftrightarrow 7x > -8 \Leftrightarrow x > -\frac{8}{7} \\ 7x+5 < 0 \Leftrightarrow 7x < -5 \Leftrightarrow x < -\frac{5}{7} \end{cases}$$

La solució d'aquest cas és l'interval $\left(-\frac{8}{7}, -\frac{5}{7}\right)$.

La solució general és la unió de les solucions dels dos casos anteriors:

$$S=\left(-\frac{8}{7},-\frac{5}{7}\right)\cup\left[-\frac{5}{7},-\frac{2}{7}\right)=\left(-\frac{8}{7},-\frac{2}{7}\right)$$

1.11. Si x, y són dos nombres reals, demostreu:

a) $\boldsymbol{x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)}$

b) $\boldsymbol{x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\ldots+xy^{n-2}+y^{n-1})}$

a) $\boldsymbol{x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)}$

Multipliquem els dos factors del membre de la dreta de l'equació i ajuntem els termes semblants:

$$(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3+x^2y+xy^2-x^2y-xy^2-y^3=x^3-y^3$$

b) $\boldsymbol{x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\ldots+xy^{n-2}+y^{n-1})}$

Multipliquem els dos factors del membre de la dreta de l'equació i ajuntem els termes semblants, considerant la forma dels termes que formen part dels punts suspensius:

$$(x-y)\left(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\ldots+xy^{n-2}+y^{n-1}\right)=$$
$$=x^n+x^{n-1}y+x^{n-2}y^2+\ldots+x^2y^{n-2}+xy^{n-1}-\left(x^{n-1}y+x^{n-2}y^2+\ldots+xy^{n-1}+y^n\right)=$$
$$=x^n+x^{n-1}y+x^{n-2}y^2+\ldots+x^2y^{n-2}+xy^{n-1}-x^{n-1}y-x^{n-2}y^2-\ldots-xy^{n-1}-y^n=$$
$$=x^n-y^n$$

Utilitzant una notació més compacta (amb el símbol de sumatori, $\sum$), també podem demostrar la igualtat:

$$(x-y)\left(\sum_{i=0}^{n-1}x^{n-1-i}y^i\right)=\sum_{i=0}^{n-1}xx^{n-1-i}y^i-\sum_{i=0}^{n-1}yx^{n-1-i}y^i=$$
$$=\sum_{i=0}^{n-1}x^{n-i}y^i-\sum_{i=0}^{n-1}x^{n-1-i}y^{i+1}=x^n+\sum_{i=1}^{n-1}x^{n-i}y^i-\sum_{i=0}^{n-2}x^{n-1-i}y^{i+1}-y^n$$

Així,

$$(x-y)\left(\sum_{i=0}^{n-1}x^{n-1-i}y^i\right)=x^n-y^n+\sum_{i=1}^{n-1}x^{n-i}y^i-\sum_{i=0}^{n-2}x^{n-(i+1)}y^{i+1}=$$
$$\overset{(1)}{=}x^n-y^n+\sum_{i=1}^{n-1}x^{n-i}y^i-\sum_{j=1}^{n-1}x^{n-j}y^j=x^n-y^n$$

(1) al segon sumatori fem la següent translació d'índex: $j=i+1$

1.12. Si x, y són dos nombres reals, demostreu que $|x+y|\le|x|+|y|$.

Distingirem les diferents possibilitats que tenim segons quin sigui el signe dels valors reals de x i de y.

1) Si $x\ge 0$ i $y\ge 0$:

$$|x+y|=x+y=|x|+|y|$$

Per tant: $|x+y| \le |x|+|y|$, doncs es compleix la igualtat.

2) Si $x \le 0$ i $y \le 0$:

$$|x+y| = -(x+y) = (-x)+(-y) = |x|+|y|$$

Per tant també es verifica el que volíem demostrar, doncs també obtenim la igualtat.

3) Si $x \ge 0$ i $y \le 0$:

$|x+y| \le |x|+|y|$ és equivalent a $|x+y| \le x+(-y)$, per tant hem de demostrar que $|x+y| \le x-y$.

Si $x+y \ge 0$, aleshores:

$$|x+y| = x+y \le x-y \Leftrightarrow y \le -y$$

que és cert, doncs $y \le 0, -y \ge 0$.

Si, pel contrari, $x+y \le 0$, aleshores:

$$|x+y| = -(x+y) \le x-y \Leftrightarrow -x \le x$$

que és cert, doncs $x \ge 0, -x \le 0$.

4) Si $x \le 0$ i $y \ge 0$:

Aquest cas és el simètric del que acabem de demostrar.

Mètode alternatiu: Hi ha una altra manera d'abordar la demostració. Cal recordar que $|x| = \sqrt{x^2}$.

$$\left(|x+y|\right)^2 = (x+y)^2 = x^2+2xy+y^2 \overset{(1)}{\le} x^2+2|x||y|+y^2 =$$
$$= |x|^2+2|x||y|+|y|^2 = \left(|x|+|y|\right)^2$$

(1) Si $xy \ge 0$, aleshores $xy = |xy|$ i tenim la igualtat. Si $xy < 0$, aleshores $xy < |xy|$ i estem incrementant el resultat.

Finalment, com que les bases són positives, podem treure arrel quadrada als dos costats:

$$\left(|x+y|\right)^2 \le \left(|x|+|y|\right)^2 \Rightarrow |x+y| \le |x|+|y|$$

que és el que volíem demostrar.

1.13. Si $0 < x < y$, aleshores tenim: $x < \sqrt{xy} < \frac{x+y}{2} < y$

Mirem primer què passa, donant valors numèrics a *x* i a *y*:

$$x = 4$$
$$y = 9$$
$$0 < 4 < 9$$
$$\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6$$
$$\frac{4+9}{2} = \frac{13}{2} = 6{,}5$$

Per tant, es verifica: $4 < \sqrt{4 \cdot 9} < \frac{4+9}{2} < 9$

Per provar-ho en general, demostrarem cadascuna de les diferents parts.

- Si $0 < x < y \overset{(1)}{\Rightarrow} x^2 < xy \Rightarrow \sqrt{x^2} < \sqrt{xy} \Rightarrow x < \sqrt{xy}$
- Si x, y són valors positius i diferents, existeixen *a* i *b* de manera que $x = a^2, y = b^2$.

- Si $x < y \Rightarrow x + y < y + y \Rightarrow \frac{1}{2}(x + y) < \frac{1}{2}(2y) \Rightarrow \frac{1}{2}(x + y) < y \Rightarrow \frac{x + y}{2} < y$, d'on obtenim la desigualtat que restava demostrar.

(1) multipliquem per un valor positiu, x en aquest cas.
La primera desigualtat ja està demostrada.

Recordem que $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab > 0$, aleshores, substituint:

$$x + y - 2ab > 0 \Rightarrow \frac{x + y}{2} > ab = \sqrt{x}\sqrt{y} = \sqrt{xy} \Rightarrow \sqrt{xy} < \frac{x + y}{2}.$$

La segona desigualtat queda demostrada.
Aquesta darrera desigualtat podem demostrar-la d'una altra forma:

$$0 < x < y \Rightarrow (x - y)^2 > 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2xy > 0 \Rightarrow x^2 + y^2 > 2xy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy > 2xy + 2xy \Rightarrow (x + y)^2 > 4xy \Rightarrow \frac{(x + y)^2}{4} > xy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{(x + y)^2}{4}} > \sqrt{xy} \Rightarrow \frac{x + y}{2} > \sqrt{xy}$$

Així ja tenim demostrades totes les desigualtats:

$$x < \sqrt{xy} < \frac{x + y}{2} < y$$

1.14. Si x i y són dos nombres reals positius, aleshores la mitjana aritmètica dels dos és més gran o igual que la mitjana geomètrica.

Només cal veure que en la demostració de l'exercici anterior, en la segona part únicament hem utilitzat que els valors x i y són valors positius, així la mitjana geomètrica sempre és més petita que la mitjana aritmètica. Per tenir desigualtat estricta x i y han de ser diferents. En cas que x i y siguin tenim també igualtat amb les dues mitjanes:

$$\sqrt{xy} = \sqrt{xx} = \sqrt{x^2} = x = \frac{2x}{2} = \frac{x + x}{2} = \frac{x + y}{2}$$

1.15. Si x, y són dos nombres reals qualssevol, demostreu que $|xy| = |x||y|$

Cal distingir diferents casos segons quins siguin els signes de x i y.

1) $x \geq 0, y \geq 0 \Rightarrow |xy| = xy = |x||y|$
2) $x \geq 0, y \leq 0 \Rightarrow |xy| = -xy = x(-y) = |x||y|$
3) $x \leq 0, y \leq 0 \Rightarrow |xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|$
4) $x \leq 0, y \geq 0$ és el simètric de 2).

1.16. Si x, y són dos nombres reals qualssevol, demostreu que $|x - y| \leq |x| + |y|$.

Tenim que

$$|x - y| = |x + (-y)| \overset{(1)}{\leq} |x| + |-y| = |x| + |y| \Rightarrow |x - y| \leq |x| + |y|$$

(1) fent servir un resultat anterior 1.12.

1.17. **Si x, y són dos nombres reals qualssevol, demostreu que $|x|-|y| \le |x-y|$.**

Tenim que

$$|x| = |x-y+y| = |(x-y)+(y)| \overset{(1)}{\le} |x-y| + |y|$$

(1) fent servir un resultat anterior 1.12.

D'aquí en surt

$$|x| - |y| \le |x-y|\ .$$

1.18. **Utilitzant,si convé, els resultats dels exercicis anteriors, demostreu que si x i y no s'anul·len simultàniament:**

a) $x^2 + xy + y^2 \neq 0$

b) $x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 \neq 0$

c) $x^2 + xy + y^2 > 0$

d) $4x^2 + 6xy + 4y^2 > 0$

a) $x^2 + xy + y^2 \neq 0$

Utilitzarem el mètode de demostració per reducció a l'absurd. És a dir, suposarem que $x \neq 0$ o $y \neq 0$ i que $x^2 + xy + y^2 = 0$, i que això ens porta a quelcom absurd. Utilitzant un resultat anterior (1.11 a)), tenim:

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$

i, per tant, $x^3 - y^3 = (x-y)\cdot 0 \Rightarrow x^3 = y^3 \Rightarrow x = y$.

Però cal observar que, si $x = y$, aleshores:

$$x^2 + xy + y^2 = x^2 + xx + x^2 = 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 = y$$

Contradicció!

Així doncs $x^2 + xy + y^2 \neq 0$ sempre que $x \neq 0$ o $y \neq 0$.

b) $x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 \neq 0$

Hem d'utilitzar informació que tenim com ho hem fet a l'apartat anterior. Per exemple, si considerem $n = 5$:

$$x^5 - y^5 = (x-y)\underbrace{(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)}_{(*)}$$

Si $(*) = 0$, llavors $x^5 - y^5 = 0 \Rightarrow x^5 = y^5 \Rightarrow x = y$, però aleshores:

$$x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 = x^4 + x^4 + x^4 + x^4 + x^4 = 5x^4 = 0 \Rightarrow x = 0 = y$$

Contradicció!

c) $x^2 + xy + y^2 > 0$

Si volem veure que $x^2 + xy + y^2 > 0$ i ja sabem que no és zero, podem suposar que $x^2 + xy + y^2 < 0$ i arribar a una contradicció.

Ja sabem que $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \ge 0$ (I)

Si considerem $x^2 + xy + y^2 < 0$, llavors $-x^2 - xy - y^2 > 0$ (II).
Sumant (I) i (II) resulta: $xy \geq 0$.
Però cal anar alerta. Si $xy \geq 0$ aleshores $x^2 + xy + y^2 \geq 0$, contra el que hem suposat. Per tant, contradicció!.

d) $\mathbf{4x^2 + 6xy + 4y^2 > 0}$

Observem que $4(x+y)^2 = 4(x^2 + y^2 + 2xy) = 4x^2 + 8xy + 4y^2 \geq 0$.
Si suposem que $4x^2 + 6xy + 4y^2 \leq 0$ i sumem les dues desigualtats següents:

$$\begin{cases} 4x \quad + 8xy + 4y^2 \geq 0 \\ -4x^2 - 6xy - 4y^2 \geq 0 \end{cases}$$

resulta $2xy \geq 0 \Rightarrow xy \geq 0$, la qual cosa ens porta, com abans, a una contradicció. Així doncs $4x^2 + 6xy + 4y^2 > 0$.

1.19. Doneu el conjunt dels nombres reals tals que $\mathbf{-5x + \frac{3}{4} < \frac{1}{2}x - 1}$

Passarem les *x* a un costat de la desigualtat i els termes independents a l'altre:

$$-5x + \frac{3}{4} < \frac{1}{2}x - 1 \Leftrightarrow -5x - \frac{1}{2}x < -1 - \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{-10x - x}{2} < \frac{-4-3}{4} \Leftrightarrow -\frac{11x}{2} < -\frac{7}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{11x}{2} > \frac{7}{4} \Leftrightarrow 11x > \frac{14}{4} \Leftrightarrow x > \frac{14}{44} \Leftrightarrow x > \frac{7}{22}$$

El conjunt solució és l'interval $S = \left(\frac{7}{22}, +\infty\right)$.

1.20. Descriviu el conjunt dels nombres reals tals que $\mathbf{9x^2 + 6x + 1 < 0}$

El polinomi $9x^2 + 6x + 1$ es pot escriure com un binomi al quadrat:

$$9x^2 + 6x + 1 = (3x+1)^2$$

que sempre és positiu o nul. És a dir, mai no pot ser negatiu. Aleshores, la solució serà el conjunt buit.
També ho podem estudiar d'una altra forma. Recordem que les arrels del polinomi separen R segons el signe:

$$9x^2 + 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \quad \text{(arrel doble)}$$

	$\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$	$\left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$
$9x^2 + 6x + 1$	+	+

Per tant, a ambdós costats de $-\frac{1}{3}$, el polinomi és positiu i a $-\frac{1}{3}$ val zero. Així doncs, la inequació proposada no té solució.

1.21. Doneu el conjunt dels nombres reals tals que $\mathbf{3x+\frac{x+2}{x-1}-4<0}$

Operant, obtindrem una fracció de la qual n'estudiarem el signe.

$$3x+\frac{x+2}{x-1}-4=\frac{3x^2-3x+x+2-4x+4}{x-1}=\frac{3x^2-6x+6}{x-1}$$

$$3x+\frac{x+2}{x-1}-4<0 \Leftrightarrow \frac{3x^2-6x+6}{x-1}<0$$

Quan numerador i denominador tinguin signes diferents, la fracció serà negativa. Primer estudiarem les arrels del polinomi del numerador per conèixer els seus canvis de signe:

$$3x^2-6x+6=0$$

$$x=\frac{6\pm\sqrt{36-72}}{6}=\frac{6\pm\sqrt{-36}}{6}$$

Com que $3x^2-6x+6$ no té arrels reals, el numerador té signe constant en tota la recta real.
I l'única arrel del denominador és $x=1$.

	$(-\infty,1)$	$(1,+\infty)$
$3x^2-6x+6$	+	+
$x-1$	-	+
$\frac{3x^2-6x+6}{x-1}$	-	+

La solució, doncs, serà l'interval $\mathrm{S}=(-\infty,1)$.

També es pot fer de la següent manera: un cop hem comprovat que $3x^2-6x+6$ és sempre positiu només cal imposar que el denominador sigui negatiu perquè la fracció tingui signe negatiu.

1.22. Doneu el conjunt dels nombres reals tals que $\mathbf{|x-5|=7}$

Fent servir la definició del valor absolut:

$$\begin{cases} x-5=7 & \text{si} \quad x-5\geq 0 \\ -x+5=7 & \text{si} \quad x-5<0 \end{cases}$$

d'on obtenim:

$$\begin{cases} x=12 \\ x=-2 \end{cases}$$

Per tant, la solució és el conjunt $\mathrm{S}=\{-2,12\}$.

1.23. Doneu el conjunt dels nombres reals tals que $|x-2|+|x+1|<10$

Apliquem la definició de valor absolut als dos sumands:

$$|x-2|=\begin{cases} x-2 & \text{si} \quad x-2\geq 0 \\ -x+2 & \text{si} \quad x-2<0 \end{cases}$$

$$|x+1|=\begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x+1\geq 0 \\ -x-1 & \text{si} \quad x+1<0 \end{cases}$$

d'on, combinant les possibilitats, surten els quatre casos següents:
Cas 1: Si $x-2\geq 0$ i $x+1\geq 0$, és a dir, si $x\geq 2$ i $x\geq -1$:

$$\begin{aligned}&x-2+x+1<10\\&2x-1<10\\&2x<11\\&x<\frac{11}{2}\end{aligned}$$

La solució d'aquest cas és la intersecció de les desigualtats $x\geq 2$, $x\geq -1$ i $x<\frac{11}{2}$, és a dir, l'interval $\left[2,\frac{11}{2}\right)$.

Cas 2: Si $x-2\geq 0$ i $x+1<0$, és a dir, si $x\geq 2$ i $x<-1$:

$$\begin{aligned}&x-2-(x+1)<10\\&x-2-x-1<10\\&-3<10\end{aligned}$$

Encara que això és sempre cert, les condicions per a aquest cas no tenen sentit: si x és més gran o igual que 2, x no pot ser més petita que -1. Per tant, aquest cas no dóna cap solució.

Cas 3: Si $x-2<0$ i $x+1\geq 0$, és a dir, si $x<2$ i $x\geq -1$:

$$\begin{aligned}&-(x-2)+x+1<10\\&-x+2+x+1<10\\&3<10\end{aligned}$$

Això sempre és cert sota les condicions $x<2$, $x\geq -1$, que en aquest cas sí tenen sentit. Així doncs, la solució serà l'interval $[-1,2)$.

Cas 4: Si $x-2<0$ i $x+1<0$, és a dir, si $x<2$ i $x<-1$:

$$\begin{aligned}&-(x-2)-(x+1)<10\\&-x+2-x-1<10\\&-2x+1<10\\&-2x<9\\&2x>-9\\&x>-\frac{9}{2}\end{aligned}$$

La solució d'aquest cas és la intersecció de les desigualtats $x<2$, $x<-1$ i $x>-\frac{9}{2}$, és a dir, l'interval $\left(-\frac{9}{2},-1\right)$.

La solució del nostre problema és la unió de les solucions obtingudes en l'estudi dels quatre casos:

$$S=\left(-\frac{9}{2},-1\right)\cup[-1,2)\cup\left[2,\frac{11}{2}\right)=\left(-\frac{9}{2},\frac{11}{2}\right)$$

1.24. Doneu el conjunt dels nombres reals tals que $|x^2-9|<5x$

Aplicarem un altre cop la definició de valor absolut:

$$\begin{cases} x^2 - 9 < 5x & \text{si} \quad x^2 - 9 \geq 0 \\ -x^2 + 9 < 5x & \text{si} \quad x^2 - 9 < 0 \end{cases}$$

<u>Cas 1</u>: Quan $x^2 - 9 \geq 0$, aleshores $x \geq 3$ o $x \leq -3$: $x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

$x^2 - 9 < 5x \Leftrightarrow x^2 - 5x - 9 < 0$

Busquem les solucions de $x^2 - 5x - 9 = 0$:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25+36}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{61}}{2} = \begin{cases} x_1 \approx 6{,}405 \\ x_2 \approx -1{,}405 \end{cases}$$

Recordem que les arrels separen la recta real segons el signe del polinomi i que entre dues arrels el signe es manté constant. Si avaluem el signe pel polinomi en punts intermitjos de cada interval ja podrem conèixer el seu signe a cada un d'ells.

	$(-\infty, x_2)$	(x_2, x_1)	$(x_1, +\infty)$
$x^2 - 5x - 9$	+	-	+

Les columnes que ens interessen són aquelles amb signe negatiu. Per tant, la solució d'aquest cas és la intersecció de (x_2, x_1) i de $(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$, és a dir, l'interval $[3, x_1)$.

<u>Cas 2</u>: Quan $x^2 - 9 < 0$, dit una altra manera, quan $-3 < x < 3$: $x \in (-3,3)$

$-x^2 + 9 < 5x \Leftrightarrow -x^2 - 5x + 9 < 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 9 > 0$

Ara hem de trobar les solucions de $x^2 + 5x - 9 = 0$:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{61}}{2} = \begin{cases} y_1 \cong 1{,}405 \\ y_2 \cong -6{,}405 \end{cases}$$

Treballem un cop més amb la taula dels signes:

	$(-\infty, y_2)$	(y_2, y_1)	$(y_1, +\infty)$
$x^2 + 5x - 9$	+	-	+

En aquest cas, ens interessen les columnes amb signe positiu. Llavors, la solució serà la intersecció de $(-\infty, y_2)$, (y_1, ∞) i (-3,3) , o sigui, l'interval $(y_1, 3)$.

La solució del nostre exercici serà la unió de les solucions dels dos casos estudiats:

$$S = (y_1, 3) \cup [3, x_1) = (y_1, x_1) = \left(\frac{-5 + \sqrt{61}}{2}, \frac{5 + \sqrt{61}}{2} \right)$$

1.25. Un dels insectes defoliadors més importants és l'eruga "lagarta"; es nodreix de plantes a l'ombra i d'arbres fruiters. Una persona viu en un àrea en què l'eruga s'ha convertit en un problema i desitja ruixar els arbres de la seva propietat abans que tingui lloc una defoliació més important. Necessita 128 unces d'una solució composta de 3 parts d'insecticida A i 5 parts d'insecticida B. Després de preparada la solució es barreja amb aigua. Quantes unces de cada insecticida s'han d'utilitzar?

Com que 3 parts del total han de ser de l'insecticida A i 5 parts del B, podem considerar que la solució consta de 3 + 5 = 8 parts.

Aleshores, 3/8 del total, que són 128 unces, representen:

$$\frac{3 \cdot 128}{8} = 48 \text{ unces de l'insecticida A.}$$

De la mateixa manera, 5/8 de les 128 unces representen

$$\frac{5 \cdot 128}{8} = 80 \text{ unces de l'insecticida B.}$$

1.26. Una companyia fustera posseeix un bosc que té forma rectangular, de 1 x 2 quilòmetres quadrats. Si es tala una franja uniforme d'arbres en els extrems d'aquest bosc, quina haurà de ser l'amplada de la franja, si s'han de conservar 3/4 de quilòmetres quadrats de bosc?

El bosc té una superfície de $1 \times 2 = 2 \text{ km}^2$. L'amplada de la franja és la incògnita del problema. L'anomenarem *x*. Donat que un dels costats del bosc fa 1 km, *x* ha de ser més petita estrictament que 1 (i no oblidem que, per ser una amplada, ha de ser estrictament positiva). Per calcular l'àrea del rectangle interior hem de conèixer les seves dimensions, és a dir, la longitud de cadascun dels seus costats. De cada extrem del costat d'un km s'han de treure *x* km, resultant un costat de $1-2x$ km. Fent el mateix amb el costat de 2 km, s'obté un costat de $2-2x$ km. Aleshores, el rectangle interior tindrà dimensions $1-2x$ i $2-2x$ (km) respectivament.

Es vol que aquest rectangle interior tingui un àrea de 3/4 km^2. Per tant, l'equació de la superfície serà $(2-2x)(1-2x) = 3/4$. Desenvolupant el producte queda:

$$2-4x-2x+4x^2 = 3/4,$$

$$4x^2 - 6x + 5/4 = 0,$$

i traient comú denominador 4, l'equació de l'àrea del rectangle interior ve donada per $16x^2 - 24x + 5 = 0$. Resolem aquesta equació de segon grau:

$$x = \frac{24 \pm \sqrt{576-320}}{32} = \frac{24 \pm 16}{32} = \begin{cases} x_1 = 1{,}25, \\ x_2 = 0{,}25. \end{cases}$$

La primera solució queda descartada, doncs, degut a la naturalesa del problema, s'ha de verificar la condició $0 < x < 1$. Així, la franja ha de tenir una amplada de 0,25 km.

1.27. Un terreny rectangular, de 4 x 8 metres quadrats és utilitzat com a jardí. Es decideix posar un caminoi en tota la vora interior de manera que 12 metres quadrats del terreny es deixin per a flors. Quina ha de ser l'amplada del caminoi?

El jardí té una superfície de $4 \times 8 = 32 \text{ m}^2$. L'amplada del caminoi és la incògnita del problema. L'anomenarem *x*. Donat que un dels costats del jardí fa 4 m, *x* ha de ser més petita estrictament que 4 (i no oblidem que, per ser una amplada, ha de ser estrictament positiva). Per calcular l'àrea del rectangle interior hem de conèixer les seves dimensions, és a dir, la longitud de cadascun dels seus costats. De cada extrem del costat de 4 m s'han de treure *x* m, resultant un costat de $4-2x$ m. Fent el mateix amb el costat de 8 m, s'obté un costat de $8-2x$ m. Aleshores, el rectangle interior tindrà dimensions $4-2x$ i $8-2x$ (m) respectivament.

Es vol que aquest rectangle interior tingui un àrea de 12 m^2. Per tant, l'equació de la superfície serà $(4-2x)(8-2x) = 12$. Desenvolupant el producte queda:

$$32-16x-8x+4x^2 = 12,$$

$$4x^2 - 24x + 20 = 0,$$

i, simplificant, l'equació de l'àrea del rectangle interior ve donada per $x^2 - 6x + 5 = 0$. Resolem aquesta equació de segon grau:

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} = \begin{cases} x_1 = 5, \\ x_2 = 1. \end{cases}$$

La primera solució queda descartada, doncs, degut a la naturalesa del problema, s'ha de verificar la condició $0 < x < 4$. Així, el caminoi ha de tenir una amplada d'un metre.

1.28. Per a una companyia que fabrica motors de tractors, la despesa combinada de mà d'obra i material és de 450 euros per motor. Els costos fixos (les despeses d'un període determinat sense importar la producció) són de 50.000 euros. Si el preu de venda d'un motor és de 500 euros, quants s'han de vendre perquè la companyia obtingui guanys?

El guany és l'ingrés total menys el cost total. Sigui *x* el nombre de motors que s'han de vendre.

I = Ingrés per venda = preu × nombre de motors venuts = 500*x*,

C= Cost per fabricació = (cost per motor × nombre de motors fabricats) + costos fixos =

= 450*x* + 50.000,

G = Guany = *I* – *C* = $500x-(450x+50.000)=50x-50.000$.

Imposem que el guany sigui estrictament positiu i resolem la inequació resultant:

$$50x-50.000>0,$$

$$50x>50.000,$$

$$x>\frac{50.000}{50}=1.000.$$

Per tant, el nombre mínim de motors que s'haurien de vendre és 1.001.

1.29. Un pagès ha de decidir si lloga o compra un tractor. Si llogués el tractor el pagament mensual seria de 700 euros (base anual) i el cost diari (gas, oli i conductor) seria de 65 euros per cada dia que s'utilitzés. Si el comprés, el cost fix anual seria de 4.500 euros i les despeses per operació i manteniment serien de 80 euros per cada dia que el tractor fos utilitzat. Quin és el nombre mínim de dies a l'any que l'hauria d'utilitzar per justificar el lloguer en lloc de la compra?

Sigui *d* el nombre de dies per any que el tractor serà utilitzat.

Lloguer: El cost total anual és el pagament del lloguer, 12·700 = 8.400, més les despeses diàries, 65*d*.

Compra: El cost total anual és 4.500, més les despeses diàries, 80*d*.

Es vol que el lloguer del tractor sigui més econòmic que la seva compra. Per tant, es planteja la següent inequació:

$$8.400+65d<4.500+80d,$$

$$8.400-4.500<80d-65d,$$

$$3.900<15d,$$

$$\frac{3.900}{15}<d,$$

$$260<d.$$

Així doncs, el pagès hauria d'utilitzar el tractor com a mínim 261 dies per justificar el lloguer.

1.30. La companyia Ecopinso fabrica un producte que té un preu per unitat de 20 euros i una despesa per unitat de 15 euros. Si les despeses fixes són de 600.000 euros, determineu el nombre mínim d'unitats que s'han de vendre per tal que la companyia tingui guanys.
El guany (o benefici) és el resultat de restar a l'ingrés els costos:
I = Ingrés per venda = preu × nombre d'unitats venudes = $20q$,
C = Cost per fabricació =
= (cos per unitat × nombre d'unitats fabricades) + costos fixos = $15q$ + 600.000,
G = Guany = I – C = $20q-(15q+600.000)=5q-600.000$.
Imposem que el guany sigui estrictament positiu i resolem la inequació resultant:

$$5q-600.000>0,$$
$$5q>600.000,$$
$$q>\frac{600.000}{5}=120.000.$$

Per tant, com a mínim s'han de vendre q = 120.001 unitats del producte.

1.31. La despesa unitària de publicació d'una revista és de 0,65 euros. Es ven al distribuïdor per 0,60 cadascuna i la quantitat que es rep per publicitat és el 10% de la rebuda per totes les revistes venudes per sobre de les 10.000. Trobeu el mínim nombre de revistes que poden ser publicades sense pèrdua, és a dir, amb utilitat positiva (suposant que tota l'emissió serà venuda).
El guany (o benefici) és el resultat de restar a l'ingrés els costos:
I_V = Ingrés per la venda = preu × nombre de revistes venudes = $0{,}6q$,
I_P = Ingrés per publicitat = $(0{,}10)\left[0{,}6(q-10.000)\right]$, si $q>10.000$,
I = Ingrés total = $I_V + I_P$ =
$=0{,}6q+(0{,}10)\left[0{,}6(q-10.000)\right]=0{,}6q+0{,}06q-600=0{,}66q-600$,
C = Cost per publicació = cost per revista × nombre de revistes publicades =
= $0{,}65q$,
G = Guany = I – D = $0{,}66q-600-0{,}65q=(0{,}66-0{,}65)q-600=0{,}01q-600$.
Imposem que el guany sigui estrictament positiu i resolem la inequació resultant:

$$0{,}01q-600>0$$
$$0{,}01q>600$$
$$q>\frac{600}{0{,}01}=60.000.$$

Per tant, com a mínim s'han de vendre q = 60.001 revistes.

Observació: Si no imposem que el nombre de revistes superi les 10.000, l'ingrés queda reduït a l'ingrés per venda, és a dir, $0{,}6q$ i, per tant, el guany és negatiu ja que:

$$G = \text{Guany} = I - C = 0{,}6q-0{,}65q=-0{,}05q.$$

En aquest cas no podríem parlar de beneficis, només de pèrdues.

1.32. La *taxa d'actiu* d'un negoci és el quocient dels seus actius circulants (efectius, inventari de mercaderies i comptes per cobrar) i els seus passius circulants (préstecs a curt termini i impostos).
Després de consultar amb el comptable, el president d'una empresa de pinsos decideix demanar un préstec a curt termini per proveir-se de mercaderia. L'empresa té un actiu de

450.000 euros i un passiu de 90.000. Quant poden demanar en préstec si volen que la seva taxa d'actiu no sigui menor que 3?
Sigui x la quantitat demanada en préstec. Aquesta quantitat representa un increment sobre l'actiu, és a dir, l'actiu passarà a ser $450.000+x$. D'altra banda, el passiu també augmentarà en x, és a dir, passarà a ser $90.000+x$.
Si es vol que la taxa d'actiu no sigui menor que 3 s'ha de resoldre la inequació $\frac{450.000+x}{90.000+x}\geq 3$, que desenvolupada dóna:

$$
\begin{aligned}
&450.000+x\geq 3(90.000+x),\\
&450.000+x\geq 270.000+3x,\\
&450.000-270.000\geq 3x-x,\\
&180.000\geq 2x,\\
&\frac{180.000}{2}\geq x,\\
&90.000\geq x.
\end{aligned}
$$

Així doncs, la quantitat màxima que l'empresa pot demanar en préstec és de 90.000 euros.

1.33. La taxa d'actiu d'una empresa és 3,8. Si el seu actiu circulant és de 570.000 euros, quin és el seu passiu? Per augmentar els fons de reserva, quina és la quantitat màxima que pot demanar en préstec a curt termini si vol que la seva raó d'actiu no sigui menor que 2,6?
La *taxa d'actiu* és el quocient del seu actiu circulant i el seu passiu circulant. Si coneixem l'actiu i la taxa d'actiu, per conèixer el passiu només cal aïllar-lo de la fórmula:

$$3{,}8=\frac{570.000}{\text{Passiu}}$$

$$\text{Passiu}=\frac{570.000}{3{,}8}=150.000\ \text{ euros.}$$

Sigui x la quantitat que es vol demanar en préstec. Aquesta quantitat representa un increment sobre l'actiu, és a dir, l'actiu passarà a ser $570.000+x$. D'altra banda, el passiu també augmentarà en x, és a dir, passarà a ser $150.000+x$.
Si es vol que la taxa d'actiu no sigui menor que 2,6 s'ha de resoldre la inequació
$\frac{570.000+x}{150.000+x}\geq 2{,}6$:

$$
\begin{aligned}
&570.000+x\geq 2{,}6(150.000+x),\\
&570.000+x\geq 390.000+2{,}6x,\\
&570.000-390.000\geq 2{,}6x-x,\\
&180.000\geq 1{,}6x,\\
&\frac{180.000}{1{,}6}\geq x,\\
&112.500\geq x.
\end{aligned}
$$

Així doncs, la quantitat màxima que l'empresa pot demanar en préstec és de 112.500 euros.

1.34. El degà d'assumptes estudiantils d'una universitat està planejant que un grup de rock realitzi un concert en el campus. El preu del concert seria un pagament únic de 2.440 euros o un pagament de 1.000 euros més el 40% de les entrades. És probable que 800 estudiants hi assisteixin. Com a molt, quant podria cobrar el degà per entrada de manera que la segona forma de pagament no fos superior al pagament únic?

<u>1ª forma de pagament</u>: pagament únic de 2.440 euros.

<u>2ª forma de pagament</u>: sigui x el preu de l'entrada. Si suposem que vindran 800 estudiants, l'ingrés degut a les entrades venudes serà de 800x euros. Per tant, el pagament que s'haurà de fer és $1.000 + 40\%\ \text{de}\ 800x = 1.000 + 0.40 \cdot 800x = 1.000 + 320x$.

Imposem que la segona forma de pagament no sigui superior a la primera:

$$1.000 + 320x \leq 2.440,$$

$$320x \leq 2.440 - 1.000,$$

$$320x \leq 1.440,$$

$$x \leq \frac{1.440}{320} = 4{,}5.$$

Com a molt, el preu de l'entrada hauria de ser de 4,5 euros.

1.35. Resoleu la següent inequació $|x^2 - 2| + 2x < 6$

Utilitzant la definició de valor absolut podem distingir els dos casos següents:

<u>Cas 1</u>:

$$x^2 - 2 + 2x < 6 \quad \text{si} \quad x^2 - 2 \geq 0$$

que equival a estudiar el sistema:

$$\begin{cases} x^2 - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 2 \Leftrightarrow |x| \geq \sqrt{2} \Leftrightarrow x \geq \sqrt{2},\ x \leq -\sqrt{2} \\ x^2 - 2 + 2x < 6 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 < 0 \end{cases}$$

Per resoldre la segona inequació primer trobem les solucions de $x^2 + 2x - 8 = 0$, que separaran la recta dels reals segons el signe que prengui $x^2 + 2x - 8$:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -4 \end{cases}$$

Fem la taula de signes de $x^2 + 2x - 8$:

(-∞, -4)	(-4, 2)	(2, +∞)
+	–	+

A l'interval (-4, 2) és on es verifica que $x^2 + 2x - 8 < 0$.

Finalment, la solució d'aquest primer cas són els nombres de l'interval (-4, 2) més grans o iguals que $\sqrt{2}$ o més petits o iguals que $-\sqrt{2}$, és a dir:

$$\left(-4, -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}, 2\right).$$

<u>Cas 2</u>:

$$-x^2 + 2 + 2x < 6 \quad \text{si} \quad x^2 - 2 < 0$$

que equival a resoldre el sistema:

$$\begin{cases} x^2 - 2 < 0 \Leftrightarrow x^2 < 2 \Leftrightarrow |x| < \sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \\ -x^2 + 2 + 2x < 6 \Leftrightarrow -x^2 + 2x - 4 < 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 4 > 0 \end{cases}$$

Com hem fet abans, busquem les solucions de $x^2 - 2x + 4 = 0$ per poder estudiar el signe de $x^2 - 2x + 4$.

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-16}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2} \notin R$$

Donat que aquesta equació no té solucions reals, el signe de $x^2 - 2x + 4$ és constant en $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$. Si agafem un punt qualsevol d'aquest interval sabrem quin signe té el nostre polinomi. Per exemple, prenent $x = 0$ i substituint en $x^2 - 2x + 4$ obtenim 4, que és positiu.
Resumint, en $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ sempre es verifica $x^2 - 2x + 4 > 0$.
Per tant, la solució de l'inequació de l'enunciat és el conjunt:

$$\mathrm{S} = \left(-4, -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}, 2\right) \cup \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = (-4, 2)$$

1.36. Resoleu la següent inequació $\boldsymbol{\frac{2x}{x+1} + \frac{x+2}{x-1} > 3}$

$$\frac{2x}{x+1} + \frac{x+2}{x-1} > 3 \Rightarrow \frac{2x}{x+1} + \frac{x+2}{x-1} - 3 > 0 \Rightarrow \frac{2x(x-1) + (x+2)(x+1) - 3(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2 - 2x + x^2 + x + 2x + 2 - 3x^2 + 3}{x^2 - 1} > 0 \Rightarrow \frac{x+5}{x^2 - 1} > 0$$

Estudiem el signe d'aquesta darrera fracció mitjançant una taula de signes. Primer, però, trobarem les arrels del numerador i del denominador, que separen la recta dels reals segons el signe de la fracció:

$x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

	(-∞, -5)	(-5, -1)	(-1,1)	(1, +∞)
$x+5$	–	+	+	+
$x^2 - 1$	+	+	–	+
$\frac{x+5}{x^2-1}$	–	+	–	+

Com que volem saber quan la fracció $\frac{x+5}{x^2-1}$ és positiva, ens interessen les columnes segona i quarta. Per tant, la solució és $\mathrm{S} = (-5, -1) \cup (1, +\infty)$.

<u>Mètode alternatiu</u>: Perquè la fracció sigui positiva, podem imposar que numerador i denominador tinguin el mateix signe:

<u>Cas 1</u>:

Si $x + 5 > 0$ i $x^2 - 1 > 0$, aleshores:

$$\left.\begin{cases} x > -5 \\ x^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow x > 1,\ x < -1 \end{cases}\right\} \Rightarrow x \in (-5, -1) \cup (1, +\infty)$$

<u>Cas 2</u>:

Si $x + 5 < 0$ i $x^2 - 1 < 0$, aleshores:

$$\begin{cases} x < -5 \\ x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1 \end{cases}$$

que són condicions incompatibles.

Per tant obtenim la solució $\mathrm{S} = (-5, -1) \cup (1, +\infty)$.

1.37. En una població hi ha tres escoles d'enginyeria. Una d'elles prepara tècnics agrícoles, i compta amb el $33,\overline{6}\%$ de tots els matriculats. Del conjunt d'estudiants que segueixen carreres tècniques, el percentatge de noies és del $30,\overline{50}\%$. Cadascun dels tres centres, per raons de dimensió, té limitat el nombre d'alumnes a no més de 4000. Quin és el nombre d'inscrits a l'escola d'enginyeria tècnica agrícola d'aquesta localitat?

x = nombre d'estudiants de carreres tècniques (d'ambdós gèneres), amb $x \leq 4.000$.

$$\frac{33,\overline{6}}{100}x=\left(\frac{33}{100}+\frac{0,\overline{6}}{100}\right)x=\left(\frac{33}{100}+\frac{6}{(9)(100)}\right)x=\left(\frac{33}{100}+\frac{6}{900}\right)x=\frac{297+6}{900}x=\frac{303}{900}x=$$

$$=\frac{101}{300}x\in N\Rightarrow x=\dot{300}$$

$$\frac{30,\overline{50}}{100}x=\left(\frac{30}{100}+\frac{0,\overline{50}}{100}\right)x=\left(\frac{30}{100}+\frac{50}{(99)(100)}\right)x=\left(\frac{30}{100}+\frac{50}{9900}\right)x=\left(\frac{3}{10}+\frac{5}{990}\right)x=\frac{297+5}{9900}x=$$

$$=\frac{302}{990}x=\frac{151}{495}x\in N\Rightarrow x=\dot{495}$$

La primera condició per a x és ser múltiple de 300. La segona condició per a x és ser múltiple de 495. Per tant x haurà de ser múltiple del mínim comú múltiple de 300 i 495.

$$\text{m.c.m.}(\dot{300},495)=?\left\langle\begin{matrix}300=2^2\cdot3\cdot5^2\\495=3^2\cdot5\cdot11\end{matrix}\right.=2^2\cdot\dot{3}^2\cdot5^2\cdot11=\dot{9.900}$$

<u>Cas1</u>, x és 9900:

$$\frac{33,6}{100}(9.900)\underset{(1)}{=}\frac{101}{300}9.900=3.333<4.000$$

<u>Cas2</u>, x és múltiple de 9.900, per exemple si fem x igual a 2(9.900)=19.800:

$$\frac{33,6}{100}(19.800)\underset{(1)}{=}\frac{101}{300}19.800=6.666,$$

però temin que 6.666>4.000.

El nombre d'inscrits a l'escola d'enginyeria tècnica agrícola és de 3.333 estudiants.

2. INDUCCIÓ MATEMÀTICA. PROGRESSIONS I SUCCESSIONS.

INDUCCIÓ MATEMÀTICA

El mètode d'inducció és un mètode de demostració de proposicions predicades sobre els nombres naturals.

i) **S'ha de comprovar que la proposició és certa per al primer cas en què tingui sentit aplicar-la.**

ii) **S'ha de fer el que s'anomena <u>hipòtesi d'inducció</u>: suposar certa la proposició per un cas genèric *n***

iii) **Tot incorporant la hipòtesi d'inducció, s'ha de comprovar que la proposició és certa per al cas *n*+1.**

2.1. Demostreu per inducció la següent identitat: $\mathbf{1+2+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}}$

(i) Primer ho hem de provar quan $n = 1$:

$$1=\frac{1(1+1)}{2}=\frac{2}{2}$$

Podem comprovar-ho també quan $n = 2$:

$$1+2=3=\frac{2\cdot 3}{2}$$

(ii) Hipòtesi d'inducció: Suposem certa la igualtat per al cas n.

(iii) Hem de veure si també es verifica en el cas n+1. És a dir, hem de veure si

$$1+2+...+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Per hipòtesi d'inducció sabem que:

$$1+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Així doncs:

$$\underbrace{1+2+...+n}+(n+1)\overset{HI}{=}\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}\overset{(1)}{=}\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

(1) treient factor comú n+1

La identitat ja queda demostrada.[1]

2.2. Demostreu per inducció la següent identitat: $\mathbf{1^3+2^3+...+n^3=\left(1+2+...+n\right)^2}$

(i) $n = 1$:

$$1^3 = 1 = 1^2$$

Comprovem-ho un altre cop per a $n = 2$:

$$1^3 + 2^3 = 9 = (1+2)^2$$

(ii) Hipòtesi d'inducció: Suposem certa la igualtat per a n, és a dir:

[1] A partir d'ara, cada cop que apliquem la hipòtesi d'inducció posarem *HI* sobre el signe =.

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=(1+2+\ldots+n)^2$$

(iii) Hem de veure que:

$$1^3+2^3+\ldots+n^3+(n+1)^3=[1+2+\ldots+n+(n+1)]^2$$

$$\underbrace{1^3+2^3+\ldots+n^3}+(n+1)^3\overset{HI}{=}(1+2+\ldots+n)^2+(n+1)^3=(1+2+\ldots+n)^2+(n+1)(n+1)^2=$$

$$=(1+2+\ldots+n)^2+n(n+1)^2+(n+1)^2=(1+2+\ldots+n)^2+n(n+1)(n+1)+(n+1)^2\overset{(1)}{=}$$

$$=(1+2+\ldots+n)^2+2(1+2+\ldots+n)(n+1)+(n+1)^2\overset{(2)}{=}[1+2+\ldots+n+(n+1)]^2$$

(1) aprofitant l'apartat anterior: $1+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}\Rightarrow n(n+1)=2(1+\ldots+n)$

(2) donat que és un quadrat perfecte: $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

La identitat ja queda demostrada.

Mètode alternatiu: També es podria fer desenvolupant directament, començant pel membre dret de la igualtat:

$$\left[\underbrace{1+2+\ldots+n}+\underbrace{(n+1)}\right]^2=(1+2+\ldots+n)^2+(n+1)^2+2(1+2+\ldots+n)(n+1)\overset{HI}{=}$$

$$=1^3+2^3+\ldots+n^3+(n+1)^2+\underbrace{2(1+2+\ldots+n)}(n+1)\overset{(3)}{=}1^3+2^3+\ldots+n^3+(n+1)^2+\underbrace{n(n+1)}(n+1)=$$

$$=1^3+2^3+\ldots+n^3+(n+1)^2+n(n+1)^2=1^3+\ldots+n^3+(n+1)^2(n+1)=$$

$$=1^3+2^3+\ldots+n^3+(n+1)^3$$

(3) aprofitant l'exercici anterior: $1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}\Rightarrow n(n+1)=2(1+\ldots+n)$

2.3. Demostreu per inducció la següent identitat: $\mathbf{1^2+2^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

(i) $n=1$:

$$1^2=1=\frac{1(1+1)(2\cdot1+1)}{6}$$

També podem veure-ho per a $n=2$:

$$1^2+2^2=5=\frac{2(2+1)(2\cdot2+1)}{6}$$

(ii) Hipòtesi d'inducció: Suposem que sigui cert per a n.

(iii) Hem de veure si és certa la igualtat per $n+1$:

$$1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

que s'obté substituint a la fórmula inicial n per $n+1$.

$$\underbrace{1^2+2^2+\ldots+n^2}+(n+1)^2 \overset{HI}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} =$$

$$\overset{(1)}{=} \frac{(n+1)\left[n(2n+1)+6(n+1)\right]}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} \overset{(2)}{=} \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

com volíem demostrar.
(1) treient factor comú (n+1)
(2) factoritzant el polinomi de grau 2

La identitat ja queda demostrada.

2.4. Demostreu per inducció la següent identitat: $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1\cdot 3}}+\ldots+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{(2}\boldsymbol{n}\mathbf{-1)(2}\boldsymbol{n}\mathbf{+1)}} = \frac{\boldsymbol{n}}{\mathbf{2}\boldsymbol{n}\mathbf{+1}}$

(i) n = 1:

$$\frac{1}{1\cdot 3} = \frac{1}{3} = \frac{1}{2\cdot 1+1}$$

També ho podem comprovar per a n = 2:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} = \frac{2}{2\cdot 2+1}$$

(ii) Hipòtesi d'inducció: Suposem que sigui cert pel cas n.
(iii) Hem de veure que també ho serà per a n+1, la qual cosa significa que, si substituïm n per n+1, s'ha de complir:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3}$$

$$\underbrace{\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \overset{HI}{=} \frac{n}{2n+1}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)} =$$

$$= \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3}$$

La identitat ja queda demostrada.

2.5. Demostreu per inducció la següent identitat:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \ldots\ldots \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = \frac{n^{n-1}}{(n-1)!}$$

(i) Per a n = 1 la fórmula no té sentit. En aquest cas hem de començar per n = 2:

$$1+\frac{1}{1} = 2 = \frac{2^1}{1!}$$

Si fem n = 3 també obtenim la igualtat:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2\frac{3^2}{2^2} = \frac{3^2}{2} = \frac{3^2}{2!}$$

(ii) Hipòtesi d'inducció: Considerem que és cert per a n.
(iii) Hem de veure si serà cert per a n+1, es a dir, si es compleix que:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \ldots\ldots \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{(n+1)^n}{n!}$$

$$\underbrace{\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)^2.....\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \overset{HI}{=} \frac{n^{n-1}}{(n-1)!}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{n^{n-1}}{(n-1)!}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n =$$

$$= \frac{n^{n-1}(n+1)^n}{(n-1)!n^n} = \frac{n^{n-1}(n+1)^n}{n^{n-1}\cdot n(n-1)!} \overset{(1)}{=} \frac{(n+1)^n}{n!}$$

(1) recordant que $n! = n(n-1)!$

La identitat ja queda demostrada.

2.6. Demostreu per inducció que $n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)$ és múltiple de 3 (considerem com fins ara que *n* és un nombre natural).

Aquest cop no es tracta de demostrar una identitat sinó una propietat.

(i) Comprovem que, quan $n = 1$, el nostre producte és, efectivament, múltiple de 3:

$$1\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)(1+1) = \frac{3}{2}\cdot 2 = 3$$

Com que tot nombre és múltiple d'ell mateix, la propietat es verifica en aquest primer cas.

Podem veure què succeeix quan $n = 2$:

$$2\left(2+\frac{1}{2}\right)(2+1) = 15 = 3\cdot 5$$

que també és múltiple de 3.

(ii) Hipòtesi d'inducció: Suposem que $n(n+\frac{1}{2})(n+1)$ és múltiple de 3.

(iii) Hem de veure si, quan substituïm *n* per *n*+1, l'expressió que s'obté també és certa, és a dir, si

$$(n+1)\left(n+\frac{3}{2}\right)(n+2)$$

és múltiple de 3.

Intentarem fer aparèixer els termes de la hipòtesi d'inducció, dels quals ja coneixem la propietat d'interès, sumant i restant $\frac{1}{2}$ dins $\left(n+\frac{3}{2}\right)$. Així, aquest factor el podem escriure com $\left(n+\frac{1}{2}+1\right)$.

$$(n+1)\left(n+\frac{3}{2}\right)(n+2) = (n+1)\left(\underbrace{n+\frac{1}{2}}+1\right)(n+2) \overset{(1)}{=} (n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)\underbrace{(n+2)} + (n+1)(n+2) \overset{(2)}{=}$$

$$= n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right) + 2(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right) + (n+1)(n+2)$$

(1) fent servir la propietat distributiva amb els termes $\left(n+\frac{1}{2}\right)$ i 1

(2) fent servir la propietat distributiva amb els termes del factor $(n+2)$

Per hipòtesi d'inducció sabem que $n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)$ és múltiple de 3. Aleshores:

$$n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right) = 3k_1$$

Ara cal veure que $2(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)+(n+1)(n+2)$ és múltiple de 3:

$$2(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)+(n+1)(n+2) \overset{(3)}{=} (n+1)\left[2\left(n+\frac{1}{2}\right)+n+2\right] = (n+1)(2n+1+n+2) =$$

$$= (n+1)(3n+3) = 3(n+1)^2 = 3k_2$$

(3) traient factor comú (n+1)

Per tant, el nostre producte inicial és múltiple de 3, com volíem demostrar, ja que és igual a
$$3k_1 + 3k_2 = 3(k_1+k_2) = 3k_3.$$

En general:

<u>Proposició</u>: Si a i b són dos enters múltiples de m, llavors la suma $a+b$ també ho és.
<u>Demostració</u>:

$$a = mk_1$$
$$b = mk_2$$

Aleshores:

$$a+b = mk_1 + mk_2 = m(k_1+k_2) = mk_3$$

que és múltiple de m.

<u>Mètode alternatiu</u>: Una altra forma de demostrar la qüestió proposada seria desenvolupant els productes $n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)$ i $(n+1)\left(n+\frac{3}{2}\right)(n+2)$:

$$n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1) = n\left(n^2+\frac{1}{2}n+n+\frac{1}{2}\right) = n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n \overset{HI}{=} 3k_1$$

$$(n+1)\left(n+\frac{3}{2}\right)(n+2) = (n^2+3n+2)\left(n+\frac{3}{2}\right) = n^3+\frac{9}{2}n^2+\frac{13}{2}n+3 =$$

$$\overset{(4)}{=} \underbrace{n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n}+\frac{6}{2}n^2+\frac{12}{2}n+3 \overset{HI}{=} 3k_1+3n^2+6n+3 = 3k_1+3(n^2+2n+1) =$$

$$= 3k_1+3k_2 = 3(k_1+k_2) = 3k_3$$

(4) fem la descomposició d'aquesta expressió de forma que aparegui l'expressió de la hipòtesi

2.7. Demostreu per inducció que $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ és un nombre múltiple de 9.

(i) $n = 1$:

$$1^3 + (1+1)^3 + (1+2)^3 = 1+8+27 = 36 \text{ és múltiple de 9}$$

També ho podem comprovar per al cas $n = 2$:

$$2^3 + (2+1)^3 + (2+2)^3 = 8+27+64 = 99 \text{ també és múltiple de 9}$$

(ii) Hipòtesi d'inducció: Suposem que es verifica per a *n*, és a dir, que $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3=9k_1$.

(iii) Hem de demostrar que $(n+1)^3+(n+2)^3+(n+3)^3$ també és múltiple de 9 (cas *n*+1).

Si comparem la hipòtesi d'inducció amb el que hem de demostrar, podem pensar en completar amb n^3 l'expressió donada (sumant i restant n^3).

$$(n+1)^3+(n+2)^3+(n+3)^3=\underbrace{n^3+(n+1)^3+(n+2)^3}+(n+3)^3-n^3=$$

$$\overset{HI}{=}9k_1+(n+3)^3-n^3=9k_1+n^3+9n^2+27n+27-n^3=9k_1+9n^2+27n+27=$$

$$=9k_1+9(n^2+3n+3)=9k_1+9k_2=9(k_1+k_2)=9k_3$$

Així ja queda demostrat que la suma inicial és múltiple de 9 per a qualsevol *n* natural.

2.8. Demostreu per inducció que $3\cdot5^{2n+1}+2^{3n+1}$ és múltiple de 17.

(i) $n=1$:

$$3\cdot5^3+2^4=391=17\cdot23$$

Comprovem-ho per a $n=2$:

$$3\cdot5^5+2^7=9503=17\cdot559$$

(ii) Hipòtesi d'inducció: La propietat és certa fins a *n*, es a dir: $3\cdot5^{2n+1}+2^{3n+1}$

(iii) Serà $3\cdot5^{2n+3}+2^{3n+4}$ múltiple de 17? (cas *n*+1)

$$3\cdot5^{2n+3}+2^{3n+4}\overset{(1)}{=}3\cdot5^{2n+1}\cdot5^2+2^{3n+1}\cdot2^3+2^{3n+1}\cdot5^2-2^{3n+1}\cdot5^2+3\cdot5^{2n+1}\cdot2^3-3\cdot5^{2n+1}\cdot2^3=$$

$$=3\cdot5^{2n+1}\cdot5^2+2^{3n+1}\cdot2^3+2^{3n+1}\cdot5^2-2^{3n-2}\cdot2^3\cdot5^2+3\cdot5^{2n+1}\cdot2^3-3\cdot5^{2n-1}\cdot5^2\cdot2^3=$$

$$=(3\cdot5^{2n+1}+2^{3n+1})\cdot5^2+(2^{3n+1}+3\cdot5^{2n+1})\cdot2^3-(2^{3n-2}+3\cdot5^{2n-1})\cdot2^3\cdot5^2=$$

$$\overset{(2)}{=}17k_1\cdot5^2+17k_1\cdot2^3-17k_2\cdot2^3\cdot5^2=17(k_1\cdot5^2+k_1\cdot2^3-k_2\cdot2^3\cdot5^2)=17k_3$$

(1) Sumem i restem $2^{3n+1}\cdot5^2$ i $3\cdot5^{2n+1}\cdot2^3$ amb la finalitat d'obtenir l'expressió de la hipòtesi d'inducció. I partim 5^{2n+3} en $5^{2n+1}\cdot5^2$ i 2^{3n+4} en $2^{3n+1}\cdot2^3$.

(2) $2^{3n+1}+3\cdot5^{2n+1}\overset{HI}{=}17k_1$ (cas *n*)

$2^{3n-2}+3\cdot5^{2n-1}\overset{HI}{=}17k_2$ (cas *n*-1, és a dir: $2^{3n-2}+3\cdot5^{2n-1}=3\cdot5^{2(n-1)+1}+2^{3(n-1)+1}$)

Per tant, $3\cdot5^{2n+1}+2^{3n+1}$ és múltiple de 17 per a qualsevol *n* natural.

2.9. Per a quins nombres naturals *n* és certa la desigualtat $n<2^n$?

Si $n=1$:	$1<2$	Sí
Si $n=2$:	$2<2^2=4$	Sí
Si $n=3$:	$3<2^3=8$	Sí

Podem intuir que serà cert a partir del cas $n=1$.

(i) $n=1$:

$$1<2$$

(ii) Hipòtesi d'inducció: Suposem que sigui cert fins a *n*, és a dir:

$$n < 2^n$$

(iii) Hem de veure si es compleix:

$$(n+1) < 2^{n+1}$$

que és el cas n+1.

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \overset{HI}{>} n \cdot 2 = 2n = n + n \overset{(1)}{\geq} n + 1$$

(1) doncs $n \geq 1$.

Per tant, ja podem afirmar que per a tot n natural més gran o igual que 1 la desigualtat estricta és certa.

2.10. Per a quins nombres naturals *n* és certa la desigualtat $n^2 < 2^n$?

Si $n = 1$: $1^2 = 1 < 2^1 = 2$ Sí

Però:

Si $n = 2$: $2^2 = 4 < 2^2$ No!

Si $n = 3$: $3^2 = 9 < 2^3 = 8$ No!

Si $n = 4$: $4^2 = 16 < 2^4$ No!

Si $n = 5$: $5^2 = 25 < 2^5 = 32$ Sí

Si $n = 6$: $6^2 = 36 < 2^6 = 64$ Sí

Observem que a partir de 5 la desigualtat estricta sembla ser certa. Anem doncs a provar de demostrar-la quan $n \geq 5$.

(i) $n = 5$:

$$5^2 = 25 < 2^5 = 32$$

(ii) Hipòtesi d'inducció: Suposem que sigui certa fins a n, és a dir:

$$n^2 < 2^n$$

(iii) Hem de veure si és cert que:

$$(n+1)^2 < 2^{n+1}$$

que és el cas n+1.

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \overset{HI}{>} n^2 \cdot 2 = 2n^2$$

Ara hem de comparar les expressions $2n^2$ i $(n+1)^2$:

$$2n^2 > (n+1)^2 \Leftrightarrow 2n^2 > n^2 + 2n + 1 \Leftrightarrow n^2 > 2n + 1 \Leftrightarrow n^2 - 2n > 1 \Leftrightarrow n(n-2) > 1$$

Donat que $n \geq 5$, (n-2) és més gran o igual que 3. Així, el producte n(n-2) és estrictament més gran que 1. Com que la darrera desigualtat és certa, la primera també ho serà. Per tant, ja queda demostrada la desigualtat de l'enunciat per a $n \geq 5$.

2.11. Per a quins nombres naturals *n* és certa la desigualtat $2^n < n!$?

Si $n = 1$: $2 < 1! = 1$ No!

Si $n = 2$: $2^2 = 4 < 2! = 2$ No!

Si $n = 3$: $2^3 = 8 < 3! = 6$ No!

Si $n = 4$: $2^4 = 16 < 4! = 24$ Sí

Si $n = 5$: $2^5 = 32 < 5! = 120$ Sí

La distància entre els dos membres de la desigualtat va augmentant. Podem sospitar que la igualtat és certa a partir de $n = 4$.

(i) $n = 4$:

$$2^4 = 16 < 4! = 24$$

(ii) Hipòtesi d'inducció: Suposem certa la desigualtat fins a n, o sigui, que $2^n < n!$.

(iii) És cert que $2^{n+1} < (n+1)!$? (cas n+1)

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \overset{(1)}{<} 2^n(n+1) \overset{HI}{<} n!(n+1) = (n+1)!$$

(1) ja que $n \geq 4$

Així doncs, la nostra desigualtat serà certa per a tot n més gran o igual que 4.

2.12. Per a quins nombres naturals *n* és certa la desigualtat $2^n \leq (n+1)!$?

Si $n = 1$:	$2 = 2! = 2$	Sí
Si $n = 2$:	$2^2 = 4 < 3! = 6$	Sí
Si $n = 3$:	$2^3 = 8 < 4! = 24$	Sí

Podem intuir que serà cert a partir del cas $n = 1$.

(i) $n = 1$:

$$2 = 2! = 2$$

(ii) Hipòtesi d'inducció: suposem que sigui cert que $2^n \leq (n+1)!$

(iii) Aleshores, ho serà que $2^{n+1} \leq (n+2)!$?

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 < 2^n(n+2) \overset{HI}{\leq} (n+1)!(n+2) = (n+2)!$$

Observació: en aquest cas la igualtat només és certa quan $n = 1$.

2.13. Demostreu que la suma dels quadrats dels *n* primers nombres senars és $\dfrac{n(2n+1)(2n-1)}{3}$.

El que hem de demostrar en aquest exercici és:

$$1^2 + 3^2 + \ldots\ldots + (2n-1)^2 = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}$$

(i) $n = 1$:

$$1^2 = 1 = \frac{1(2\cdot1+1)(2\cdot1-1)}{3} = \frac{3}{3}$$

Comprovem també el cas $n = 2$:

$$1^2 + 3^2 = 10 = \frac{2(2\cdot2+1)(2\cdot2-1)}{3} = \frac{30}{3}$$

(ii) Hipòtesi d'inducció: Suposem que la igualtat sigui certa per als n primers nombres senars.

(iii) I per als n+1 primers? És a dir, serà certa la igualtat:

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1)^2 = \frac{(n+1)(2n+3)(2n+1)}{3} \quad ?$$

$$\underbrace{1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2} + (2n+1)^2 \overset{HI}{=} \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3} + (2n+1)^2 =$$

$$= \frac{n(2n+1)(2n-1) + 3(2n+1)^2}{3} = \frac{(2n+1)\left[n(2n-1) + 3(2n+1)\right]}{3} =$$

$$= \frac{(2n+1)(2n^2+5n+3)}{3} \overset{(1)}{=} \frac{(2n+1)(n+1)(2n+3)}{3} = \frac{(n+1)(2n+3)(2n+1)}{3}$$

(1) factoritzant el polinomi de segon ordre, hem demostrat la igualtat que havíem de comprovar.

2.14. **S'ha vist escrit que $1^4+2^4+3^4+.....+n^4=\dfrac{n(n+1)(n+3)(2n+1)}{24}$. És cert?**

Mirem alguns casos particulars:

Si $n = 1$: $1^4=1=\dfrac{1\cdot 2\cdot 4\cdot 3}{24}=1$

Si $n = 2$: $1^4+2^4=17\neq\dfrac{2\cdot 3\cdot 5\cdot 5}{24}=\dfrac{25}{4}=6{,}25$

Si $n = 3$: $1^4+2^4+3^4=98\neq\dfrac{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}{24}=21$

Si $n = 4$: $1^4+2^4+3^4+4^4=354\neq\dfrac{4\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{24}=\dfrac{1260}{24}=52{,}5$

Si $n = 5$: $1^4+2^4+3^4+4^4+5^4=979\neq\dfrac{5\cdot 6\cdot 8\cdot 11}{24}=110$

. . .

Es pot observar que allò escrit no és cert (ja que no sempre es compleix.

2.15. **Demostreu per inducció la següent fórmula $1+r+.....+r^n=\dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}$, amb $r\in R, r\neq 1$.**

***Comentari*: en aquest mateix capítol veurem que aquesta expressió s'identifica amb la suma dels *n* primers termes d'una progressió geomètrica de raó *r* i primer terme 1.**

(i) $n = 1$:

$$1+r\overset{(1)}{=}\frac{(1+r)(1-r)}{1-r}=\frac{1-r^2}{1-r}$$

(1) multiplicant i dividint per $1-r$

Provem-ho també al cas $n = 2$:

$$1+r+r^2=\frac{(1+r+r^2)(1-r)}{1-r}=\frac{1+r+r^2-r-r^2-r^3}{1-r}=\frac{1-r^3}{1-r}$$

(ii) Hipòtesi d'inducció: Suposem que sigui certa per als *n* primers termes.

(iii) I per als *n*+1 primers, serà certa la fórmula? Per tant hem de veure si és certa la següent igualtat:

$$1+r+...+r^n+r^{n+1}=\frac{1-r^{n+2}}{1-r}$$

$$\underbrace{1+\ r\ +\ ...\ +\ r^n}\ +\ r^{n+1}\ \overset{HI}{=}\frac{1-r^{n+1}}{1-r}+r^{n+1}=\frac{1-r^{n+1}+r^{n+1}-r^{n+2}}{1-r}=\frac{1-r^{n+2}}{1-r}$$

com volíem demostrar.

2.16. **Conjectureu una fórmula per a la suma dels *n* primers nombres naturals senars $1+3+\ldots+(2n-1)$ i comproveu la conjectura mitjançant la inducció.**

Intentarem entreveure quina pot ser aquesta fórmula:

Si $n = 1$: 1

Si $n = 2$: $1+3 = 4 = 2^2$

Si $n = 3$: $1+3+5 = 9 = 3^2$

Si $n = 4$: $1+3+5+7 = 16 = 4^2$

Si $n = 5$: $\quad 1+3+5+7+9 = 25 = 5^2$

…

Així doncs podem sospitar que la suma dels *n* primers nombres naturals senars serà el quadrat perfecte de *n*. Si es possible, volem provar per inducció que $1+3+\ldots+(2n-1)=n^2$

(i) $n = 1$:

$$2\cdot 1-1=1=1^2$$

(ii) Hipòtesi d'inducció: Suposem que sigui certa fins a *n*.

(iii) I per a $n+1$ continuarà sent certa? És a dir, ¿és certa la identitat $1+3+...+(2n-1)+(2n+1)=n^2$?

$$\underbrace{1+3+...+(2n-1)}+(2n+1)\overset{HI}{=}n^2+(2n+1)=(n+1)^2$$

Ja queda confirmada la nostra "sospita".

2.17. Trobeu una llei general que simplifiqui el producte:

$$\boldsymbol{\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right).....\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}$$

i demostreu-la per inducció.

Abans de fer servir la inducció matemàtica s'escau d'utilitzar la intuïció per poder entreveure el resultat que es vol demostrar. A partir d'alguns casos particulars mirarem de deduir una llei general que serà demostrada per inducció més tard.

Observació: el nostre producte també es pot expressar de la següent forma:

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right).....\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

Com que el producte s'ha de fer des de 2 fins a *n*, el cas $n = 1$ no té sentit.

Si $n = 2$: $\quad \left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}$

Si $n = 3$: $\quad \left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)=\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}=\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$

Si $n = 4$: $\quad \left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)=\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{15}{16}=\frac{5}{8}$

Si $n = 5$: $\quad \left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\left(1-\frac{1}{25}\right)=\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{15}{16}\cdot\frac{24}{25}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

…

El que obtenim és, sense fer totes les simplificacions en els resultats:

$$n=2\rightarrow\frac{3}{4}$$

$$n=3\rightarrow\frac{4}{6}$$

$$n=4\rightarrow\frac{5}{8}$$

$$n=5\rightarrow\frac{6}{10}$$

…

Els numeradors són del tipus n+1 i els denominadors són tots parells i de la forma 2n, aleshores es pot intuir que:

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)....\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$$

Anem a demostrar aquesta "llei" per inducció:

(i) $n = 2$:

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}$$

(ii) Hipòtesi d'inducció: Suposem que sigui cert fins a n.

(iii) Anem a comprovar-ho per a n+1, dit d'una altra manera, es verifica la següent identitat?

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right).....\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{n+2}{2(n+1)}$$

$$\underbrace{\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\overset{HI}{=}\left(\frac{n+1}{2n}\right)\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\left(\frac{n+1}{2n}\right)\left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right)=$$

$$\overset{(1)}{=}\frac{(n+1)n(n+2)}{2n(n+1)^2}=\frac{n+2}{2(n+1)}$$

(1) treient factor comú n

Ja queda demostrada la nostra fórmula.

2.18. Si suposem que una parella de conills cria una nova parella cada mes i que després de dos mesos cada nova parella es comporta de la mateixa manera, quin serà el nombre de parelles nascudes en el mes *n*, si inicialment en tenim una?

Així, els primers termes d'aquesta successió del nombre de parelles en els diferents mesos són :

1^{er} mes: 1, 2^{on} mes: 1, 3^{er} mes: 2, 4^{art} mes: 3, 5^{e}mes: 5, 6^{e} mes: 8, 7^{e} mes: 13, 8^{e} mes: 21, 9^{e} mes: 34.....

Aquesta és la successió de Fibonacci.

Demostreu per inducció que el seu terme *n*-èsim val:

$$a_n=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Procedirem com en tots els casos de demostració per inducció.

(i) $n = 1$:

$$\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\frac{2\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}}=1=a_1$$

Provarem alguns termes més:

Per a $n=2$:

$$\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}}=\frac{\left(\frac{1+5+2\sqrt{5}}{4}\right)-\left(\frac{1+5-2\sqrt{5}}{4}\right)}{\sqrt{5}}=$$

$$=\frac{\frac{6+2\sqrt{5}-6+2\sqrt{5}}{4}}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}=1=a_2$$

Com que els casos $n=1$ i $n=2$ estan donats en la definició, anem a provar-ho quan $n=3$, que és el primer que es genera.
Per a $n=3$:

$$\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3}{\sqrt{5}}=\frac{\frac{\left(1+3\sqrt{5}+3\cdot 5+5\sqrt{5}\right)-\left(1-3\sqrt{5}+3\cdot 5-5\sqrt{5}\right)}{8}}{\sqrt{5}}=$$

$$=\frac{6\sqrt{5}+10\sqrt{5}}{8\sqrt{5}}=\frac{16\sqrt{5}}{8\sqrt{5}}=2=1+1=a_1+a_2=a_3$$

(ii) Hipòtesi d'inducció: Suposem que és cert fins a *n*.
(iii) Hem de comprovar que si és cert fins a *n* també ho serà per a *n*+1.

$$a_{n+1}=a_n+a_{n-1}\overset{HI}{=}\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}}=$$

$$\overset{(1)}{=}\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)}{\sqrt{5}}=$$

$$=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}}\overset{(2)}{=}\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}$$

(1) treient factor comú $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$ i $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$

(2) fent servir que:

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

Provem-ho:

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{1+5+2\sqrt{5}}{4}=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

De la mateixa forma:

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

Així queda demostrat el valor del terme general de la successió de Fibonacci.

Comentari: A continuació tractarem el tema de les successions. Aquest problema que acabem de resoldre mitjançant el mètode d'iducció fou desenvolupat per en Fibonacci (1175-1250, aprox.) i dóna lloc al que es coneix com la successió de Fibonacci

$$a_1 = 1,$$
$$a_2 = 1,$$
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

PROGRESSIONS I SUCCESSIONS

<u>Progressió</u> és tota col·lecció ordenada finita d'elements d'un conjunt, que solen rebre el nombre de "termes". Podem també definir "progressió" com tota funció definida en $\{1,\ldots,p\}$ (o de vegades en $\{0,1,\ldots,p\}$).

<u>Progressió aritmètica</u> és aquella en què la diferència (d) entre termes consecutius és constant. Aleshores el terme general s'escriu $a_n = a_1 + (n-1)d$, on a_1 és el primer terme de la progressió i d la diferència, i la suma dels n primers termes és $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$

<u>Progressió geomètrica</u> és aquella en què el quocient (r) entre dos termes consecutius és constant (en diem raó del quocient). Aleshores el terme general és $a_n = a_1 r^{n-1}$, on a_1 és el primer terme de la progressió i r la raó, i la suma dels n primers termes (si $r \neq 1$) és

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{a_1 - a_n r}{1-r} = a_1 \frac{1-r^n}{1-r}.$$

<u>Successió</u> és tota col·lecció ordenada infinita d'elements d'un conjunt, que solen rebre el nom de "termes". Podem també definir successió com tota funció definida en N. Podem parlar anàlogament també de successions aritmètiques i geomètriques.
Nota: Alguns autors consideren "progressió" com un sinònim de "successió".
La suma dels termes d'una successió geomètrica amb raó r, tal que $|r| < 1$, i primer terme a_1 és $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} + \ldots\ldots = \dfrac{a_1}{1-r}$.

2.19. Trobeu una expressió del terme general de les successions següents:

a) $\dfrac{5}{3}, \dfrac{10}{9}, \dfrac{20}{27}, \dfrac{40}{81}, \ldots$

b) $1, -3, 5, -7, 9, \ldots$

a) $\dfrac{5}{3}, \dfrac{10}{9}, \dfrac{20}{27}, \dfrac{40}{81}, \ldots$

Podem rescriure aquests primers termes de la forma següent:

$$a_1 = \frac{5}{3}$$
$$a_2 = \frac{5\cdot 2}{3^2}$$
$$a_3 = \frac{5\cdot 2^2}{3^3}$$
$$a_4 = \frac{5\cdot 2^3}{3^4}$$
$$\ldots$$

Per tant, podem escriure com a terme general d'aquesta successió és $a_n = \dfrac{5 \cdot 2^{n-1}}{3^n}$.

b) $\mathbf{1, -3, 5, -7, 9,} \ \ldots$

Podem observar que els termes d'aquesta successió són els nombres senars, afectats de forma alternada per un signe negatiu.

Prenem com a forma general d'un nombre senar $2n-1$. Estudiem què passa amb els signes:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \cdot 1 - 1 = 1 \\ a_2 &= -(2 \cdot 2 - 1) = -3 \\ a_3 &= 2 \cdot 3 - 1 = 5 \\ a_4 &= -(2 \cdot 4 - 1) = -7 \\ a_5 &= 2 \cdot 5 - 1 = 9 \\ &\ldots \end{aligned}$$

Quan $n = 1$, el terme és positiu. Quan $n = 2$, el terme és negatiu. Quan $n = 3$, torna a ser positiu. I així successivament. Per tant, podem dir que el terme general és $a_n = (-1)^{n+1}(2n-1)$.

2.20. Determineu els termes generals de les successions aritmètiques següents:

a) $\mathbf{-8, -5, -2, 1,} \ldots$

b) $\mathbf{\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{8}, \dfrac{3}{4},} \ldots$

a) $\mathbf{-8, -5, -2, 1,} \ldots$

Recordem que el terme general d'una successió aritmètica és $a_n = a_1 + (n-1)d$. Per tant, els elements que necessitem per obtenir aquest terme són el primer terme a_1 i la diferència d.

En aquest cas, el primer terme de la successió és $a_1 = -8$. La diferència podem trobar-la restant el primer terme al segon: $d = -5 - (-8) = -5 + 8 = 3$.

Aleshores, $a_n = -8 + (n-1) \cdot 3 = -8 + 3n - 3 = 3n - 11$.

b) $\mathbf{\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{8}, \dfrac{3}{4},} \ldots$

Ara el primer terme és $a_1 = \dfrac{1}{2}$ i la diferència $d = \dfrac{5}{8} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{5-4}{8} = \dfrac{1}{8}$. Aleshores, el terme general és:

$$a_n = \frac{1}{2} + (n-1) \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2} + \frac{n-1}{8} = \frac{4+n-1}{8} = \frac{n+3}{8}.$$

2.21. Cerqueu els terme generals de les successions geomètriques següents:

a) $\mathbf{4, -4, 4, -4,} \ldots$

b) $\mathbf{27, 9, 3, 1, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{9},} \ldots$

a) $\mathbf{4, -4, 4, -4, \ldots}$

Recordem que el terme general d'una successió geomètrica és $a_n = a_1 r^{n-1}$. Per tant, els elements que necessitem per obtenir aquest terme són el primer terme a_1 i la raó r.
En aquest cas, el primer terme de la successió és $a_1 = 4$. La raó podem trobar-la dividint el segon terme entre el primer: $r = \frac{-4}{4} = -1$.

Llavors, $a_n = 4 \cdot (-1)^{n-1}$.

b) $\mathbf{27, 9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots}$

Ara el primer terme és $a_1 = 27$ i la raó $r = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$. Aleshores, el terme general és:

$$a_n = 27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 3^3 \cdot \frac{1}{3^{n-1}} = \frac{3^3}{3^{n-1}} = \frac{1}{3^{n-1-3}} = \frac{1}{3^{n-4}}.$$

Nota: Quan la raó d'una progressió geomètrica és menor que 1 la progressió és decreixent.

2.22. En una progressió aritmètica $a_7 = 32$ i $a_{15} = 72$. Trobeu el terme a_{23}.

Per determinar el terme a_{23} anirà bé conèixer el terme general d'aquesta progressió. Per tant, hem de buscar els seus elements característics, és a dir, la diferència d i el primer terme a_1.
Escrivim l'expressió del terme a_7 en funció de la diferència i del primer terme:

$$a_7 = a_1 + 6d = 32$$

Fem el mateix amb el terme a_{15}:

$$a_{15} = a_1 + 14d = 72$$

Així doncs, per trobar el primer terme i la diferència hem de resoldre el sistema:

$$\begin{cases} a_1 + 6d = 32 \\ a_1 + 14d = 72 \end{cases}$$

Restem aquestes dues equacions (mètode de reducció):

$$-8d = -40$$
$$8d = 40$$
$$d = 5$$

Aleshores,

$$a_1 + 6 \cdot 5 = 32$$
$$a_1 + 30 = 32$$
$$a_1 = 2$$

Per tant, el terme general de la nostra progressió és: $a_n = 2 + (n-1) \cdot 5 = 5n - 3$. Ja podem calcular el terme a_{23} :

$$a_{23} = 5 \cdot 23 - 3 = 112$$

2.23. Trobeu el lloc que ocupa el nombre 100 en la successió aritmètica $\mathbf{10, 13, 16, \ldots}$

Aquests termes, corresponen a una successió aritmètica amb primer terme $a_1 = 10$ i diferència $d = 13 - 10 = 3$. Així doncs, el terme general és:

$$a_n = 10 + (n-1)\cdot 3 = 10 + 3n - 3 = 7 + 3n$$

Volem saber quina és la n que correspon al nombre 100, és a dir, quin lloc ocupa el 100 en aquesta successió. Imposem, doncs, $a_n = 100$:

$$a_n = 7 + 3n = 100$$
$$3n = 100 - 7$$
$$3n = 93$$
$$n = 31$$

El nombre 100 és el terme a_{31} de la nostra successió.

2.24. En una progressió aritmètica $d = 5$, $a_1 = 3$ i $a_k = 83$. Quant val k?

El terme general d'una progressió aritmètica és $a_k = a_1 + (k-1)d$. En el cas particular de la nostra progressió: $a_k = 3 + (k-1)\cdot 5 = 5k - 2$. Volem saber quin lloc ocupa el nombre 83:

$$a_k = 83$$
$$5k - 2 = 83$$
$$5k = 85$$
$$k = 17$$

El nombre 83 és el terme a_{17}.

2.25. En una progressió geomètrica $a_1 = 3$ i $a_2 = 7$. Calculeu a_n.

El terme general d'una progressió geomètrica és $a_n = a_1 r^{n-1}$. Per determinar el terme a_n anem a conèixer els seus elements característics, és a dir, la raó r i el primer terme a_1. El primer terme és 3.

Escrivim l'expressió del terme a_2 en funció de la raó i del primer terme:

$$a_2 = a_1 r^{2-1} = 3r = 7$$
$$r = \frac{7}{3}$$

Aleshores, el terme general val $a_n = 3\cdot\left(\frac{7}{3}\right)^{n-1} = 3\cdot\frac{7^{n-1}}{3^{n-1}} = \frac{7^{n-1}}{3^{n-2}}$.

2.26. Trobeu la raó d'una progressió geomètrica de sis termes, si la suma dels cinc primers val 170,5 i la dels cinc últims 682. Escriviu-ne la progressió.

La informació que ens dóna l'exercici és:

$$\begin{cases} a_1 + \ldots + a_5 = 170{,}5 \\ a_2 + \ldots + a_6 = 682 \end{cases}$$

Donem l'expressió d'aquestes sumes en funció de la raó r (que no coneixem), i dels seus termes primer i últim, considerant $a_2 = a_1 r$, $a_5 = a_1 r^4$, $a_6 = a_1 r^5$:

$$a_1+\ldots+a_5=\frac{a_5r-a_1}{r-1}=\frac{a_1r^4\cdot r-a_1}{r-1}=a_1\left(\frac{r^5-1}{r-1}\right)=170{,}5$$

$$a_2+\ldots+a_6=\frac{a_6r-a_2}{r-1}=\frac{a_1r^5\cdot r-a_1r}{r-1}=a_1\left(\frac{r^6-r}{r-1}\right)=r\cdot a_1\left(\frac{r^5-1}{r-1}\right)=682$$

Com que sabem que $a_1\left(\frac{r^5-1}{r-1}\right)=170{,}5$, ho substituïm en la segona equació:

$$r\cdot a_1\left(\frac{r^5-1}{r-1}\right)=682$$

$$r\cdot 170{,}5=682$$

$$r=\frac{682}{170{,}5}=4$$

Ara ja sabem que la raó *r* val 4 i podrem saber quant val el primer terme de la progressió:

$$a_1\left(\frac{r^5-1}{r-1}\right)=170{,}5$$

$$a_1\left(\frac{4^5-1}{4-1}\right)=170{,}5$$

$$a_1\left(\frac{1024-1}{3}\right)=170{,}5$$

$$a_1\left(\frac{1023}{3}\right)=170{,}5$$

$$a_1\cdot 341=170{,}5$$

$$a_1=\frac{170{,}5}{341}=0{,}5$$

Coneixent la raó *r* i el primer terme a_1 podem escriure el terme general d'aquesta progressió i, en particular, els seus primers termes:

$$a_n=a_1r^{n-1}=0{,}5\cdot 4^{n-1}=\frac{2^{2n-2}}{2}=2^{2n-3}$$

Podem trobar els termes directament a partir del terme general o multiplicant cadascun per 4 per aconseguir el següent. Per tant:

$$a_1=0{,}5$$

$$a_2=0{,}5\cdot 4=2$$

$$a_3=2\cdot 4=8$$

$$a_4=8\cdot 4=32$$

$$a_5=32\cdot 4=128$$

$$a_6=128\cdot 4=512$$

2.27. Calculeu la suma de la progressió aritmètica

$$\mathbf{2+5+8+11+\ldots+200+203+206+209\,.}$$

Donat que cada terme d'aquesta progressió aritmètica s'obté sumant 3 a l'anterior, ens trobem amb una progressió aritmètica amb primer terme $a_1=2$ i diferència $d=3$. Per poder efectuar la suma ens cal saber quants termes apareixen. Haurem de buscar quin lloc ocupa el darrer terme, que és 209:

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 2 + (n-1)\cdot 3 = 3n - 1$$
$$a_n = 3n - 1 = 209$$
$$3n = 210$$
$$n = 70$$

Aleshores, hem de sumar els 70 primers termes de la progressió aritmètica amb primer terme $a_1 = 2$ i diferència $d = 3$:

$$S_{70} = \frac{(a_1 + a_{70})\cdot 70}{2} = \frac{(2+209)\cdot 70}{2} = \frac{211\cdot 70}{2} = 7.385$$

2.28. Calculeu la suma $3 - 6 + 12 - 24 + 48 - 96 + 192 - 384 + 768$.

Els 9 termes d'aquesta suma correspon a una progressió geomètrica amb primer terme $a_1 = 3$ i raó $r = -2$. Aleshores:

$$S_9 = \frac{a_9 r - a_1}{r - 1} = \frac{768\cdot(-2) - 3}{-2-1} = \frac{-1.536 - 3}{-3} = \frac{-1.539}{-3} = 513$$

2.29. Per a 31 gallines s'han preparat unes reserves de menjar d'un decalitre setmanal per a cadascuna. Això es feia suposant que el nombre de gallines seria invariable. Però com que cada setmana aquest nombre disminuïa en una, el menjar va durar el doble del que s'havia calculat. Quina quantitat de menjar van preparar com a reserva i per a quant de temps fou calculada?

Si el nombre de gallines fos invariable, cada setmana s'utilitzarien 31 decalitres. Si *n* és el nombre de setmanes que estava previst que durés el menjar, la quantitat total de menjar és 31*n*.

Com que cada setmana resulta que tenim una gallina menys:

1ª setmana	31 decalitres	a_1
2ona setmana	30 decalitres	a_2
3ª setmana	29 decalitres	a_3
.....	.....	.....
k-èssima setmana	31-(*k*-1)	a_k

Per tant, ens trobem amb una progressió aritmètica amb diferència $d = -1$ (és una progressió decreixent) i primer terme $a_1 = 31$.

D'aquesta manera el menjar dura *k* setmanes. La quantitat de menjar és la suma dels decalitres utilitzats durant les *k* setmanes. Així doncs, serà la suma dels *k* primers termes de la nostra progressió aritmètica:

$$a_1 + a_2 + ... + a_k = 31 + 30 + 29 + ... + a_k = \frac{(a_1 + a_k)k}{2} \overset{(1)}{=} \frac{(31 + 32 - k)k}{2} = \frac{(63-k)k}{2}$$

(1) $a_k = a_1 + (k-1)d = 31 + (k-1)(-1) = 31 - k + 1 = 32 - k$

Sabem que d'aquesta forma el menjar dura el doble del previst, és a dir, $k = 2n$. Per tant:

$$31n = \frac{(63-k)k}{2} = \frac{(63-2n)2n}{2} = (63-2n)n = 63n - 2n^2$$
$$2n^2 + 31n - 63n = 0$$
$$2n^2 - 32n = 0$$
$$n(n-16) = 0$$
Aquesta equació té dues solucions. D'una banda, $n = 0$, que òbviament queda descartada, i $n = 16$, que representa el nombre de setmanes que havia de durar el menjar preparat si el nombre de gallines s’hagués mantingut constant.
Aleshores, la quantitat de menjar preparat és $31 \cdot 16 = 496$ decalitres.

2.30. Suposem que rebem una carta en "cadena" i enviem còpies per correu a 4 companys. Cadascun d'aquests envia còpies per correu a 4 companys. Si aquest procés continua sense interrupció durant 6 cicles, quants diners s'han gastat en segells, si cada tramesa costa 30 cèntims d’euro?
El primer ha comprat 4 segells. Cadascun dels 4 companys, en rebre la carta, n'ha comprat 4 més, és a dir, entre els 4 n'han comprat 4·4. En el següent cicle s'han comprat $4{\cdot}4^2$ segells. I així successivament. Per tant, tenim una progressió geomètrica de raó $r = 4$ i primer terme $a_1 = 4$. Hem de sumar els sis primers termes:
$$S_6 = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_6 = 4 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4^2 + \ldots + 4 \cdot 4^5 = \frac{a_1(1-r^6)}{1-r} =$$
$$= \frac{4(1-4^6)}{1-4} = \frac{4(1-4{,}096)}{-3} = \frac{-16.380}{-3} = 5.460$$
S'han comprat en total 5.460 segells. Aleshores, s'han gastat $5.460 \cdot 0{,}30 = 1638$ euros en segells.

2.31. Una població d’un país del tercer món es duplica cada 20 anys. Si la població és de 30 milions de persones, quants anys hauran de passar aproximadament perquè s’arribi al voltant de 150 milions d’habitants, suposant que el ritme de creixement es mantingui?
Sigui $a_1 = 30.000.000 = 30 \cdot 10^6$ la població inicial.

<u>Al final de</u>:	<u>Població</u>:
1·20 anys	$2a_1 = a_2$
2·20 anys més	$2a_2 = 2^2 a_1 = a_3$
3·20 anys més	$2a_3 = 2^3 a_1 = a_4$
.....	.....
(*n*-1)·20 anys	$2a_{n-1} = 2^{n-1} a_1 = a_n$

Tenim una progressió geomètrica de raó $r = 2$. Volem saber quin lloc ocupa en aquesta progressió els 150 milions. Com que $a_n = 2^{n-1} a_1$:
$$a_n = 150 \cdot 10^6 = 2^{n-1}(30 \cdot 10^6)$$
$$150 = 30 \cdot 2^{n-1}$$
$$5 = 2^{n-1}$$
Traient logaritmes als dos membres de l'equació:

$$\ln 5 = \ln(2^{n-1}) = (n-1)\ln 2$$
$$n-1 = \frac{\ln 5}{\ln 2}$$
$$n = 1 + \frac{\ln 5}{\ln 2} = 1 + 2{,}32 = 3{,}32 \approx 3$$

Perquè la població arribi al voltant dels 150 milions de persones han de passar aproximadament $(3-1)\cdot 20 = 2\cdot 20 = 40$ anys (penseu que si el nombre de termes és 3, llavors el nombre d'intervals o salts serà un menys, és a dir, 2).

2.32. Si una peça de paper prou llarga de gruix *a* = 0,1 mm es pogués doblegar 40 vegades, quin seria el gruix que s'obtindria?

Cada cop que dobleguem el paper el gruix augmenta el doble. És a dir, si el gruix inicial és $a_1 = 0{,}1\,\text{mm}$:

<u>Cops doblegat</u>	<u>Gruix</u>
1	$2a_1 = a_2$
2	$2a_2 = 2^2 a_1 = a_3$
3	$2a_3 = 2^3 a_1 = a_4$
4	$2a_4 = 2^4 a_1 = a_5$
.....	.....
40	$2a_{40} = 2^{40} a_1 = a_{41}$

El gruix en doblegar 40 vegades és:

$$a_{41} = 2^{40} a_1 = 2^{40}\cdot 0{,}1 \text{ mm} = 2^{40}\cdot 0{,}1\cdot 10^{-6} \text{ km} = 2^{40}\cdot 10^{-7} \text{ km} = \frac{2^{40}}{(2\cdot 5)^7} \text{ km} =$$
$$= \frac{2^{40}}{2^7\cdot 5^7} \text{ km} = \frac{2^{33}}{5^7} \text{ km} \approx 109.951 \text{ km}$$

<u>Observació</u>: Podem recordar que el diàmetre de la Terra és aproximadament 12.700 km i que la longitud d'un meridià és 40000 km.

2.33. Un raig de llum en passar a través d'una làmina de vidre perd 1/12 de la seva intensitat per la reflexió en les superfícies límit i per la no homogeneïtat del material. Experimentalment s'ha establert que la intensitat I és només la meitat del valor original. Per quantes làmines ha passat el raig?

Sigui I_0 la intensitat original o inicial.

Després de travessar la primera làmina, la intensitat és I_1:

$$I_1 = I_0 - \frac{1}{12} I_0 = \frac{11}{12} I_0$$

Després de travessar la segona, la intensitat és I_2:

$$I_2 = I_1 - \frac{1}{12} I_1 = \frac{11}{12} I_1 = \frac{11}{12}\cdot\frac{11}{12} I_0 = \left(\frac{11}{12}\right)^2 I_0$$

Després de travessar *n* làmines, podem dir que la intensitat és I_n, on:

$$I_n = \left(\frac{11}{12}\right)^n I_0$$

Hem de trobar la *n* tal que la intensitat corresponent sigui la meitat de la intensitat original. És a dir:

$$I_n = \frac{1}{2} I_0$$
$$\left(\frac{11}{12}\right)^n I_0 = \frac{1}{2} I_0$$
$$\left(\frac{11}{12}\right)^n = \frac{1}{2}$$
$$\ln\left(\frac{11}{12}\right)^n = \ln\frac{1}{2}$$
$$n\ln\frac{11}{12} = \ln\frac{1}{2}$$
$$n(-0{,}0870113) = -0{,}6931471$$
$$n = 7{,}966 \approx 8$$

Per tant, el nombre de làmines buscat és 8.

2.34. Segons un historiador àrab, el Shah de Pèrsia va oferir un premi a l'inventor del joc dels escacs. Aquest va demanar com a premi el nombre de grans de blat que s'obtindrien posant un gra en el primer dels 64 quadrats del tauler d'escacs, 2 en el segon, 4 en el tercer i així successivament, és a dir, posant en cada quadrat el doble de grans del quadrat precedent. El Shah es va sorprendre pel que va considerar un desig modest per premiar un joc tan interessant. Què podeu dir al respecte?
Nota: La superfície de la Terra és aproximadament de $5{\cdot}10^{10}$ hectàrees, el rendiment mitjà pot ser de 2,5 tones per hectàrea i cada tona pot contenir 27 milions de grans.
Es pot comprovar que el nombre de grans sobre el tauler segueix una progressió geomètrica de raó $r = 2$ i primer terme $a_1 = 1$:

Quadrat	Nombre de grans	Terme
1er	1	a_1
2on	2	$2a_1 = a_2$
3er	$4 = 2^2$	$2a_2 = 2^2 a_1 = a_3$
4art	$8 = 2^3$	$2a_3 = 2^3 a_1 = a_4$
.....	.....	.....
64è	2^{63}	$2^{63} a_1 = a_{64}$

Per tant, la solució del problema és la suma dels 64 termes d'aquesta progressió:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{64} = \frac{a_1 - a_{64} r}{1 - r} =$$
$$= \frac{1 - 2^{63} \cdot 2}{1 - 2} = \frac{1 - 2^{64}}{-1} = 2^{64} - 1 = 1{,}8446744 \cdot 10^{19} \approx 1{,}8 \cdot 10^{19}$$

Observació: Si una hectàrea produeix aproximadament 2,5 tones i en una tona hi ha 27 milions de grans, és a dir, $2{,}7{\cdot}10^7$ grans, resulta que una hectàrea aporta $2{,}5 \cdot 2{,}7 \cdot 10^7 = 6{,}75 \cdot 10^7$ grans de blat. Aleshores, podem calcular quants grans de blat conté una collita considerant la superfície de la Terra: $(5 \cdot 10^{10}) \cdot (6{,}75 \cdot 10^7) = 33{,}5 \cdot 10^{17}$

Per tant, el nostre Shah necessitaria més de cinc collites de tota la Terra per poder premiar l'inventor dels escacs: $5\cdot 33{,}5\cdot 10^{17} = 167{,}5\cdot 10^{17} = 1{,}675\cdot 10^{19} < 1{,}8\cdot 10^{19}$.

2.35. Molts tipus d'éssers unicel·lulars es reprodueixen per bipartició, és a dir, quan arriba a un cert grau de maduresa, l'individu adult es parteix i dóna lloc a dos individus joves. Cadascun d'ells, a la seva vegada i transcorregut un cert temps, repeteix el procés. Si s'han obtingut 256 individus a partir d'un únic individu, quants cicles reproductius han transcorregut?

Sigui $a_1 = 1$ l'individu original. Ens trobem amb una progressió geomètrica amb primer terme 1 i raó 2:

Nº cicle	Nº d'individus
1	$a_2 = 2a_1 = 2\cdot 1 = 2$
2	$a_3 = 2a_2 = 2\cdot 2 = 2^2$
3	$a_4 = 2a_3 = 2\cdot 2^2 = 2^3$
…	…
N	$a_{n+1} = 2a_n = 2^n$

Volem saber després de quants cicles s'obtenen 256 individus. Dit d'una altra forma, busquem el nombre de cicles *n* tal que $a_{n+1} = 256$. Així doncs:

$$a_{n+1} = 2^n = 256 \Rightarrow \ln 2^n = \ln 256 \Rightarrow n\ln 2 = \ln 2^8 \Rightarrow n\ln 2 = 8\ln 2 \Rightarrow n = 8$$

Després de 8 cicles reproductius s'obtenen 256 individus.

Observació: Malgrat ésser una progressió geomètrica de raó 2, el nombre d'individus final podria no ser parell, per exemple, 255. Això pot ser degut a què no totes les cèl·lules es biparteixen al mateix temps.

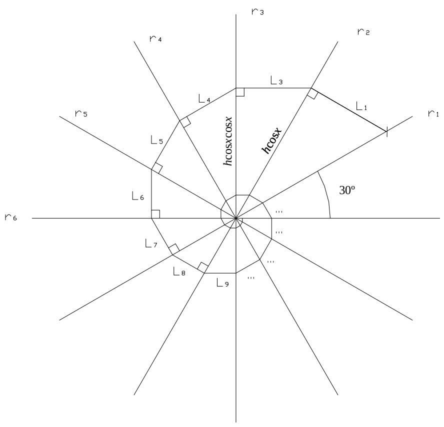
2.36. Es poden dibuixar sis rectes que passin pel punt O = (0,0) del pla (l'origen), de tal manera que cada parella de rectes veïnes tanqui un angle de $\frac{\pi}{6}$ radiants. A partir del punt P_1 sobre una de les rectes, a una distància *h* del punt O, es dibuixa la recta perpendicular a la recta veïna. Des d'aquest punt de contacte es dibuixa la perpendicular a la recta següent, i així es continua, formant un arc poligonal $P_1P_2P_3$... , el qual genera una espiral al voltant del punt O, i que es contreu cap a aquest. Quina serà la longitud d'aquesta espiral?

Recordem quines són les raons trigonomètriques d'un angle:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a\operatorname{sen}\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a\cos\alpha$$

on *a* representa la hipotenusa del triangle rectangle, *b* el catet contigu a l'angle i *c* el catet oposat a l'angle.



Sigui L_1 la distància de P_1 a P_2 i h la distància de O a P_1. Degut a la perpendicularitat:

$L_1 = h \operatorname{sen} \alpha$

on $\alpha = \frac{\pi}{6} = 30^0$.

Llavors, la distància de O a P_2 serà $h \cos \alpha$. Així, ja podem calcular la distància de P_2 a P_3, L_2:

$$L_2 = h \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha$$

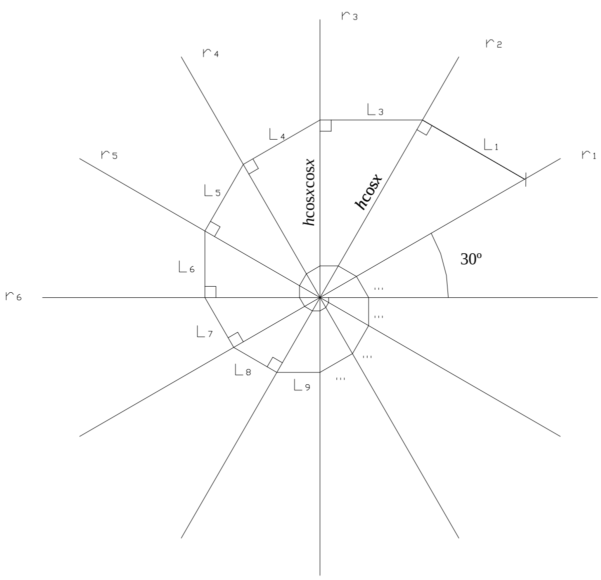
Anàlogament podem calcular la distància entre el punt d'una recta i el punt de la següent:

$$L_3 = h(\cos \alpha)^2 \operatorname{sen} \alpha$$

$$L_4 = h(\cos \alpha)^3 \operatorname{sen} \alpha$$

$$L_5 = h(\cos \alpha)^4 \operatorname{sen} \alpha$$

i així successivament.



La longitud de l'espiral és la suma de les distàncies d'una recta a la següent:

$$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + \ldots\ldots =$$
$$= h\,\mathrm{sen}\,\alpha + h\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha + h(\cos\alpha)^2\,\mathrm{sen}\,\alpha + h(\cos\alpha)^3\,\mathrm{sen}\,\alpha + \ldots\ldots =$$
$$= h\,\mathrm{sen}\,\alpha\left[1 + \cos\alpha + (\cos\alpha)^2 + (\cos\alpha)^3 + \ldots\ldots\right] \overset{(1)}{=} h\,\mathrm{sen}\,\alpha \cdot \frac{1}{1-\cos\alpha} =$$
$$= h\left(\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6}\right) \cdot \frac{1}{1-\cos\frac{\pi}{6}} = h\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{h}{2} \cdot \frac{2}{2-\sqrt{3}} =$$
$$= \frac{h(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{h(2+\sqrt{3})}{4-3} = (2+\sqrt{3})h$$

(1) Ens trobem amb una successió geomètrica de raó $r = \cos\alpha$, $|r| = |\cos\alpha| < 1$. Per tant, és una successió geomètrica decreixent i convergent, i la seva suma val $S = \dfrac{a_1}{1-r}$.

2.37. Donat un capital inicial, C_0, li apliquem la llei financera de l'interès simple, és a dir, aquella on l'interès en un període és directament proporcional al capital inicial (el rendiment que s'obté pel préstec d'un capital en un període) Calculeu quin serà el capital final transcorreguts *n* períodes amb un tipus d'interès periodal *r* (tant per u), i quin serà l'interès total aconseguit.

<u>Indicació</u>: El tipus d'interès periodal *r* representa la quantitat de diners que s'obté per cada unitat monetària invertida en un període.

L'interès aconseguit al final d'un període depèn proporcionalment del capital inicial en aquell període essent la constant de proporcionalitat la taxa o tipus d'interès periodal (el que correspon al tipus de període sobre el que estem fent el càlcul). Així

Interès al final d'un període = Capital a l'inici del període x Tipus d'interès periodal.

L'interès en qualsevol dels períodes en el marc d'interès simple és el mateix perquè no varia el capital inicial de cadascun d'ells. El capital final és aleshores la suma del capital inicial i de l'interès final o interès total, el qual és la suma de cadascun dels interessos corresponents als *n* períodes que constitueixen la nostra operació financera:

Interès d'un període : $I = C_0\, r$

Interès total en els *n* períodes : $I_t = C_0\, r + \ldots + C_0\, r = C_0\, r\, n$

Capital final : $C_n = C_0 + I_t = C_0 + C_0\, r\, n = C_0\,(1 + r\, n)$

Per obtenir el capital inicial, coneixent el capital final i les condicions de l'operació financera, només és necessari aïllar C_0 de la igualtat obtinguda, $C_0 = C_n /(1 + r\, n) = C_n\,(1 + r\, n)^{-1}$

La successió dels capitals finals de cadascun dels períodes és, essent C_0 el capital inicial,

$C_1 = C_0 + C_0\, r = C_0 + I$
$C_2 = C_1 + C_0\, r = C_1 + I$
$C_3 = C_2 + C_0\, r = C_2 + I$
....
$C_n = C_{n-1} + C_0\, r = C_{n-1} + I.$

Aquests valors corresponen als termes d'una progressió aritmètica de diferència igual a *I*.

2.38. Suposem que es treballa en un marc d'interès simple. Si disposem d'un capital de 8000 euros i ens proposen fer una inversió al 10% anual que dura 4 anys, quin serà el capital que ens tornaran al final d'aquesta operació financera? Una altra entitat financera ens ofereix un 2,5% d'interès trimestral i ens garanteix aquest interès durant 4 anys. És

més avantatjós aquest tracte que el primer? Si algú ens assegura que ens retornarà al final d'aquests 4 anys un capital de 11.000 euros. i que treballa amb un tipus interès semestral, quin és aquest interès?
Si tenim C_0 = 8.000, anem a avaluar les tres possibilitats:
(a) En relació a la primera proposta, $n = 4$ anys i $r = 0{,}10$ de forma que el capital final que aconseguirem és

$$C_f = C_4 = C_0\,(1+ r\,n) = 8.000\,(\,1+ 0{,}10\times 4) = 8.000\,(1{,}4) = 11.200 \text{ euros.}$$

(b) La segona entitat treballa amb $n = 4\times 4 = 16$ trimestres i $r = 0{,}025$ de forma que el capital final és

$$C_f = C_{16} = C_0\,(1+ r\,n) = 8.000\,(\,1+ 0{,}025\times 16) = 8.000\,(1{,}4) = 11.200 \text{ euros.}$$

resultat previsible, ja que el tipus interès 10% anual és equivalent al 2,5% trimestral, 2,5x4 = 10.
(c) Si tenim un interès semestral, el nombre de períodes que és necessari considerar en aquests quatre anys és $n = 2\times 4 = 8$, aleshores

$$C_f = 11.000 = 8.000\,(1 + r \times 8),$$

d'on, aïllant r , s'obté

$$r = ((11.000/8.000) - 1)/\,8 \cong 0{,}0469,$$

que dóna un interès semestral del 4,69%.

2.39. Volem liquidar tres deutes, mitjançant un pagament únic a 70 dies. Sabem que l'import i els venciments d'aquests deutes són: el primer de 1.400 euros a 55 dies, el segon de 2.100 euros a 80 dies i el tercer de 2.400 euros a 100 dies.
(a) Quina haurà de ser la quantitat donada als 70 dies, essent el tipus (tant o taxa) d'interès del 10% en un marc d'interès simple? El tipus d'interès que es dóna si no s'especifica res més és un interès anual. En cas contrari ens haurien d'indicar el tipus de període que s'utilitza.
(b) Determineu el nombre de dies que haurien de passar perquè fossin donades 590.000 euros.
Per resoldre aquest tipus de problema hem de tenir en compte que el capital és funció del temps. L'equivalència dels capitals ha de passar necessàriament per fer una translació d'aquests al llarg del temps i comparar-los en un mateix instant temporal (a l'inici, al final o en qualsevol altre punt).
Resoldrem aquest problema prenent tots els mesos iguals, de 30 dies, amb la qual cosa l'any serà de 360 dies.
(a) Traslladarem els tres deutes en el temps per obtenir el valor del deute total que correspon d'aquí a 70 dies. Per exemple, primer podem calcular el valor del capital equivalent a aquests tres deutes en el moment present (capital inicial) i desprès traslladar-lo mitjançant la llei financera d'aquí a 70 dies. El valor d'aquesta capitalització és el valor equivalent als tres deutes indicats.
Els paràmetres que identifiquem són:

- el tipus de període: dies
- el nombre de períodes en cada situació
- el tipus interès diari: $r = 0{,}10/360$

Escollim l'instant inicial o present ($t = 0$) per conèixer el valor actual del deute total,
Valor actual del deute total (D_t) = Valor actual del 1er deute (D_1) + Valor actual del 2^{on} deute (D_2) + Valor actual del 3er deute (D_3)
Si

$$D_1 = 1400 / (1 + r\cdot 55) = 1400 / (1 + 55\cdot 0{,}10 / 360) = 360\;\; 1.400 / 365{,}5$$
$$D_2 = 2100 / (1 + r\cdot 80) = 2100 / (1 + 80\cdot 0{,}10 / 360) = 360\;\; 2.100 / 368$$
$$D_3 = 2400 / (1 + r\cdot 100) = 2400 / (1 + 100\cdot 0{,}10 / 360) = 360\;\; 2.400 / 370$$

aleshores, el valor equivalent del deute total d'aquí a 70 dies, en aquest marc interès simple, és el pagament P que s'ha d'efectuar (la capitalització de D_t) i val

$P = D_t\ (1 + 0{,}10 / 360 \cdot 70) = (D_1 + D_2 + D_3)\ (1 + 70 \cdot 0{,}10 / 360\ ) =$

$=(360 \cdot 1.400 / 365{,}5 + 360 \cdot 2.100 / 368 + 360 \cdot 2.400 / 370)\ (1 + 70 \cdot 0{,}10 / 360\ ) =$

$= (1.400 / 365{,}5 + 2.100 / 368 + + 2.400 / 370) \cdot 360 \cdot (1 + 70 \cdot 0{,}10 / 360\ ) =$

$= (1.400 / 365{,}5 + 2.100 / 368 + 2.400 / 370)\ (367) = 588{,}055$ euros.

<u>Nota</u>: El resultat final depèn del moment triat per conèixer el valor actual del deute total. Si per exemple s'hagués actualitzat tot directament als 70 dies, el resultat fora diferent.

(b) Utilitzant el càlcul anterior del valor actual total del deute $(D_1 + D_2 + D_3) = 5.768{,}42$, i el valor que volem fer efectiu 5.900 euros, amb la llei financera de l'interès simple del 10% obtindrem el nombre n de dies o períodes. Així de

$$5.900 = (D_1 + D_2 + D_3)\ (1 + (0{,}10/360)\ n)$$

obtenim

$$n = ((5.900 / (D_1 + D_2 + D_3)) - 1)\ 360 / 0{,}10 = 82 \text{ dies.}$$

<u>Nota</u>: També és possible realitzar els càlculs amb un any de 365 dies. Aleshores, el tipus d'interès diari serà $r = 0{,}10/365$. Tornant al primer apartat, la suma dels capitals inicials, $(D_1 + D_2 + D_3)$, és 5770,17 euros, amb la qual cosa, el pagament que s'ha d'efectuar, P, és de 5880,83 euros. El nombre de dies que obtindrem al segon apartat també és, aproximadament, 82.

2.40. Donat un capital inicial, C_0 , li apliquem la llei financera de l'interès compost, de manera que els interessos produïts en cada període de capitalització s'afegeixen al capital amb la finalitat de calcular els interessos del següent període. Calculeu quin serà el capital final transcorreguts *n* períodes i amb un tipus d'interès periodal *r*, i quin serà l'interès total aconseguit.

L'interès aconseguit al final d'un període depèn proporcionalment del capital inicial en aquell període i de la taxa o tipus d'interès periodal (el que correspon al tipus de període sobre el que estem fent el càlcul). Així,

Interès al final d'un període = Capital a l'inici del període x Tipus interès periodal.

L'interès que s'aconsegueix en cadascun dels períodes de l'operació financera no és el mateix (a diferència del marc d'interès simple). En el marc d'interès compost, el capital a l'inici de cada període varia segons el període en el qual ens trobem. Al capital inicial de cada període se li sumen els interessos aconseguits en aquell període per tenir aleshores el nou capital inicial del següent període.

Tenim:

- Interès del primer període : $I_1 = C_0\, r$

Capital al final del primer període : $C_1 = C_0 + I_1 = C_0 + C_0\, r = C_0\ (1 + r)$

- Interès del segon període : $I_2 = C_1\, r$

Capital al final del segon període :

$C_2 = C_1 + I_2 = C_1 + C_1\, r = C_1\ (1 + r) = C_0\ (1 + r)\ (1 + r) = C_0\ (1 + r)^2$

- Interès del tercer període : $I_3 = C_2\, r$

Capital al final del tercer període :

$C_3 = C_2 + I_3 = C_2 + C_2\, r = C_2\ (1 + r) = C_0\ (1 + r)^2\ (1 + r) = C_0\ (1 + r)^3$

De forma recurrent obtenim els diferents capitals finals de cada període, fins a assolir el capital final de l'operació financera que consta de n períodes,

- Interès del darrer període = $I_n = C_{n-1}\, r$

Capital al final del darrer període :

$C_n = C_{n-1} + I_n = C_{n-1} + C_{n-1}\, r = C_{n-1}\ (1 + r) = C_0\ (1 + r)^{n-1}\ (1 + r) = C_0\ (1 + r)^{n.}$

Així,

$$\text{Capital final} = C_n = C_0\ (1 + r)^n$$

$$\text{Interès final} = C_n - C_0 = C_0\,(1 + r)^n - C_0 = C_0\,[(1 + r)^n - 1]$$

Per obtenir el capital inicial, coneixent el capital final i les condicions de l'operació financera, només és necessari aïllar C_0 de la igualtat obtinguda, $C_0 = C_n/(1 + r)^n$

Essent C_0 el capital inicial, la successió dels capitals finals de cadascun dels períodes és,

$$C_1 = C_0 + C_0\,r = C_0\,(1 + r)$$
$$C_2 = C_1 + C_1\,r = C_1\,(1 + r)$$
$$C_3 = C_2 + C_2\,r = C_2\,(1 + r)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$C_n = C_{n-1} + C_{n-1}\,\mathrm{r} = C_{n-1}\,(1 + r).$$

Aquests valors corresponen als termes d'una progressió geomètrica de raó $(1 + r)$.

2.41. Suposem que treballem en un marc d'interès compost. Si disposem d'un capital de 8.000 euros i ens proposen fer una inversió, al 10% anual, que dura 4 anys, quin serà el capital que ens tornaran al final d'aquesta operació financera? Una altra entitat financera ens ofereix un 2,5% d'interès trimestral i ens garanteix aquest interès durant 4 anys. És més avantatjós aquest tracte que el primer?. Si algú ens assegura que ens retornarà al final d'aquests 4 anys un capital de 11.000 euros. i que treballa amb un tipus interès semestral, quin és aquest tipus?

Si tenim $C_0 = 8.000$, anem a considerar les tres possibilitats:

(a) En relació a la primera proposta, $n = 4$ anys i $r = 0{,}10$ de forma que el capital final que aconseguirem és

$$C_f = C_4 = C_0\,(1 + r)^n = 8.000\,(1 + 0{,}10)^4 = 8.000\,(1{,}4641) \cong 11.712 \text{ euros.}$$

(b) La segona entitat treballa amb $n = 4\times4 = 16$ trimestres i $r = 0{,}025$ de forma que el capital final és

$$C_f = C_{16} = C_0\,(1 + r)^n = 8.000\,(1 + 0{,}025)^{16} = 8.000\,(1{,}48450) \cong 11.876 \text{ euros.}$$

resultat previsiblement més gran que l'anterior ja que en acumular els interessos de cada període al capital que es té per iniciar el següent, el tipus d'interès 2,5% trimestral no és equivalent al 10% anual (2,5% quatre vegades), sinó que és major.

(c) Si tenim un interès semestral, el nombre de períodes que és necessari considerar en aquests quatre anys és $n = 2\times4 = 8$, aleshores

$$C_f = 11.000 = 8.000\,(1 + r)^8,$$

d'on, aïllant r, s'obté

$$r = (11.000/8.000)^{1/8} - 1 \cong 0.0406,$$

és a dir un interès semestral aproximadament del 4,06%.

2.42. S'ofereixen a un comprador tres possibilitats per adquirir un vehicle:

(1) un pagament de 17.500 euros al moment

(2) un pagament d'aquí a quatre anys de 27.536 euros

(3) un primer pagament d'aquí a dos anys de 21.592 euros i un segon pagament de 584 euros quatre anys després del primer.

Suposant un marc d'interès compost del 12% anual, quina possibilitat és la més avantatjosa?

Si volem comparar aquestes tres opcions, hem de tenir un punt de referència en el temps per tenir els capitals equivalents corresponents a cada situació. Considerem com a punt de referència el moment actual, així la primera possibilitat és la del pagament de 17.500 euros.

En relació a la segona possibilitat, calcularem el capital actual corresponent a un capital final de 27.536 euros en un marc on el tipus d'interès anual és $r = 0{,}12$ i on el nombre de períodes que es consideren és igual $n = 4$ anys. Aleshores, com

$$C_n = C_0\,(1+r)^n$$

tenim

$$C_0 = C_n\,(1+r)^{-n}$$

i substituint

$$C_0 = 27.536\ (\ 1 + 0{,}12\ )^{-4} \cong 27.536\ (\ 0{,}6355) = 17.500 \text{ euros}$$

valor actual que correspon a la segona de les possibilitats i que podem dir que és pràcticament igual a la primera.

Per a la tercera de les possibilitats, i utilitzant el mateix esquema anterior, tenim que el valor actual d'aquests dos pagaments és:

$C_0 = 21.592\ (\ 1 + 0{,}12\ )^{-2} + 584\ (\ 1 + 0{,}12\ )^{-6} \cong 17.213 + 296 = 17.509$ euros,

aproximadament, opció aquesta darrera no substancialment diferent de les anteriors (la diferencia és d'uns 9 euros).

Totes tres opcions es poden considerar, doncs pràcticament equivalents.

2.43. S'ofereixen a un comprador tres possibilitats per comprar un vehicle:
(1) un pagament de 19.000 euros al moment
(2) un pagament d'aquí a quatre anys de 28.500 euros
(3) un pagament d'aquí a un any de 20.000 euros i un altre de 1.000 euros dos anys després del primer pagament.
Suposant un marc d'interès compost del 10%, quina possibilitat és la més avantatjosa?

Si volem comparar aquestes tres opcions, hem de tenir un punt de referència en el temps per tenir els capitals equivalents corresponents a cada situació. Considerem com a punt de referència el moment actual, així la primera possibilitat és la del pagament de 19.000 euros.

En relació a la segona possibilitat, calcularem el capital actual corresponent a un capital final de 28.500 euros en un marc on el tipus interès anual és $r = 0{,}10$ i on el nombre de períodes que es consideren és de quatre anys. Aleshores, com

$$C_n = C_0\,(1 + r)^n$$

tenim

$$C_0 = C_n\,(1 + r)^{-n}$$

i substituint

$$C_0 = 28.500\ (\ 1 + 0{,}10\ )^{-4} = 28.500\ (1{,}1)^{-4} \cong 19.465 \text{ euros}$$

valor actual que correspon a la segona de les possibilitats.

Per a la tercera de les possibilitats, i utilitzant el mateix esquema anterior, tenim que el valor actual d'aquests dos pagaments és:

$$C_0 = 20.000\,(1+0{,}10)^{-1} + 1.000\,(1+0{,}10)^{-3} = 18.181 + 751 = 18.932 \text{ euros}$$

Per tant, l'opció més avantatjosa és la tercera.

2.44. Un deute de 250.000 euros venç d'aquí a tres anys i un altre de 300.000 euros d'aquí a quatre anys. Es vol reemplaçar per un únic pagament de 500.000 euros. Calculeu en quin moment es pot fer efectiu aquest pagament si treballem amb un interès compost del 12% i volem saldar tots els deutes pendents.

Utilitzarem el fet que els capitals es mouen en el temps d'acord amb una llei financera donada per

$$C_n = C_0\,(1+r)^n \quad \text{o bé,} \quad C_0 = C_n\,(1+r)^{-n}$$

on aleshores C_n i C_0 corresponen a capitals que considerem equivalents però en instants temporals diferents.

Per resoldre l'exercici, primer trobarem el deute total actual D_t que és equivalent a la suma dels valors actuals dels dos deutes. Després, identificarem el nombre n de períodes, en aquest cas anys, que s'ha de traslladar aquest capital per obtenir un valor final C_n de 500.000 euros (el pagament que volem fer).

$D_t = 250.000\ (1 + 0,12)^{-3} + 300.000\ (1 + 0,12)^{-4} =$

$= 250.000\ (1,12)^{-3} + 300.000\ (1,12)^{-4} = 10^4\ (1,12)^{-3}\ (25 + 30\ (1,12)^{-1})$

I obtenim aleshores les relacions:

$500.000 = 10^4\ (1,12)^{-3}\ (25 + 30\ (1,12)^{-1})\ (1 + 0,12)^n$

$50 = (1,12)^{-3}\ (25 + 30\ (1,12)^{-1})\ (1,12)^n$

$50 = (25 + 30\ (1,12)^{-1})\ (1,12)^{n-3}$

$(1,12)^{n-3} = 50 / (25 + 30\ (1,12)^{-1}) \cong 0,9655$

$n - 3 \cong \ln (0,9655) / \ln (1,12)$

$n \cong 3 + [\ln (0,9655) / \ln (1,12)]$

$n \cong 2,6903$ anys

que, aproximadament, correspon a 2 anys, 8 mesos i 8 dies.

Nota: S'ha suposat que en fraccions de període (n no natural) la llei financera adopta el mateix aspecte, $C_n = C_0\ (1+ r)^n$.

2.45. Per adquirir un local t'ofereixen per part de la constructora les següents opcions:
(1) un pagament al comptat de 8.000 euros
(2) un pagament d'aquí a 6 anys de 15.000 euros
(3) quatre pagaments, al final de cada any, per valor de 2.000 euros cadascun
Quina és la més avantatjosa de les tres opcions si suposem que l'interès (compost) del mercat és del 16%?

Si volem comparar aquestes tres opcions, hem de tenir un punt de referència en el temps per tenir els capitals equivalents corresponents a cada situació. Considerem com a punt de referència el moment actual, així la primera possibilitat és la del pagament de 8.000 euros.

En relació a la segona possibilitat, hem de calcular el capital actual corresponent a un capital final de 15.000 euros en un marc on el tipus interès anual és r = 0,16 i on el nombre de períodes que es consideren és n = 6 anys. Aleshores, com

$C_n = C_0\ (1+ r)^n$

tenim

$C_0 = C_n\ (1+ r)^{-n}$

i substituint,

$C_0 = 15.000\ (1 + 0,16)^{-6} = 15.000\ (0,4104) = 6.1560$ euros

valor actual que correspon a la segona de les possibilitats. Podem dir que és inferior a la primera possibilitat, que era la d'un pagament de 8.000 euros.

Per a la tercera de les possibilitats, i utilitzant el mateix esquema anterior, tenim que el valor actual d'aquests quatre pagaments és:

$C_0 = 2.000\ (1 + 0,16)^{-1} + 2.000\ (1 + 0,16)^{-2} + 2.000\ (1 + 0,16)^{-3} +$

$+ 2.000\ (1 + 0,16)^{-4} = 2.000\ (1,16^{-1} + 1,16^{-2} + 1,16^{-3} + 1,16^{-4}) =$

$= 2.000\ (2,7981) = 55.962$ euros.

La tercera opció equival a un pagament actual d'aproximadament 55.962 euros, opció aquesta darrera, substancialment inferior a la primera possibilitat (un pagament de 8.000 euros) i lleugerament per sota de la segona de les possibilitats (un valor actual de 6.156 euros aproximadament). La tercera possibilitat és la més avantatjosa.

2.46. Suposem que 400 euros arriben a 588 en un compte d'estalvis després de 4 anys. Si l'interès va ser capitalitzat semestralment, trobeu la taxa d'interès nominal, composta semestralment.

Sigui *r* la taxa semestral. Un any té dos semestres. Per tant, en quatre anys n'hi ha vuit.
Així, les dades del problema són: $n = 8,\ C_0 = 400,\ C_8 = 588$ i apliquem la fórmula de l'interès compost:

$$C_8 = C_0(1+r)^8,$$
$$588 = 400(1+r)^8,$$
$$\frac{588}{400} = (1+r)^8,$$
$$1{,}47 = (1+r)^8,$$
$$\sqrt[8]{1{,}47} = 1+r,$$
$$1{,}0493 \cong 1+r,$$
$$r \cong 1{,}0493 - 1 \cong 0{,}0493.$$

La taxa semestral va ser del 4,93%, de manera que la nominal anual fou del $2 \cdot 4{,}93 = 9{,}86\%$, capitalitzada semestralment.

2.47. A quina taxa d'interès nominal compost anualment, els diners es tripliquen en 9 anys?

Aquí el nombre de períodes és $n = 9$ anys. Sigui *r* la taxa anual i C_0 el capital que tenim inicialment. El capital final després d'aquests nou anys ha de ser tres vegades l'inicial. Per tant:

$$C_9 = 3C_0 = C_0(1+r)^9,$$
$$3 = (1+r)^9,$$
$$\sqrt[9]{3} = 1+r,$$
$$1{,}1298 \cong 1+r,$$
$$r \cong 1{,}1298 - 1 \cong 0{,}1298.$$

La taxa nominal anual demanada és del 12,98%.

2.48. Quant de temps es necessita perquè 500 euros ascendeixin a 800 a una taxa anual del 9% compost quadrimestralment?

Sigui *n* el nombre de quadrimestres que busquem. El capital inicial és $C_0 = 500$ euros i el final, $C_n = 800$. La taxa nominal anual és del 9% quadrimestral. Per tant, la taxa per quadrimestre és $r = 0{,}09/3 = 0{,}03$. Aplicant la fórmula de l'interès compost:

$$C_n = C_0(1+r)^n,$$
$$800 = 500(1+0{,}03)^n,$$
$$\frac{800}{500} = 1{,}6 = 1{,}03^n$$

Per resoldre aquesta darrera equació, com que la incògnita es troba a l'exponent, traiem logaritmes dels dos costats de la igualtat:

$$\ln 1{,}6 = \ln 1{,}03^n,$$
$$\ln 1{,}6 = n \ln 1{,}03,$$
$$n = \frac{\ln 1{,}6}{\ln 1{,}03} \cong \frac{0{,}47}{0{,}0295} \cong 15{,}9.$$

El nombre d'anys corresponent als 15,9 quadrimestres és $15{,}9/3 = 5{,}3$, és a dir, 5 anys i gairebé 4 mesos.
Nota: S'ha suposat que en fraccions de quadrimestre ($n \notin \mathbb{N}$) la llei financera es regeix per la mateixa fórmula, $C_n = C_0\,(1 + r)^n$.

2.49. Quina taxa efectiva és equivalent a una taxa nominal del 8% compost:
a) semestralment?
b) quadrimestralment?

Sigui C_0 el capital inicial que s'inverteix a una taxa nominal anual r, durant m períodes (el nombre de períodes que té un any), i que acaba donant un capital C_n El que es "guanya" respecte del capital inicial és:

$$C_n - C_0 = C_0\left(1+\frac{r}{m}\right)^m - C_0 = C_0\left[\left(1+\frac{r}{m}\right)^m - 1\right].$$

Definim $r_e = \left(1+\frac{r}{m}\right)^m - 1$ (*) com la taxa efectiva anual (o rendiment anual) equivalent a la taxa nominal r. r_e és la taxa d'interès simple que en un any generaria els mateixos interessos. Noteu que la taxa efectiva és independent del capital inicial.
Apliquem la fórmula (*) als dos casos particulars següents:
a) $n = 2,\ r = 0{,}08$

$$r_e = \left(1+\frac{0{,}08}{2}\right)^2 - 1 = 1{,}04^2 - 1 = 1{,}0816 - 1 = 0{,}0816, \text{ o bé, } 8{,}16\%.$$

Això vol dir que el que s'ha generat realment representa el 8,16% del capital inicial.
b) $n = 3,\ r = 0{,}08$

$$r_e = \left(1+\frac{0{,}08}{3}\right)^3 - 1 \cong 1{,}0267^3 - 1 \cong 1{,}0823 - 1 = 0{,}0823, \text{ o bé, } 8{,}23\%.$$

Això vol dir que el que s'ha generat realment representa el 8,23% del capital inicial.

2.50. Trobeu la taxa efectiva corresponent a la taxa nominal donada:
a) 8% compost trimestralment,
b) 12% compost mensualment,

Recordem que la fórmula de la taxa efectiva composta anualment és $r_e = \left(1+\frac{r}{n}\right)^n - 1$, on r és la taxa nominal anual i n el nombre de períodes d'interès per any.

a) $r = 0{,}08,\ n = 4$ trimestres,

$$r_e = \left(1+\frac{0{,}08}{4}\right)^4 - 1 \cong 0{,}0824 = 8{,}24\%.$$

b) $r = 0{,}12,\ n = 12$ mesos,

$$r_e = \left(1 + \frac{0{,}12}{12}\right)^{12} - 1 \cong 0{,}1268 = 12{,}68\%.$$

2.51. A quin import ascendiran 15.000 euros en 20 anys si són invertits a una taxa efectiva del 4%?

La taxa efectiva és composta anualment. De la seva fórmula podem deduir:

$$r_e = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n - 1 = 0{,}04 \Rightarrow \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = 1 + 0{,}04 = 1{,}04.$$

(*n* és el nombre de períodes d'interès per any; aquí no els coneixem però tampoc no els necessitem).

Després del primer any, els 15.000 euros passen a ser: $C_1 = C_0 \cdot 1{,}04 = 15.000 \cdot 1{,}04 = 15.600$.

Després del segon any: $C_2 = C_1 \cdot 1{,}04 = C_0 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}04 = 15.000 \cdot (1{,}04)^2 = 16.224$.

Per tant, després dels 20 anys els 15.000 euros es transformen en:

$$C_{20} = 15.000 \cdot (1{,}04)^{20} \approx 32.866{,}85.$$

2.52. Quants anys trigarà a triplicar-se una suma de diners a una taxa efectiva *r*?

Suposem que *r* ja ve donada en tant per u. Sigui *n* el nombre d'anys necessaris perquè un capital C_0 esdevingui $3C_0$. Fent servir la fórmula de l'interès compost:

$$3C_0 = C_0(1 + r)^n,$$

$$3 = (1 + r)^n,$$

i, traient logaritmes a ambdós costats de la igualtat:

$$\ln 3 = n \ln(1 + r),$$

$$n = \frac{\ln 3}{\ln(1 + r)}.$$

Vegem-ne un cas concret. Si, per exemple, $r = 0{,}05$, aleshores el nombre d'anys necessari per triplicar un determinat capital inicial és $n = \frac{\ln 3}{\ln(1 + 0{,}05)} = \frac{\ln 3}{\ln 1{,}05} \cong 22{,}5$.

2.53. Si un inversor té l'opció d'invertir al 5% compost diàriament o bé al 5,25% compost mensualment, quina serà la millor elecció?

Per comparar taxes d'interès per a un inversor, s'utilitzen les taxes efectives i es determina quina és la "millor". Per tant, determinarem quina és la taxa efectiva per a cadascuna de les taxes nominals donades i comparem els resultats.

<u>Cas 5% diari</u>:

$$r = 0{,}05,\ n = 365 \text{ dies}$$

$$r_e = \left(1 + \frac{0{,}05}{365}\right)^{365} - 1 \cong 0{,}0512 = 5{,}12\%$$

<u>Cas 5,25% mensual</u>:

$$r = 0{,}0525,\ n = 12 \text{ mesos}$$

$$r_e = \left(1 + \frac{0{,}0525}{12}\right)^{12} - 1 \cong 0{,}0538 = 5{,}38\%$$

La taxa efectiva del segon cas és més gran que la del primer, és a dir, el rendiment del segon cas és superior al del primer. Per tant, la segona opció sembla la millor.

2.54. Trobeu l'import total i l'interès compost per a la inversió i taxa donades:

a) 6.000 euros durant 8 anys a una taxa efectiva del 8%,

b) 750 euros durant 12 mesos a una taxa efectiva del 10%.

a) Siguin $C_0 = 6.000$ euros, $t = 8$ anys i $r_e = 0{,}08$. Després del primer any el capital esdevé:

$$C_1 = 6.000(1 + 0{,}08) = 6.000 \cdot 1{,}08 = 6.480 \text{ euros.}$$

Després del segon any:

$$C_2 = 6.480 \cdot 1{,}08 = 6.000 \cdot (1{,}08)^2 = 6.998{,}4 \text{ euros.}$$

Anàlogament, podem saber l'import total després dels 8 anys:

$$C_8 = 6.000 \cdot (1{,}08)^8 \approx 11.105{,}6 \text{ euros.}$$

L'interès compost per a la inversió i taxa donades és:

$$11.105{,}6 - 6.000 = 5.105{,}6 \text{ euros.}$$

b) Siguin $C_0 = 750$ euros, $t = 12$ mesos = 1 any i $r_e = 0{,}1$. Al final de l'any el capital esdevé:

$$C_1 = 7.500(1 + 0{,}1) = 825 \text{ euros.}$$

L'interès compost per a la inversió i taxa donades és $825 - 750 = 75.$ euros.

2.55. Suposem que l'assistència a una determinada universitat genera unes despeses de 18.500 euros l'any escolar 2001-2002. Això inclou matrícula, habitació, pensió, llibres i complements varis. Suposant una taxa d'inflació efectiva del 4% per a aquestes despeses, determineu a quant ascendiran per a l'any escolar 2006-2007.

El curs 2002-2003 les despeses ascendiran a:

$$C_1 = 18.500(1 + 0{,}04) = 18.500 \cdot 1{,}04 = 19.240 \text{ euros.}$$

El curs 2003-2004 les despeses ascendiran a:

$$C_2 = 19.240 \cdot 1{,}04 = 18.500 \cdot (1{,}04)^2 = 20.009 \text{ euros.}$$

Finalment, el curs 2006-2007 (és a dir, després de 5 anys), les despeses esdevindran:

$$C_5 = 18.500 \cdot (1{,}05)^{10} \cong 22.508 \text{ euros.}$$

2.56. Demostreu, bé utilitzant el mètode directe, bé el mètode d'inducció, la fórmula del capital final en un marc interès compost $\boldsymbol{C_n = C_0(1+r)^n}$.

La resolució d'aquest problema segons el mètode directe està vista en un problema anterior. Ara el resoldrem, doncs, utilitzant el mètode d'inducció.

(i) Al final del primer any, és a dir, quan $n = 1$, el capital que tenim, C_1, és el que teníem al principi de l'any, C_0, més els interessos, que són $C_0\, r$. Per tant:

$$C_1 = C_0 + C_0 r = C_0(1 + r)$$

Ja veiem que en aquest primer cas sí que es verifica.

Provem-ho per a $n = 2$:

Al final del primer any acabem de veure que el capital que tenim és C_1. Com que estem en un marc d'interès compost, els interessos generats durant el segon any són C_1 multiplicat per l'interès periodal r. Aleshores, el capital obtingut al final del segon any és:

$$C_2 = C_1 + C_1 r = C_0(1 + r) + C_0(1 + r)r \overset{(1)}{=} C_0(1 + r)(1 + r) = C_0(1 + r)^2$$

(1) Podem treure $C_0(1+r)$ factor comú.

En aquest cas també es verifica la igualtat.

(ii) Hipòtesi d'inducció:

Suposem que es verifica $C_n = C_0(1+r)^n$, que és el cas *n*.

(iii) Volem saber si $C_{n+1} = C_0(1+r)^{n+1}$, que és el cas $n+1$.

El capital obtingut al final de l'any $n+1$ és l'obtingut l'any *n* més els interessos generats per aquest capital. És a dir:

$$C_{n+1} = C_n + C_n r = C_n(1+r) \overset{HI}{=} C_0(1+r)^n(1+r) = C_0(1+r)^{n+1}$$

com es volia demostrar.

3. FUNCIONS REALS DE VARIABLE REAL

<u>Domini de definició</u>: Dom(f) = D(f) = { $x \in R$ | $\exists$ $f(x)$}

<u>Continuïtat</u>: $f(x)$ contínua en $x = a$ $\Leftrightarrow$

1. **Existeix $f(a)$.**
2. **Existeixen i són iguals $\lim_{x \to a^-} f(x)$, $\lim_{x \to a^+} f(x)$ i $\lim_{x \to a} f(x)$.**
3. **$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.**

<u>Derivabilitat</u>: $f'(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$, essent a un punt del domini amb veïns a dreta i esquerra (punt “interior”).

Interpretació geomètrica de la derivada: el pendent de la recta tangent de f en el punt a és el valor de $f'(a)$.

<u>Funció periòdica</u>: quan existeix un valor T real tal que $f(x) = f(x+KT)$ per a tot K enter (diem que és una funció de període T).

<u>Simetria</u>:

. Simetria respecte l’eix de les y (paritat, “parell”):

$$f(-x)=f(x) \quad \forall x \in \text{Dom}(f)$$

. Simetria respecte l’origen de coordenades (imparitat, “senar”):

$$f(-x)= -f(x) \quad \forall x \in \text{Dom}(f)$$

<u>Asímptotes</u>:

. Asímptota Horitzontal (AH): $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L \Rightarrow y = L$

. Asímptota Vertical (AV): $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \Rightarrow x = a$

<u>Punts de tall amb els eixos</u>

. Amb l’eix de les abscisses: y=0 (=$f(x)$) $\rightarrow$ (x,0)

. Amb l’eix de les ordenades: x=0 $\rightarrow$ (0, $f(0)$)

<u>Extrems</u>:

Candidats a ser extrems relatius: $f'(x)$= 0.

Si $f''(x) > 0$ $\rightarrow$ mínim.

Si $f''(x) < 0$ $\rightarrow$ màxim.

També són candidats els punts on no es pot derivar.

. Candidats a extrems absoluts en un interval [a,b]:

$f'(x)$= 0 on {$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$}.

Comparar $f(a)$, $f(x_1)$, ... , $f(x_k)$, $f(b)$

També son candidats els punts on no es pot derivar.

<u>Punts d’inflexió</u>:

Punt de la funció on la curvatura canvia.

Candidats a ser punts d’inflexió: $f''(x)$= 0 si $f'''(x) \neq 0$.

També son candidats els punts on no es pot fer la derivada de segon ordre.

<u>Tipus de curvatura</u>:

f és còncava en x_0 si $f''(x) \geq 0$.

f és convexa en x_0 si $f''(x) \leq 0$.

TEOREMES

<u>Teorema de Bolzano</u>

$f \in C_0([a,b])$ i $f(a)\,f(b) < 0 \Rightarrow \exists\, c \in (a,b)$ **tal que** $f(c)=0$

<u>Teorema de Weiertrass</u>

$f \in C_0([a,b]) \Rightarrow \exists$ **màx.** $(f(x))$ **i mín.** $(f(x))$ **en** $[a,b]$**, és a dir, la funció està fitada superiorment i inferior en l'interval** $[a,b]$

<u>Teorema de Rolle</u>

$f \in C_0([a,b])$, $f \in C_1((a,b))$, **i** $f(a)= f(b) \Rightarrow \exists\, c \in (a,b)$ **tal que** $f'(c)=0$

<u>Teorema de l'increment finit (o valor mig)</u>

$f \in C_0([a,b])$, $f \in C_1((a,b)) \Rightarrow \exists\, c \in (a,b)$ **tal que** $f(b)-f(a)=(b-a)\,f'(c)$

3.1. En un cultiu s'estan desenvolupant bacteris. El temps *t* (en hores) perquè el nombre de bacteris es dupliqui (temps de generació), és una funció de la temperatura *T* (en ^{o}C) del cultiu. Si aquesta funció ve donada per:

$$t = f(T) = \begin{cases} \dfrac{1}{24}T + \dfrac{11}{4}, & \text{si } 30 \le T \le 36, \\ \dfrac{4}{3}T - \dfrac{175}{4}, & \text{si } 36 < T \le 39. \end{cases}$$

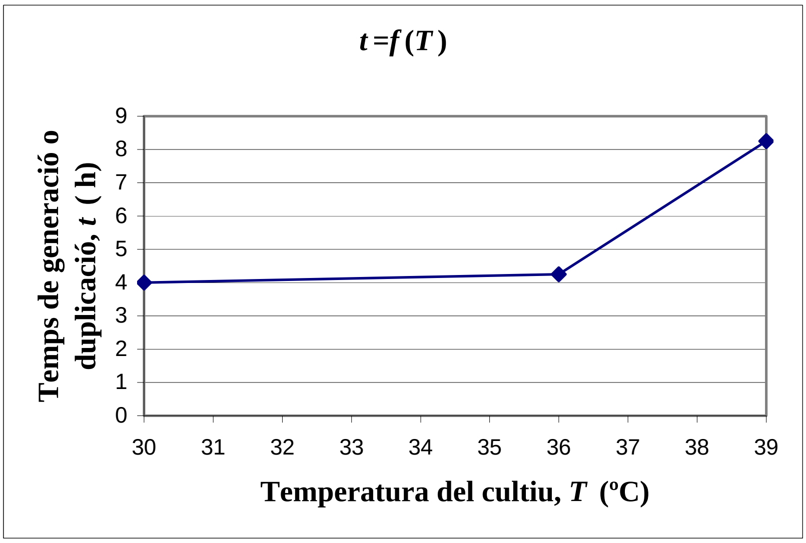
a) **Determineu el domini de *f*.**
b) **Trobeu $f(30)$, $f(36)$ i $f(39)$.**
c) **Doneu la gràfica d'aquesta funció.**
d) **És una funció contínua? És una funció derivable?**

a) $\mathrm{Dom}(f) = [30,39]$

b) $f(30) = \dfrac{1}{24}30 + \dfrac{11}{4} = 4$, $f(36) = \dfrac{1}{24}36 + \dfrac{11}{4} = \dfrac{17}{4}$, $f(39) = \dfrac{4}{3}39 - \dfrac{175}{4} = \dfrac{33}{4}$.

c) i **d)** És una funció definida en dos "trossos" que és contínua en el seu domini: en el valor 36 tenim que el límit per la dreta de $\dfrac{4}{3}T - \dfrac{175}{4}$ és $\dfrac{4}{3}36 - \dfrac{175}{4} = \dfrac{17}{4}$, que coincideix amb $f(36)$.

No és una funció derivable en el seu domini, ja que la derivada de f per l'esquerra de 36 és 1/24 i per la dreta de 36 és 4/3.



3.2. Per regular la seva temperatura en relació amb el calor ambiental, les ovelles augmenten el seu ritme respiratori per minut *r*, quan la longitud de la llana en centímetres *l* disminueix. Suposem que una ovella amb una longitud de llana de 2 centímetres té un ritme respiratori (en terme mitjà) de 160, i que una altra amb longitud de llana de 4 cm té un ritme respiratori de 125. Suposem alhora que *r* i *l* estan relacionades rectilíniament.

a) **Determineu una equació que doni *r* en funció de *l*.**
b) **Determineu el ritme respiratori d'una ovella amb una longitud de llana d'un centímetre**.

a) Si la relació és rectilínia, $r = f(l) = al + b$, essent a el pendent de la recta i b el terme independent, buscarem la recta que passa pels punts (2,160) i (4,125). Els paràmetres a i b es poden obtenir resolent el sistema d'equacions lineals:

$$\begin{cases} 160 = 2a + b \\ 125 = 4a + b \end{cases}$$

d'on $a = -17{,}5$ i $b = 195$. Tenim la funció $r = f(l) = -17{,}5l + 195$

b) Avaluant la funció en el punt 1 resulta $f(1)= 177{,}5$.

3.3. Un fabricant químic ha de proveir una ordre de 500 litres de solució d'àcid al 25%(és a dir, el 25% del volum és àcid). Si en existència estan disponibles solucions al 18% i al 30%, quants litres de cadascuna ha de mesclar per satisfer la comanda?

L1 : nombre de litres de la solució al 18%
L2 : nombre de litres de la solució al 30%
Podríem expressar L1 en funció de L2, o a l'inrevés, i tindríem una variable en funció de l'altra ($\text{L2} = 500 - \text{L1}$). Aleshores imposaríem la condició demanda sobre els percentatges.
També podríem expressar la relació entre les dues variables mitjançant un sistema d'equacions lineals. El sistema per resoldre és:

$$\begin{cases} \text{L1} + \text{L2} = 500 \\ 0{,}18\,\text{L1} + 0{,}30\,\text{L2} = 0{,}25\,(500) \end{cases}$$

i la solució és L1 = 208,33 litres de la de 18% i L2 = 291,66 litres de la de 30.

3.4. Un comerciant de cafè barreja tres tipus de cafè que valen 1,30, 1,40 i 1,60 euros per quilogram, per obtenir 100 quilos de cafè que ven a 1,45 euros. el quilogram. Si utilitza la mateixa quantitat dels dos cafès més cars, quina quantitat de cada tipus ha d'utilitzar en la barreja?

Considerem les variables, x_1: quantitat de cafè de 1,30 euros/kg, x_2: quantitat de cafè de 1,40 euros/kg, x_3: quantitat de cafè de 1,60 euros/kg.
D'acord amb les indicacions donades podem considerar només dues variables,
$x_1 = x$ i $x_2 = x_3 = y$, variables que hauran de verificar les següents condicions:

$$\begin{cases} x + 2y = 100 \\ 1{,}20x + 1{,}40y + 1{,}60y = 1{,}45(100) \end{cases}$$

de forma que aquest sistema és equivalent al sistema següent:

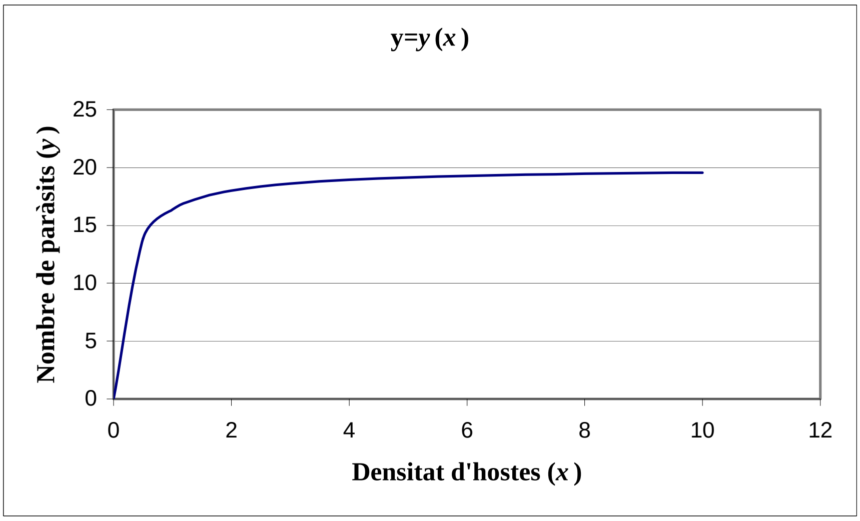
$$\begin{cases} x + 2y = 100 \\ 1{,}20\dfrac{x}{100} + 1{,}40\dfrac{y}{100} + 1{,}60\dfrac{y}{100} = 1{,}45 \end{cases}$$

La solució del sistema és: x = 16,66 kg, del cafè de 1,30 euros, y = 41,67 kg, del de 1,40 euros, i també 41,67 kg del de 1,60 euros.

3.5. Per a una determinada relació hoste-paràsit, fou determinat que quan la densitat d'hostes (nombre d'hostes per unitat d'àrea) és *x*, aleshores el nombre de paràsits era *y*, on $y = \dfrac{900x}{10+45x}$. Si la densitat dels hostes anés augmentant sense cap fita, a quin valor s'aproximaria *y*? Què podem dir d'aquesta relació?

Tenim que $\lim\limits_{x\to\infty} y = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{900x}{10+45x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{900x}{x}}{\frac{10+45x}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{900}{\frac{10}{x}+45} = \dfrac{900}{45}$=20, ja que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{10}{x} = 0$.

Per tant $\lim\limits_{x\to\infty} y = 20$, la recta y = 20 és una asímptota horitzontal de la gràfica corresponent a aquesta relació.



3.6. Un globus esfèric s'està desinflant. Trobeu la raó de canvi del seu volum respecte el seu radi, *r*. Avalueu aquesta raó de canvi quan el radi és 2.

<u>Indicació</u>: La raó de canvi de *V* respecte *r* és $\dfrac{dV}{dr}$. El volum de l'esfera és $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$.

Tenim que $\dfrac{dV}{dr} = \dfrac{4}{3}\pi 3r^2 = 4\pi r^2$ i, per tant, $\left.\dfrac{dV}{dr}\right|_{r=2} = 4\pi 2^2 = 16\pi$. La raó de canvi indica quina és la relació entre el canvi del volum i el canvi del radi, i això pren diferents valors en funció del valor que assoleix el radi.

3.7. La temperatura aproximada *T* de la pell en termes de la temperatura T_e del medi ambient ve donada per la relació $T = 32{,}8 + 0{,}27(T_e - 20)$, on *T* i T_e estan donats en graus Celsius. Trobeu la raó de canvi de *T* respecte T_e. Interpreteu aquesta raó de canvi.

Derivant de forma immediata obtenim, $\frac{dT}{dT_e} = 0,27$. Per tant la raó de canvi diu que en augmentar un grau Celsius la temperatura ambient, la temperatura aproximada de la pell incrementa 0,27 graus Celsius.

3.8. A Nova Escòcia es va dur a terme un estudi sobre l'arna d'hivern. Si les larves de l'arna cauen al peu dels arbres hostes a una distància de *x* peus des de la base de l'arbre, aleshores la densitat mitjana de les larves (nombre de larves per peu quadrat de sòl) *y*, ve donada per la relació $y = 59,3 - 1,5x - 0,5x^2$, $1 \le x \le 9$.

a) **Interpreteu la raó de canvi de *y* respecte *x*.**
b) **A quina raó està canviant la densitat de les larves respecte la distància des de la base de l'arbre quan $x = 6$?**
c) **Per a quin valor de *x* està decreixent la densitat de les larves a raó de 6 larves per peu quadrat?**

a) La raó de canvi de *y* respecte *x*, per a un valor de *x* fixat, indica de forma aproximada la variació lineal de *y* en variar *x*. És el pendent de la recta tangent a la corba en el punt $(x, f(x))$.

b) $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=6} = -1,5 - 2(0,5)x\big|_{x=6} = -1,5 - 6 = -7,5$, indicant que la densitat de les larves decreix en augmentar la distància a la base de l'arbre.

c) $\frac{dy}{dx} = -1,5 - 2(0,5)x = -6$ aleshores $x = 6 - 1,5 = 4,5$.

3.9. En una anàlisi recent de les aigües de mars poc profunds, Odum afirma que en aquestes aigües la matèria orgànica total *y* (en mil·ligrams per litre) és una funció de la diversitat *x* de les espècies (en nombre d'espècies per mil individus). Si $y = \frac{100}{x}$, a quina raó estarà canviant la matèria orgànica total respecte la diversitat d'espècies quan $x = 10$?

Tenim que

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=10} = \left.\frac{-100}{x^2}\right|_{x=10} = \frac{-100}{10^2} = -1.$$

Si per exemple calculem la raó de *y* respecte *x* en el punt *x*=100, obtenim

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=100} = \left.\frac{-100}{x^2}\right|_{x=100} = \frac{-100}{100^2} = -0,01.$$

S'observa que en augmentar el valor de la diversitat de les espècies, la matèria orgànica davalla i també la raó amb què canvia.

3.10. En un experiment depredador - presa, es determinà estadísticament que el nombre de preses consumides, *y*, per un depredador individual era una funció de la densitat *x* de preses (el nombre de preses per unitat d'àrea), on $y = \frac{0,7355x}{1 + 0,02744x}$.

Determineu la raó de canvi de les preses consumides respecte la seva densitat. És *y* = *y*(*x*) una funció creixent? Què passa quan *x* creix molt?

Es pot observar que la funció *y* = *y*(*x*) també es pot escriure com

$$y=\frac{0{,}7355x}{1+0{,}02744x}=\frac{\frac{0{,}7355x}{x}}{\frac{1+0{,}02744x}{x}}=\frac{0{,}7355}{\frac{1}{x}+0{,}02744}=\frac{0{,}7355}{0{,}02744+\frac{1}{x}}.$$

Tant utilitzant la primera versió com la segona, tenim que $\frac{dy}{dx}=\frac{0{,}7355}{(1+0{,}02744x)^2}$.

Quan x creix, el valor de la variable $y = y(x)$ tendeix a $\frac{0{,}7355}{0{,}02744}$, que és el resultat de calcular el límit de $\frac{0{,}7355}{0{,}02744+\frac{1}{x}}$ quan x tendeix a infinit. La funció derivada $y'(x)$ és una funció positiva a tot arreu, per tant la funció $y = y(x)$ és creixent.

3.11. El volum V d'una cèl·lula esfèrica ve donat per $V=\frac{4}{3}\pi r^3$, on r és el radi.

a) Trobeu la raó de canvi del volum respecte el radi quan $r=6{,}5\cdot 10^{-4}$ cm.

b) En temps t (en segons) el radi r (en centímetres) ve donat per $r=10^{-8}t^2+10^{-7}t$. Feu servir la regla de la cadena per trobar $\frac{dV}{dt}$ quan $t=10$ segons.

a) $\left.\frac{dV}{dr}\right|_{r=6{,}5\cdot 10^{-4}}=4\pi 6{,}5^2\left(10^{-4}\right)^2\pi=1{,}69\cdot 10^{-6}\pi=5{,}3\cdot 10^{-6}$

b) $V=V(r)=V(r(t))=\frac{4}{3}\pi(r(t))^3$, per tant

$$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt}=\left(\frac{dV}{dr}\right)\left(\frac{dr}{dt}\right)=\left(\frac{4}{3}\pi 3r^2\right)\left(2\ 10^{-8}\ t+10^{-7}\right)=\left(4\pi\left(10^{-8}\ t^2+10^{-7}t\right)^2\right)\left(2\ 10^{-8}\ t+10^{-7}\right)$$

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{t=10}=\left(4\pi\left(10^{-8}\ 10^2+10^{-7}10\right)^2\right)\left(2\ 10^{-8}\ 10+10^{-7}\right)\cong 1{,}5\cdot 10^{-17}$$

3.12. Sota determinades condicions, la pressió p desenvolupada en teixits vius per la radiació ultrasònica ve donada per una funció de la intensitat I: $p=(2\rho VI)^{1/2}$, on ρ és la densitat i V la velocitat de propagació. Aquí ρ i V són constants.

a) Trobeu la raó de canvi de p respecte I.

b) Trobeu la raó de canvi relativa.

<u>Indicació</u>: La raó de canvi relativa de p és $\frac{p'(I)}{p(I)}$.

a) Com que $p=(2\rho VI)^{1/2}$ tenim $P'(I)=\frac{dP}{dI}=\frac{1}{2}(\rho 2VI)^{-1/2}2\rho V=\frac{\rho V}{\sqrt{2}\sqrt{\rho V}\sqrt{I}}=\sqrt{\frac{\rho V}{2I}}$.

b) $\frac{p'(I)}{p(I)}=\frac{\sqrt{\frac{\rho V}{2I}}}{\sqrt{2\rho VI}}=\sqrt{\frac{\rho V}{2I2\rho VI}}=\sqrt{\frac{1}{4I^2}}=\frac{1}{2I}$.

3.13. **Suposem que per a cert grup de 20000 naixements, el nombre l_x de gent que assoleix l'edat de x anys és $l_x = 2000\sqrt{100-x}$, $0 \le x \le 100$.**

a) Quin tipus de relació tenen les variables?

b) Trobeu la raó de canvi de l_x respecte x i avalueu la vostra resposta quan $x = 36$.

c)Trobeu la raó de canvi relativa de l_x quan $x = 36$.

a) Les variables tenen una relació no lineal, de tipus potencial, $l_x = 2000(100-x)^{1/2}$

b) Donat que $l_x'(x) = \dfrac{dl_x}{dx} = 2000\dfrac{1}{2}(100-x)^{-1/2}(-1) = \dfrac{-1000}{\sqrt{100-x}}$

$$\left.\frac{dl_x}{dx}\right|_{x=36} = \frac{-1000}{\sqrt{100-36}} = \frac{-1000}{8} = -125.$$

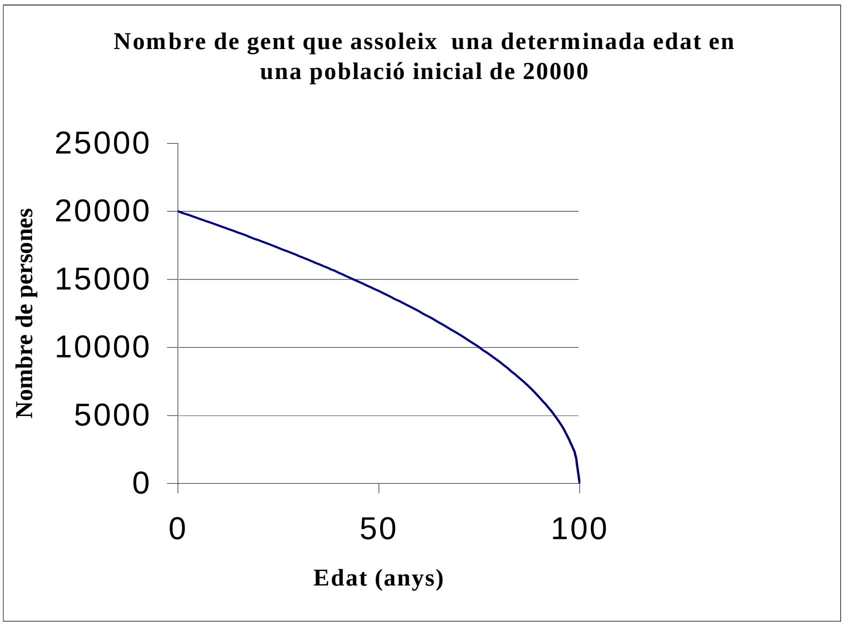
c)

$$\frac{l_x'(x)}{l_x(x)} = \frac{\dfrac{-1000}{\sqrt{100-x}}}{2000\sqrt{100-x}} = \frac{-1000}{2000(100-x)} = \frac{-1}{200-2x},$$

$$\frac{l_x'(36)}{l_x(36)} = \frac{-1}{200-2(36)} = \frac{-1}{128} = -7{,}8125\cdot 10^{-3},$$

o bé també ho podem calcular com:

$$\frac{l_x'(36)}{l_x(36)} = \frac{-125}{2000\sqrt{100-36}} = \frac{-125}{16000} = -7{,}8125\cdot 10^{-3}$$



3.14. **Un múscul té l'habilitat d'escurçar-se en estar sotmès a una càrrega. L'equació $(P+a)(v+b)=k$ s'anomena "equació fonamental de la contracció muscular". Aquí P és la càrrega imposada al múscul, v la velocitat de l'escurçament de les fibres musculars i a, b i k són constants positives.**

a) Utilitzeu la derivació implícita per obtenir $v' = v'(P)$

b) Expresseu *v* com a funció de *P*. Utilitzeu el vostre resultat per trobar $\frac{dv}{dP}$.

c) Comproveu que s'obté el mateix en els dos apartats anteriors.

a) $(P+a)(v+b)=k$ i per tant identificant la relació de *v* com a funció de *P*, considerem la següent relació $(P+a)(v(P)+b)=k$. Si derivem respecte *P*, hem d'utilitzar la regla de la derivada del producte:

$$1\cdot(v(P)+b)+(P+a)v'(P)=0,$$

de la que aïllant, obtenim

$$v'(P)=\frac{-v(P)-b}{P+a}\Rightarrow\frac{dv}{dP}=\frac{-v-b}{P+a}.$$

b) Aïllant de l'equació donada tenim

$$v=\frac{k}{P+a}-b=\frac{k-b(P+a)}{P+a};$$

i derivant directament (explícitament) la velocitat de l'escurçament respecte la carrega imposada al múscul:

$$\frac{dv}{dP}=\frac{-b(P+a)-(-bP+k-ab)\cdot 1}{(P+a)^2}=\frac{-bP-ab+bP-k+ab}{(P+a)^2}=\frac{-k}{(P+a)^2}=v'(P).$$

d) Comprovarem que les dues expressions obtingudes en a) i en b) són equivalents. Si considerem l'expressió de l'apartat a) $v'(P)=\frac{-v(P)-b}{P+a}=\frac{-v-b}{P+a}$, i substituïm el valor de *v* en termes de *P*, obtenim:

$$v'(P)=\frac{\frac{-k}{(P+a)}+b-b}{P+a}=\frac{-k}{(P+a)^2},$$

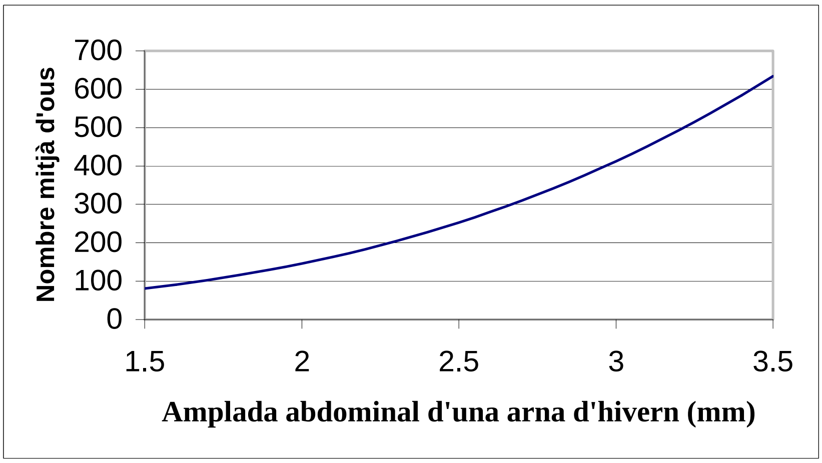
que coincideix amb el que hem trobat en l'apartat anterior.

3.15. En un estudi sobre l'arna d'hivern dut a terme a Nova Escòcia, es determinà que el nombre mitjà, *y*, d'ous en un arna femella és funció de la seva amplada abdominal *x* (en mil·límetres), on $y=f(x)=14x^3-17x^2-16x+34,\ \ 1{,}5\le x\le 3{,}5$.

a) Quin tipus de relació tenen les variables *x* i *y*?

b) A quina raó canvia el nombre d'ous respecte l'amplada abdominal quan $x=2$?

a) La relació entre les variables és de tipus polinòmic (de tercer grau) i gràficament tenim

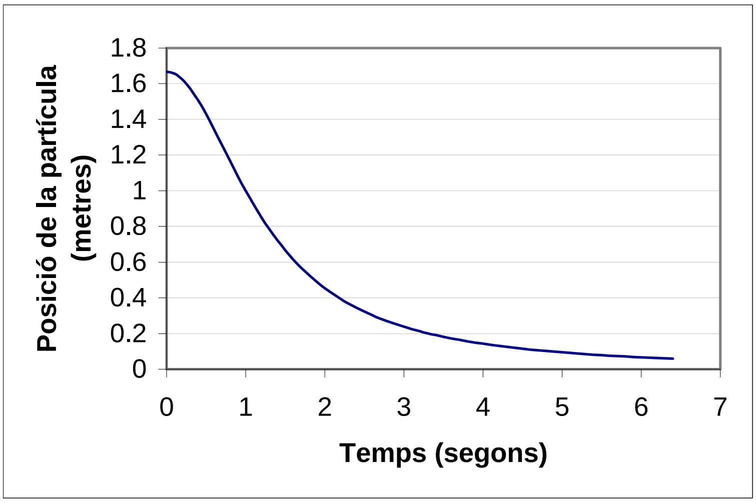


b) $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=2} = 84$ ous/mm.

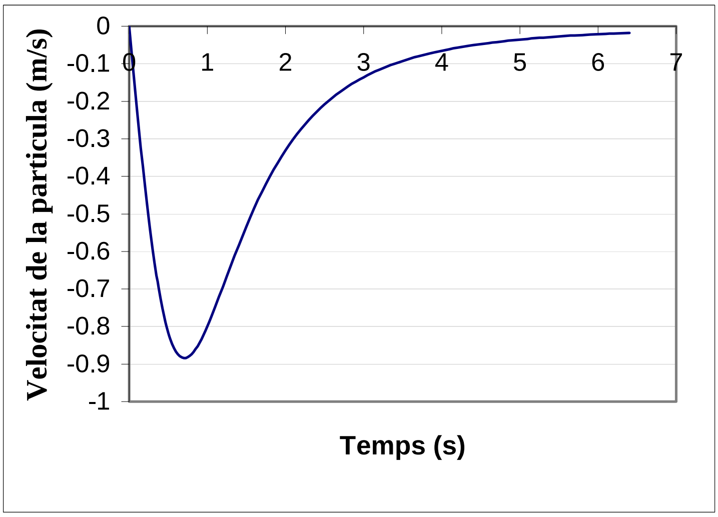
3.16. **La funció de posició d'una partícula movent-se en línia recta és $s = \dfrac{5}{2t^2+3}$, on t ve donat en segons i s en metres.**

- **a) Quina és la relació entre la posició de la partícula i el temps?**
- **b) Quina és la relació entre la velocitat de la partícula i el temps?**
- **c) Trobeu la velocitat de la partícula quan $t = 1$.**

a)



b) La funció velocitat és $v = v(t) = \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{-5}{\left(2t^2+3\right)^2}(4t) = \dfrac{-20t}{\left(2t^2+3\right)^2}$, i la seva representació gràfica és:



c) $\left.\dfrac{ds}{dt}\right|_{t=1} = v(1) = -\dfrac{4}{5}$

3.17. **Considereu la funció $f(x) = x\,/\,(2 - x)$. Esmenteu-ne algunes característiques.**

- No és una funció fitada sobre el conjunt R - $\{2\}$.

- La recta $x = 2$ és una asímptota vertical.
- Existeixen per a aquesta funció asímptotes de tipus horitzontal i de tipus vertical.
- La funció f està definida en el punt $x = 0$ i val 0.
- Aquesta funció no és una funció senar, és a dir, no es verifica la igualtat $f(x) = -f(-x)$.
- L'equació $f(x) = -1$ no té solució. És a dir, -1 no pertany a la imatge de f.
- Existeix un valor real x de forma que $f(x) = f(-x)$.
- La funció $f(x)$ no és sempre positiva sobre el conjunt de punts $x < 2$.
- El límit de $f(x)$ quan $x \to 0^+$ coincideix amb el límit de $f(x)$ quan $x \to 0^-$.
- El límit de $f(x)$ quan $x \to 2^+$ no coincideix amb el límit de $f(x)$ quan $x \to 2^-$.
- El límit de $f(x)$ quan $x \to -\infty$ és -1.
- El límit de $f(x)$ quan $x \to 2^-$ no és $-\infty$.
- El límit de $f(x)$ quan $x \to +\infty$ no és 1.

3.18. Considereu dues noves funcions definides a partir de la funció $f(x) = x / (2 - x)$:

$$g_1(x) = f(x) + 3 \quad \text{i} \quad g_2(x) = f(x + 3)\ ,$$

aleshores esmenteu-ne alguns lligams.

- No existeix un interval de la recta real on les funcions $g_1(x)$ i $g_2(x)$ prenguin els mateixos valors.
- Les gràfiques de $g_1(x)$ i $g_2(x)$ no es tallen en $x = 0$.
- El domini de definició de $f(x)$ coincideix amb el de la funció $g_1(x)$.
- El domini de definició de $f(x)$ no coincideix amb el de $g_2(x)$.
- El conjunt imatge de $f(x)$ i el conjunt imatge de $g_1(x)$ no són iguals.
- La gràfica de $g_2(x)$ s'obté traslladant la gràfica de $f(x)$ en la direcció de l'eix d'abscisses.
- El límit de $g_1(x)$ quan $x \to -\infty$ és 2.
- El límit de $g_2(x)$ quan $x \to -\infty$ és -1.

4. NOMBRES COMPLEXOS

Hi ha operacions algebraiques sense solució a R (per exemple, $x^2+1=0$). Aquest fet mou a ampliar el camp dels nombres reals. Es planteja l'existència d'un nou element, i (unitat imaginària) tal que $i^2=-1$. Les expressions $a+bi$, amb a i b reals, reben el nom de "nombres complexos".

<u>Forma binòmica d'un nombre complex</u>

$z=a+bi$, que es pot substituir per $(a,b)\in R^2$, on a = part real, b = part imaginària. És a dir: $C\cong R^2$. Es pot considerar $R\subset C$ fent la identificació de cada nombre real amb un nombre complex, la part imaginària del qual sigui nul·la.

L'oposat de z és $(-z)=-a-bi$

El conjugat de z és $\bar{z}=a-bi$

Operacions amb nombres complexos en forma binómica:

Igualtat: $a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c$ **i** $b=d$

Suma/substracció: $(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i$

Producte: $(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=(ac-bd)+(ad+bc)i$

Quocient: $\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\dfrac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$

<u>Forma polar d'un nombre complex</u>

$z=r_\alpha$, on r es coneix com el mòdul de z, i α es coneix com l'argument de z (unitats de l'argument: graus o radiants)

Operacions amb nombres complexos en forma polar:

Igualtat:

$$r_\alpha=r'_\beta \Leftrightarrow \begin{cases} r=r' \\ \alpha=\beta+2\pi k \text{ per a } k\in Z \text{ (considerant els arguments en radiants)} \\ \text{o bé :} \\ \alpha=\beta+360^{o}k \text{ per a } k\in Z \text{ (considerant els arguments en graus)} \end{cases}$$

Producte: $r_\alpha\cdot r'_\beta=(r\cdot r')_{\alpha+\beta}$

Quocient: $\dfrac{r_\alpha}{r'_\beta}=\left(\dfrac{r}{r'}\right)_{\alpha-\beta}$

Potenciació: $(r_\alpha)^n=\left(r^n\right)_{n\alpha}$

Radicació: $\sqrt[n]{r_\alpha}=\left(\sqrt[n]{r}\right)_\beta$, **on**

$$\beta=\frac{\alpha+2\pi k}{n},\ k=0,\ldots,n-1, \text{ si } \alpha \text{ es dóna en radiants,}$$

$$\text{o bé } \beta=\frac{\alpha+360^{o}k}{n},\ k=0,\ldots,n-1, \text{ si } \alpha \text{ és en graus.}$$

<u>Pas de binòmica a polar</u>

$$z=a+bi\rightarrow\begin{cases} r=\sqrt{a^2+b^2} \\ \tan\alpha=\dfrac{b}{a}\rightarrow\alpha=\arctan\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

***Alerta* amb els signes de *a* i *b*, que determinen el quadrant on es trobarà l'argument.**

Pas de polar a binòmica

$$z = r_\alpha \rightarrow \begin{cases} a = r\cos\alpha \\ b = r\sin\alpha \end{cases}$$

Forma trigonomètrica d'un nombre complex

$$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

Fórmula de Moivre:

$$\left[r(\cos\alpha + i\sin\alpha)\right]^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$$

Forma exponencial d'un nombre complex

$$z = re^{i\alpha}$$

4.1. Passeu a forma polar els següents nombres complexos[1]:

a) $3+4i$

b) $(3+4i)^{-1}$

c) $1-i\sqrt{3}$

a) $3+4i$

$$r = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\tan\alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow \alpha = \arctan\frac{4}{3} = 0{,}9273$$

Aleshores:

$$3+4i = 5_{0,9273}$$

Aquest nombre complex es troba al primer quadrant, doncs tant la seva part real com la seva part imaginària són positives, és a dir, el sinus i el cosinus del seu argument són positius.

b) $(3+4i)^{-1}$

En aquest apartat podem aprofitar que ja coneixem la forma polar del nombre complex de l'apartat anterior. Per tant:

$$(3+4i)^{-1} = (5_{0,9273})^{-1} = \left(\frac{1}{5}\right)_{-0,9273} \overset{(1)}{=} \left(\frac{1}{5}\right)_{2\pi-0,9273} = \left(\frac{1}{5}\right)_{5,3559}$$

(1)Un angle negatiu es pot expressar en positiu sumant-li una volta sencera, és a dir, 2π radiants.

Mètode alternatiu: Si no coneguéssim la forma polar del nombre $3+4i$ també podríem trobar el seu invers calculant el quocient $\frac{1}{3+4i}$, multiplicant numerador i denominador pel conjugat del denominador:

$$(3+4i)^{-1} = \frac{1}{3+4i} = \frac{3-4i}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{3-4i}{3^2-(4i)^2} = \frac{3-4i}{9+16} = \frac{3-4i}{25} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$$

Ara busquem el mòdul i l'argument d'aquest nombre:

[1] Donarem, en aquest capítol els resultats aproximats fins a quatre xifres decimals arrodonides. També cal recordar que quan es treballa amb radiants, no cal indicar les unitats, mentre que sí s'han d'indicar quan s'utilitzen graus (notació sexagesimal)

$$r=\sqrt{\left(\frac{3}{25}\right)^2+\left(\frac{-4}{25}\right)^2}=\sqrt{\frac{3^2+4^2}{25^2}}=\frac{\sqrt{9+16}}{25}=\frac{\sqrt{25}}{25}=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$$

$$\tan\alpha=\frac{-\frac{4}{25}}{\frac{3}{25}}=-\frac{4}{3}\Rightarrow\alpha=\arctan\left(-\frac{4}{3}\right)=-0{,}9273$$

Així doncs:

$$(3+4i)^{-1}=\left(\frac{1}{5}\right)_{-0{,}9273}$$

que coincideix amb el resultat obtingut fent servir el primer mètode.
L’argument d’aquest nombre és l’oposat de l’argument del nombre complex de l’apartat anterior. El seu sinus és negatiu i el seu cosinus positiu. Per tant, aquest nombre complex cau sobre el quart quadrant.

c) $1-i\sqrt{3}$

$$r=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$$

$$\tan\alpha=\frac{-\sqrt{3}}{1}=-\sqrt{3}\Rightarrow\alpha=\arctan(-\sqrt{3})=-\frac{\pi}{3}$$

Per tant:

$$1-i\sqrt{3}=2_{-\frac{\pi}{3}}=2_{2\pi-\frac{\pi}{3}}=2_{\frac{5\pi}{3}}$$

En aquest cas, com que la part imaginària és negativa i la part real és positiva, el sinus de l’argument és negatiu i el cosinus és positiu. Aleshores, el quadrant corresponent és el quart.

4.2. Passeu a forma binòmica els següents nombres complexos:

a) $(2\sqrt{2})_{\frac{3\pi}{4}}$

b) 8_{120°

c) 2_{30°

Sigui $r_\alpha=a+bi$ un nombre complex. Si coneixem la seva forma polar, què hem de fer per expressar-lo en binòmica? Utilitzarem la relació:

$$a=r\cos\alpha$$

$$b=r\sin\alpha$$

a) $(2\sqrt{2})_{\frac{3\pi}{4}}$

$$r=2\sqrt{2}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

La part real del nostre nombre és $a = r\cos\alpha = 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2$

La part imaginària del nostre nombre és $b = r\sin\alpha = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2$

Finalment:

$$(2\sqrt{2})_{\frac{3\pi}{4}} = -2 + 2i$$

b) $\mathbf{8_{120^\circ}}$

Procedirem de manera anàloga:

$$8_{120^o} = r\cos\alpha + (r\sin\alpha)i = 8\cos 120^o + 8\sin 120^o i = 8\left(-\frac{1}{2}\right) + 8\frac{\sqrt{3}}{2}i = -4 + 4\sqrt{3}i$$

c) $\mathbf{2_{30^\circ}}$

Anàlogament:

$$2_{30^o} = 2\cos 30^o + 2\sin 30^o i = 2\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\frac{1}{2}i = \sqrt{3} + i$$

4.3. Expresseu en forma exponencial els següents nombres complexos:

a) $\mathbf{3 - 4i}$

b) $\mathbf{8_{120^\circ}}$

Si r és el mòdul d'un nombre complex i α el seu argument, la forma exponencial d'aquest nombre és $r\,e^{i\alpha}$.

a) $\mathbf{3 - 4i}$

Primer busquem el mòdul i l'argument de $3 - 4i$:

$$r = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\tan\alpha = -\frac{4}{3} \Rightarrow \alpha = \arctan\left(-\frac{4}{3}\right) = -0{,}9273 = 2\pi - 0{,}9273 = 5{,}3559$$

Aleshores:

$$3 - 4i = 5e^{-0{,}9273i} = 5e^{5{,}3559i}$$

b) $\mathbf{8_{120^\circ}}$

Aquest cas és més fàcil, doncs el nombre ve donat en la seva forma polar:

$$8_{120^\circ} = 8e^{120^\circ i}$$

4.4. Trobeu els inversos respecte el producte dels següents nombres complexos:

a) $\mathbf{-4i}$

b) $\mathbf{3 + 2i}$

c) $\mathbf{7a - i}$ **, on *a* és un nombre real**

Trobar l'invers d'un nombre complex en forma binòmica és un cas particular de quocient de nombres complexos, amb numerador real igual a 1 i denominador el nombre complex donat.

Per tant, podem multiplicar i dividir pel conjugat del denominador per aconseguir expressar-lo en forma binòmica.

a) $-4i$

$$(-4i)^{-1}=\frac{1}{-4i}=\frac{4i}{(-4i)(4i)}=\frac{4i}{-16i^2}=\frac{4i}{16}=\frac{i}{4}=\frac{1}{4}i$$

b) $3+2i$

Anàlogament:

$$(3+2i)^{-1}=\frac{1}{3+2i}=\frac{3-2i}{(3+2i)(3-2i)}=\frac{3-2i}{3^2-(2i)^2}=\frac{3-2i}{9-4i^2}=\frac{3-2i}{9+4}=\frac{3-2i}{13}=\frac{3}{13}-\frac{2}{13}i$$

c) $7a-i$ **, on** a **és un nombre real**

D'igual forma:

$$(7a-i)^{-1}=\frac{1}{7a-i}=\frac{7a+i}{(7a-i)(7a+i)}=\frac{7a+i}{(7a)^2-i^2}=$$

$$=\frac{7a+i}{49a^2+1}=\frac{7a}{49a^2+1}+\frac{1}{49a^2+1}i$$

4.5. Resoleu l'equació $z^2-(5-14i)z-2(5i+12)=0$

Apliquem la fórmula de resolució de l'equació de segon grau:

$$z=\frac{5-14i\pm\sqrt{(5-14i)^2+8(5i+12)}}{2}=\frac{5-14i\pm\sqrt{25-140i-196+40i+96}}{2}=$$

$$=\frac{5-14i\pm\sqrt{-75-100i}}{2}=\frac{5-14i\pm\sqrt{25(-3-4i)}}{2}=\frac{5-14i\pm5\sqrt{-3-4i}}{2}$$

Calculem les dues arrels quadrades de $-3-4i$:

$$\sqrt{-3-4i}=\sqrt{5_{4,0688}}=\sqrt{5}_{\frac{4,0688+2\pi k}{2}} \text{ amb } k=0,1$$

$$k=0: \quad z_0=\sqrt{5}_{2,0344}$$

$$k=1: \quad z_1=\sqrt{5}_{5,1760}$$

Passem les arrels a la seva forma binòmica i obtenim $1-2i$ i $-1+2i$. Observem que una és l'oposada de l'altra i, llavors, el signe $\pm$ indica aquestes dues arrels de manera compacta.

Prenent l'arrel $1-2i$:

$$z=\frac{5-14i+5(1-2i)}{2}=\frac{5-14i+5-10i}{2}=\frac{10-24i}{2}=5-12i$$

Prenent l'arrel $-1+2i$:

$$z=\frac{5-14i+5(-1+2i)}{2}=\frac{5-14i-5+10i}{2}=-\frac{4i}{2}=-2i$$

4.6. Calculeu (donant totes les solucions de les arrels):

a) $\sqrt{5-6i}$

b) $\sqrt[3]{1+i}$

c) $\sqrt[5]{-i}$

d) $\dfrac{(1+i)^{107}}{(1+\sqrt{3}i)^{83}}(\sqrt{3}-i)^{14}$

e) $\sqrt[3]{\dfrac{(1+i)^{2}}{1+i\sqrt{3}}}$

Sigui r_α un nombre complex expressat en forma polar. Per trobar les seves arrels n-èsimes fem servir la fórmula:

$$z_k = \sqrt[n]{r_\alpha} = (\sqrt[n]{r})_{\frac{\alpha+2\pi k}{n}} \quad \text{amb} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$$

Hi ha, doncs, n arrels diferents.

a) $\sqrt{5-6i}$

Primer passem el nombre complex $5-6i$ a forma polar:

$$r = \sqrt{5^2 + (-6)^2} = \sqrt{25+36} = \sqrt{61}$$

$$\tan\alpha = -\frac{6}{5} \Rightarrow \alpha = \arctan\left(-\frac{6}{5}\right) = -0{,}8761 = 2\pi - 0{,}8761 = 5{,}4071$$

Així:

$$5-6i = \sqrt{61}_{5{,}4071}$$

Ara ja podem buscar les seves dues arrels quadrades:

$$\sqrt{5-6i} = \sqrt{\sqrt{61}_{5{,}4071}} = \left(\sqrt{\sqrt{61}}\right)_{\frac{5{,}4071+2\pi k}{2}} = \sqrt[4]{61}_{\frac{5{,}4071+2\pi k}{2}} \quad \text{amb} \ k = 0, 1$$

$$k=0: \ z_0 = \sqrt[4]{61}_{\frac{5{,}4071}{2}} = \sqrt[4]{61}_{2{,}7036}$$

$$k=1: \ z_1 = \sqrt[4]{61}_{\frac{5{,}4071+2\pi}{2}} = \sqrt[4]{61}_{5{,}8451}$$

b) $\sqrt[3]{1+i}$

Primer trobem la forma polar del nombre $1+i$:

$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\tan\alpha = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \alpha = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

Així:

$$1+i = \sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}}$$

Calculem les tres arrels cúbiques:

$$\sqrt[3]{1+i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}}} = \left(\sqrt[3]{\sqrt{2}}\right)_{\frac{\pi/4+2\pi k}{3}} = \sqrt[6]{2}_{\frac{\pi/4+2\pi k}{3}} \quad \text{amb} \ k = 0, 1, 2$$

$$k=0: \ z_0 = \sqrt[6]{2}_{\frac{\pi/4}{3}} = \sqrt[6]{2}_{\frac{\pi}{12}}$$

$$k=1: \ z_1 = \sqrt[6]{2}_{\frac{\pi/4+2\pi}{3}} = \sqrt[6]{2}_{\frac{9\pi/4}{3}} = \sqrt[6]{2}_{\frac{9\pi}{12}} = \sqrt[6]{2}_{\frac{3\pi}{4}}$$

$$k=2: \ z_2 = \sqrt[6]{2}_{\frac{\pi/4+4\pi}{3}} = \sqrt[6]{2}_{\frac{17\pi/4}{3}} = \sqrt[6]{2}_{\frac{17\pi}{12}}$$

c) $\sqrt[5]{-i}$

Primer busquem la forma polar del nombre $-i$:

$$r = \sqrt{0+1} = 1$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\alpha = 0\\ \sin\alpha = -1\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{2} \quad (1)$$

(1) Quan la part real és 0, distingim dos casos:

1[er]) Si el sinus és 1, l'angle corresponent és $\frac{\pi}{2}$

2[on]) Si el sinus és –1, l'angle corresponent és $\frac{3\pi}{2}$

Per tant, $-i = 1_{\frac{3\pi}{2}}$

En aquest cas sortiran cinc arrels, doncs l'ordre del radical és cinc:

$$\sqrt[5]{-i} = \sqrt[5]{1_{\frac{3\pi}{2}}} = \sqrt[5]{1}_{\frac{3\pi/2+2\pi k}{5}} = 1_{\frac{3\pi/2+2\pi k}{5}} \quad \text{amb} \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

$k = 0:$ $z_0 = 1_{\frac{3\pi/2}{5}} = 1_{\frac{3\pi}{10}}$

$k = 1:$ $z_1 = 1_{\frac{3\pi/2+2\pi}{5}} = 1_{\frac{7\pi}{10}}$

$k = 2:$ $z_2 = 1_{\frac{3\pi/2+4\pi}{5}} = 1_{\frac{11\pi}{10}}$

$k = 3:$ $z_3 = 1_{\frac{3\pi/2+6\pi}{5}} = 1_{\frac{15\pi}{10}} = 1_{\frac{3\pi}{2}}$

$k = 4:$ $z_4 = 1_{\frac{3\pi/2+8\pi}{5}} = 1_{\frac{19\pi}{10}}$

d) $\boldsymbol{\dfrac{(1+i)^{107}}{(1+\sqrt{3}i)^{83}}(\sqrt{3}-i)^{14}}$

Primer passem a forma polar cadascun dels factors involucrats en aquesta expressió:

- $1+i = \sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}}$, ja que

$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\tan\alpha = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \alpha = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$(1+i)^{107} = (\sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}})^{107} = \left((\sqrt{2})^{107}\right)_{\frac{107\pi}{4}} = \left(2^{107/2}\right)_{\frac{107\pi}{4}}$$

- $1+\sqrt{3}i = 2_{\frac{\pi}{3}}$, puix que

$$r = \sqrt{1+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \alpha = \arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$(1+\sqrt{3}i)^{83} = \left(2_{\frac{\pi}{3}}\right)^{83} = (2^{83})_{\frac{83\pi}{3}}$$

- $\sqrt{3}-i = 2_{\frac{11\pi}{6}}$, perquè

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\tan\alpha = \frac{-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{11\pi}{6}$$

$$(\sqrt{3}-i)^{14} = \left(2_{\frac{11\pi}{6}}\right)^{14} = (2^{14})_{\frac{77\pi}{3}}$$

Ara ja podem calcular:

$$\frac{(1+i)^{107}}{(1+\sqrt{3}i)^{83}}(\sqrt{3}-i)^{14} = \frac{\left(2^{107/2}\right)_{\frac{107\pi}{4}} \cdot (2^{14})_{\frac{77\pi}{3}}}{(2^{83})_{\frac{83\pi}{3}}} = \frac{\left[\left(2^{107/2}\right) \cdot 2^{14}\right]_{\frac{107\pi}{4}+\frac{77\pi}{3}}}{(2^{83})_{\frac{83\pi}{3}}} =$$

$$= \left[\frac{\left(2^{107/2}\right) \cdot 2^{14}}{2^{83}}\right]_{\frac{629\pi}{12}-\frac{83\pi}{3}} = \left(\frac{2^{107/2+14}}{2^{83}}\right)_{\frac{297\pi}{12}} = (2^{107/2+14-83})_{\frac{99\pi}{4}} \overset{(1)}{=} \left(2^{-31/2}\right)_{\frac{3\pi}{4}}$$

(1) Reduirem l'angle $\frac{99\pi}{4}$ a un angle entre 0 i 2π. És a dir, traurem un nombre enter de voltes

$$\frac{99\pi}{4} = \frac{24 \cdot 4\pi + 3\pi}{4} = \frac{24 \cdot 4\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = 24\pi + \frac{3\pi}{4} = 12 \cdot 2\pi + \frac{3\pi}{4}.$$

Per tant, l'angle $\frac{99\pi}{4}$ equival a l'angle $\frac{3\pi}{4}$.

e) $\boldsymbol{\sqrt[3]{\dfrac{(1+i)^2}{1+i\sqrt{3}}}}$

Trobarem la forma polar de l'expressió que hi ha sota el radical. Una manera de resoldre aquest exercici és trobar primer les formes polars del numerador i del denominador, i després fer la divisió:

- $1+i = \sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}}$, ja que

$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$
$$\tan\alpha = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \alpha = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$(1+i)^2 = (\sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}})^2 = (\sqrt{2})^2{}_{\frac{2\pi}{4}} = 2_{\frac{\pi}{2}}$$

- $1+\sqrt{3}i = 2_{\frac{\pi}{3}}$, puix que

$$r = \sqrt{1+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$
$$\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = \arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

- $\dfrac{(1+i)^2}{1+\sqrt{3}i} = \dfrac{2_{\pi/2}}{2_{\pi/3}} = 1_{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}} = 1_{\frac{\pi}{6}}$

Ara ja podem calcular les arrels:

$$\sqrt[3]{\frac{(1+i)^2}{1+\sqrt{3}i}} = \sqrt[3]{1_{\frac{\pi}{6}}} = \sqrt[3]{1}_{\frac{\pi/6+2\pi k}{3}} = 1_{\frac{\pi/6+2\pi k}{3}} \quad \text{amb} \quad k = 0,1,2$$

$$k=0:\ z_0 = 1_{\frac{\pi/6}{3}} = 1_{\frac{\pi}{18}}$$

$$k=1:\ z_1 = 1_{\frac{\pi/6+2\pi}{3}} = 1_{\frac{13\pi}{18}}$$

$$k=2:\ z_2 = 1_{\frac{\pi/6+4\pi}{3}} = 1_{\frac{25\pi}{18}}$$

Mètode alternatiu: També es pot resoldre l'exercici calculant primer el quocient directament (en forma binòmica), passant-lo després a forma polar per trobar les arrels:

$$\frac{(1+i)^2}{1+\sqrt{3}i} = \frac{(1+i)^2(1-\sqrt{3}i)}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)} = \frac{(1+i)^2(1-\sqrt{3}i)}{1-\left(\sqrt{3}i\right)^2} = \frac{(1+i)^2(1-\sqrt{3}i)}{1+3} =$$

$$= \frac{(1+i)^2(1-\sqrt{3}i)}{4} = \frac{(1-1+2i)(1-\sqrt{3}i)}{4} = \frac{2i(1-\sqrt{3}i)}{4} = \frac{2i-2\sqrt{3}i^2}{4} =$$

$$= \frac{2i+2\sqrt{3}}{4} = \frac{2(\sqrt{3}+i)}{4} = \frac{\sqrt{3}+i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

Ara passem $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ a forma polar:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i = 1_{\frac{\pi}{6}}$$

ja que

$$r = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = 1$$

$$\tan\alpha = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$$

i per calcular les tres arrels cúbiques de $1_{\frac{\pi}{6}}$ procedim com abans.

4.7. Calculeu $\frac{3+4i}{2-3i}$

Per dividir nombres complexos en forma binòmica hem de multiplicar numerador i denominador pel conjugat del denominador:

$$\frac{3+4i}{2-3i} = \frac{(3+4i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{6+9i+8i+12i^2}{4-9i^2} = \frac{6+17i-12}{4+9} = \frac{-6+17i}{13} = -\frac{6}{13}+\frac{17}{13}i$$

4.8. Calculeu $i^5 + i^{16} - i^6$

Recordem que:

$$i = \sqrt{-1}$$
$$i^2 = -1$$
$$i^3 = i^2 i = -i$$
$$i^4 = i^2 i^2 = (-1)(-1) = 1$$

En el nostre cas:

$$i^5 = i^4 i = i$$
$$i^{16} = (i^4)^4 = 1^4 = 1$$
$$i^6 = i^4 i^2 = -1$$

Per tant:

$$i^5 + i^{16} - i^6 = i + 1 - 1 = i$$

4.9. Calculeu $i^{1/4}$

Primer passem i a forma polar:

$$r = \sqrt{0+1} = 1$$
$$\left.\begin{array}{l}\cos\alpha = 0 \\ \sin\alpha = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

Aleshores:

$$i^{1/4} = \sqrt[4]{i} = \sqrt[4]{1_{\pi/2}} = \sqrt[4]{1}_{\frac{\pi/2+2\pi k}{4}} = 1_{\frac{\pi/2+2\pi k}{4}} \quad \text{amb } k = 0, 1, 2, 3$$

$$k = 0: \; z_0 = 1_{\frac{\pi/2}{4}} = 1_{\frac{\pi}{8}}$$
$$k = 1: \; z_1 = 1_{\frac{\pi/2+2\pi}{4}} = 1_{\frac{5\pi}{8}}$$
$$k = 2: \; z_2 = 1_{\frac{\pi/2+4\pi}{4}} = 1_{\frac{9\pi}{8}}$$
$$k = 3: \; z_3 = 1_{\frac{\pi/2+6\pi}{4}} = 1_{\frac{13\pi}{8}}$$

4.10. Calculeu $(1-i)\ (1+i^{-12})$

Calculem primer la potència de la unitat imaginària i^{-12}:

$$i^{-12} = \frac{1}{i^{12}} = \frac{1}{(i^4)^3} = \frac{1}{1^3} = 1$$

Aleshores:

$$(1-i)\ (1+i^{-12}) = (1-i)(1+1) = (1-i)\cdot 2 = 2 - 2i$$

4.11. Resoleu l'equació $(1+i)z = \frac{1-i}{z}$

Tal com fem amb una equació a coeficients reals, intentem aïllar la z d'aquesta equació:

$$(1+i)z=\frac{1-i}{z}\Rightarrow(1+i)z^2=1-i\Rightarrow$$

$$\Rightarrow z^2=\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-2i+i^2}{1-i^2}=\frac{1-1-2i}{1+1}=\frac{-2i}{2}=-i$$

La solució de l'equació és, doncs, l'arrel quadrada de $-i$. Primer passem $-i$ a forma polar:

$$r=\sqrt{0+(-1)^2}=1$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\alpha=0\\ \sin\alpha=-1\end{array}\right\}\Rightarrow\alpha=-\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}$$

Llavors:

$$z^2=-i\Rightarrow z=\sqrt{-i}=\sqrt{1_{3\pi/2}}=\sqrt{1}_{\frac{3\pi/2+2\pi k}{2}}=1_{\frac{3\pi/2+2\pi k}{2}}\quad\text{amb}\quad k=0,1$$

$$k=0:\ z_0=1_{\frac{3\pi/2}{2}}=1_{\frac{3\pi}{4}}$$

$$k=1:\ z_1=1_{\frac{3\pi/2+2\pi}{2}}=1_{\frac{7\pi}{4}}$$

Les solucions donades en forma binòmica són: $-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$ i $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$.

4.12. Trobeu els nombres complexos que són conjugats del seu quadrat.

Sigui $z=x+yi$ un nombre complex qualsevol i $z^c=x-yi$ el seu conjugat.

Estem buscant els nombres complexos z tals que $(z^2)^c=z$:

$$(z^2)^c=z\Leftrightarrow z^2=z^c\Leftrightarrow(x+yi)^2=x-yi\Leftrightarrow x^2-y^2+2xyi=x-yi$$

Igualant part real amb part real i part imaginària amb part imaginària obtenim el següent sistema:

$$\begin{cases}x^2-y^2=x\\ 2xy=-y\end{cases}$$

Cas 1:
Si $y\neq 0$:

$$2xy=-y\Rightarrow 2x=-1\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

Substituint x en la primera equació obtenim $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Aleshores, els nombres complexos que verifiquen la condició de l'enunciat són:

$$z_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Cas 2:
Si $y=0$:

$$x^2=x\Rightarrow x=0,\ x=1$$

En aquest cas els nombres complexos que verifiquen la condició de l'enunciat són:

$$z_3 = 1$$
$$z_4 = 0$$

4.13. Demostreu que els nombres complexos (diferents del zero) que són conjugats de la seva potència *k*-èsima tenen mòdul 1.

Si $z^k = z^{\mathrm{c}}$, aleshores $\left|z^k\right| = |z|^k = \left|z^{\mathrm{c}}\right| = |z|$ i, com que *z* és no nul, $|z|^{k-1} = 1$, d'on resulta que el mòdul de *z* és 1.

4.14. Trobeu els nombres complexos que són conjugats del seu cub.

$$(z^3)^{\mathrm{c}} = z \Rightarrow z^3 = z^{\mathrm{c}} \overset{(1)}{\Rightarrow} z^{\mathrm{c}} \cdot z^3 = z^{\mathrm{c}} \cdot z^{\mathrm{c}} = (z^{\mathrm{c}})^2 \Rightarrow \underbrace{z^{\mathrm{c}} \cdot z} \cdot z^2 = (z^{\mathrm{c}})^2 \Rightarrow |z|^2 \cdot z^2 = (z^{\mathrm{c}})^2 \Rightarrow$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} z^2 = (z^{\mathrm{c}})^2 \Rightarrow 1 = \left(\frac{z^{\mathrm{c}}}{z}\right)^2 \Rightarrow \frac{z^{\mathrm{c}}}{z} = \pm 1 \Rightarrow z^{\mathrm{c}} = \pm z$$

(1) Multipliquem els dos costats pel conjugat de *z*
(2) Apliquem l'exercici 4.13. al cas *k* = 3.
Per tant, distingirem els dos casos següents:
Cas 1:

$$z^{\mathrm{c}} = z \Rightarrow x - yi = x + yi \Rightarrow y = 0 \Rightarrow z = x \Rightarrow x^3 = x \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow z_1 = 0 \\ x = 1 \Rightarrow z_2 = 1 \\ x = -1 \Rightarrow z_3 = -1 \end{cases}$$

Cas 2:

$$z^{\mathrm{c}} = -z \Rightarrow x - yi = -x - yi \Rightarrow x = 0 \Rightarrow z = yi \Rightarrow (yi)^3 = -iy^3 = -iy \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y^3 = y \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \Rightarrow z_1 = 0 \\ y = 1 \Rightarrow z_4 = i \\ y = -1 \Rightarrow z_5 = -i \end{cases}$$

4.15. Trobeu el nombres complexos que són conjugats de la seva potència *k*-èsima.

Hem de buscar els nombres complexos *z* tals que $(z^k)^{\mathrm{c}} = z$. També podem escriure que $z^k = z^{\mathrm{c}}$, i aleshores, el mòdul de *z* és 1.
Si *r* és el mòdul d'un nombre complex i α el seu argument, la seva forma exponencial és $re^{i\alpha}$ i el seu conjugat és $re^{-i\alpha}$. Per tant, si *z* té mòdul 1, $z = e^{i\alpha}$ i $z^{\mathrm{c}} = e^{-i\alpha}$.

$$z^k = z^{\mathrm{c}} \Rightarrow (e^{i\alpha})^k = e^{-i\alpha} \Rightarrow e^{ik\alpha} = e^{-i\alpha} \Rightarrow e^{ik\alpha + i\alpha} = 1 \Rightarrow e^{i(k+1)\alpha} = 1 \Rightarrow (e^{i\alpha})^{k+1} = 1$$

Els nombres complexos buscats són les arrels (*k*+1) - èsimes de la unitat. Llavors:

$$z_k = \sqrt[k+1]{1} = 1_{\frac{2\pi m}{k+1}} = e^{\frac{2\pi m}{k+1} i} \quad \text{amb} \quad m = 0,1,\ldots,k.$$

Així, per exemple, si $k = 2$:

$$m=0:\ z_0=e^0=1$$
$$m=1:\ z_1=e^{2\pi/3}$$
$$m=2:\ z_2=e^{4\pi/3}$$

Si $k=3$:

$$m=0:\ z_0=e^0=1$$
$$m=1:\ z_1=e^{i2\pi/4}=e^{i\pi/2}$$
$$m=2:\ z_2=e^{i4\pi/4}=e^{i\pi}$$
$$m=3:\ z_3=e^{i6\pi/4}=e^{i3\pi/2}$$

4.16. Quin valor haurà de prendre *m* per tal que el nombre $\dfrac{5+mi}{3-2i}$ sigui real?

Primer calcularem aquest quocient i després imposarem que sigui un nombre real, és a dir, que la seva part imaginària sigui nul·la.
Calculem el quocient multiplicant numerador i denominador pel conjugat del denominador:

$$\frac{5+mi}{3-2i}=\frac{(5+mi)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\frac{15+10i+3mi-2m}{3^2-(2i)^2}=\frac{15-2m+(10+3m)i}{9+4}=$$
$$=\frac{15-2m+(10+3m)i}{13}=\frac{15-2m}{13}+\frac{10+3m}{13}i$$

Imposem que la part imaginària sigui zero:

$$\frac{10+3m}{13}=0\Rightarrow 10+3m=0\Rightarrow 3m=-10\Rightarrow m=-\frac{10}{3}$$

4.17. Trobeu els valors de *m* i *n* solucions de l'equació: $\dfrac{m+10i}{4+ni}=2+5i$.

Aquí el més rendible és passar el denominador $4+ni$ a l'altre costat, multiplicant.

$$\frac{m+10i}{4+ni}=2+5i\Rightarrow m+10i=(2+5i)(4+ni)\Rightarrow m+10i=8+2ni+20i+5ni^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow m+10i=8-5n+(2n+20)i$$

Recordem que dos nombres complexos són iguals si i només si les seves parts reals són iguals i les seves parts imaginàries també. Aleshores, hem de resoldre el següent sistema:

$$\begin{cases} m=8-5n \\ 10=2n+20 \end{cases}$$

De la segona equació obtenim el valor de n:
$10=2n+20\Rightarrow 10-20=2n\Rightarrow -10=2n\Rightarrow n=-5$
que substituirem en la primera equació per poder obtenir el valor de m:

$$m=8-5n=8-5(-5)=8+25=33$$

Per tant, els valors $n=-5$ i $m=33$ són la solució de l'equació proposada.

4.18. Proveu que si *z* és un complex de mòdul 1, aleshores $\dfrac{(1+z)i}{1-z}$ és real.

Sigui $z = a + bi$ un complex tal que $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$, és a dir, tal que $a^2 + b^2 = 1$.

Primer calculem $\dfrac{1+z}{1-z}$:

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{1+a+bi}{1-a-bi} \overset{(1)}{=} \frac{(1+a+bi)(1-a+bi)}{(1-a-bi)(1-a+bi)} = \frac{1-a+bi+a-a^2+abi+bi-abi+b^2i^2}{(1-a)^2-b^2i^2} =$$

$$= \frac{1-a^2+2bi-b^2}{(1-a)^2+b^2} = \frac{1-(a^2+b^2)+2bi}{(1-a)^2+b^2} \overset{(2)}{=} \frac{1-1+2bi}{(1-a)^2+b^2} = \frac{2b}{(1-a)^2+b^2}i$$

(1) Multipliquem numerador i denominador pel conjugat del denominador per obtenir aquest quocient.

(2) Recordem que $a^2 + b^2 = 1$.

Per tant:

$$\frac{(1+z)i}{1-z} = \frac{2b}{(1-a)^2+b^2}ii = \frac{2b}{(1-a)^2+b^2}i^2 = -\frac{2b}{(1-a)^2+b^2} \in R$$

que és un nombre real, com volíem demostrar.

4.19. Resoleu l'equació $z^3 + (1+i)z^2 + (i-2)z - 2i = 0$ sabent que $z = 1$ n'és una solució.

Com que sabem que $z = 1$ és una solució (entera) d'aquesta equació, podem aplicar la regla de Ruffini:

	1	1+i	-2+i	-2i
1		1	2+i	2i
	1	2+i	2i	0

Podem intentar un altre cop la regla de Ruffini, provant amb els divisors del coeficient 2i: {±1, ±2, ±i, ±2i} Resulta que z = -2 també és una solució d'aquesta equació.

	1	2+i	2i
-2		-2	-2i
	1	i	0

Una altra possibilitat hauria estat agafar z = -i. De qualsevol forma, podem concloure que la factorització del polinomi és:

$$z^3 + (1+i)z^2 + (i-2)z - 2i = (z-1)(z-(-2))(z+i) = (z-1)(z+2)(z+i)$$

i, per tant, les solucions de l'equació són: $z = 1,\ z = -i,\ z = -2$.

4.20. Proveu que $\left|\dfrac{1+ia}{1-ia}\right| = 1 \Leftrightarrow a \in \mathrm{R}$.

⇒) Suposem que $\left|\dfrac{1+ia}{1-ia}\right| = 1$. Sigui $a = a_1 + a_2 i$. Aleshores:

$$\frac{|1+ia|}{|1-ia|} = 1 \Rightarrow |1+ia| = |1-ia| \Rightarrow |1+i(a_1+ia_2)| = |1-i(a_1+ia_2)| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |1-a_2+a_1 i| = |1+a_2-a_1 i| \Rightarrow \sqrt{(1-a_2)^2+a_1^2} = \sqrt{(1+a_2)^2+(-a_1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-a_2)^2 + a_1^2 = (1+a_2)^2 + a_1^2 \Rightarrow (1-a_2)^2 = (1+a_2)^2 \Rightarrow 1 + a_2^2 - 2a_2 = 1 + a_2^2 + 2a_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2a_2 = 2a_2 \Rightarrow -a_2 = a_2$$

Com que l'únic nombre real que és igual al seu oposat és el zero, llavors $a_2 = 0$ i, per tant, $a = a_1$, és a dir, a és un real, que és el que volíem demostrar.

⇐) Ara suposem que a sigui un nombre real.

$$\left|\frac{1+ia}{1-ia}\right| = \frac{|1+ia|}{|1-ia|} = \frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+(-a)^2}} = 1$$

com volíem demostrar.

4.21. Proveu que, si $a \in R$, l'equació $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+ia}{1-ia}$ té totes les solucions reals.

$\frac{1+iz}{1-iz}$ són les arrels n-èsimes de $\frac{1+ia}{1-ia}$. Per l'apartat anterior, sabem que $\left|\frac{1+ia}{1-ia}\right| = 1$. Podem deduir, doncs, que $\frac{1+ia}{1-ia}$ és de la forma 1_α, on α és l'argument.

Aleshores:

$$\frac{1+iz}{1-iz} = \sqrt[n]{\frac{1+ia}{1-ia}} = \sqrt[n]{1_\alpha} = 1_{\frac{\alpha+2\pi k}{n}} \quad \text{amb} \quad k = 0,1,\dots,n-1$$

Això implica $\left|\frac{1+iz}{1-iz}\right| = 1$ i, fent servir l'exercici anterior un altre cop, resulta que $z \in R$.

Per tant, les solucions de l'equació de l'enunciat són reals.

4.22. Descriviu el conjunt de nombres complexos que compleixen $z + z^c = |z|^2$.

Sigui $z = x + yi$ un nombre complex i $z^c = x - yi$ el seu conjugat. El seu mòdul és $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ i, per tant, $|z|^2 = x^2 + y^2$.

Aleshores:

$$z + z^c = |z|^2 \Rightarrow x + yi + x - yi = x^2 + y^2 \Rightarrow 2x = x^2 + y^2 \Rightarrow x^2 - 2x + y^2 = 0$$

Si sumem i restem 1 al membre esquerre d'aquesta darrera expressió podem construir un binomi al quadrat:

$$x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$$

Els punts solució descriuen la circumferència de centre (1,0) i radi 1.

4.23. Calculeu $\frac{(1+\sqrt{2}\,i)^3}{(3-\sqrt{2}\,i)^2}$

Una forma de calcular aquesta expressió és passar primer numerador i denominador a forma polar:

- $1 + \sqrt{2}\,i = \sqrt{3}_{0,9553}$

$$r = \sqrt{1+(\sqrt{2})^2} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} \Rightarrow \alpha = \arctan\sqrt{2} = 0{,}9553$$

$$(1+\sqrt{2}\,i)^3 = (\sqrt{3}_{0,9553})^3 = (\sqrt{3})^3_{0,9553\cdot 3} = (3\sqrt{3})_{2,8659}$$

- $3-\sqrt{2}\,i = \sqrt{11}_{-0,4405} = \sqrt{11}_{5,8426}$

$$r = \sqrt{3^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{9+2} = \sqrt{11}$$

$$\tan\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \alpha = \arctan\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = -0,4405 = 5,8426$$

$$(3-\sqrt{2}\,i)^2 = (\sqrt{11}_{5,8426})^2 = (\sqrt{11})^2_{5,8426\cdot 2} = 11_{11,6852} = 11_{5,4022}$$

Ara ja podem calcular el quocient:

$$\frac{(1+\sqrt{2}\,i)^3}{(3-\sqrt{2}\,i)^2} = \frac{(3\sqrt{3})_{2,8659}}{11_{5,4022}} = \left(\frac{3\sqrt{3}}{11}\right)_{2,8659-5,4022} = 0,4724_{-2,5363} = 0,4724_{3,7469}$$

<u>Mètode alternatiu</u>: També podem calcular aquest quocient fent servir la forma binòmica de les potències que trobem al numerador i al denominador.

4.24. **Demostreu que, si z és un nombre complex de mòdul 1, aleshores $|2+z|^2 + |2-z|^2 = 10$**

Sigui $z = x + yi$ un nombre complex amb mòdul 1, és a dir, tal que $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$.

Elevant al quadrat els dos costats de la igualtat tenim que $|z|^2 = x^2 + y^2 = 1$.

Aleshores:

$$|2+z|^2 + |2-z|^2 = |2+x+yi|^2 + |2-x-yi|^2 = (2+x)^2 + y^2 + (2-x)^2 + y^2 =$$

$$= 4 + x^2 + 4x + y^2 + 4 + x^2 - 4x + y^2 = 8 + 2x^2 + 2y^2 = 8 + 2(x^2 + y^2) = 8 + 2 = 10$$

com es volia demostrar.

4.25. **Calculeu $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{5}+i}\right)^{\frac{1}{3}}$.**

Ens interessa tenir el quocient en forma polar per poder trobar les seves arrels cúbiques.
Una forma de calcular aquest quocient és passar numerador i denominador a forma polar:

- $1 - i = \sqrt{2}_{5,4978}$

$$r = \sqrt{1 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\tan\alpha = -\frac{1}{1} = -1 \Rightarrow \alpha = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} = 5,4978$$

- $\sqrt{5} + i = \sqrt{6}_{0,4205}$

$$r = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 1} = \sqrt{5+1} = \sqrt{6}$$

$$\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 0,4205$$

Aleshores:

$$\frac{1-i}{\sqrt{5}+i} = \frac{\sqrt{2}_{5,4978}}{\sqrt{6}_{0,4205}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\right)_{5,4978-0,4205} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)_{5,0773} = 0,5774_{5,0773}$$

Ara ja podem calcular les arrels cúbiques:

$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{5}+i}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{0{,}5774_{5{,}0773}} = \left(\sqrt[3]{0{,}5774}\right)_{\frac{5{,}0773+2\pi k}{3}} = 0{,}8327_{\frac{5{,}0773+2\pi k}{3}} \quad \text{amb} \quad k = 0, 1, 2$$

$$k = 0: \ z_0 = 0{,}8327_{1{,}6923}$$

$$k = 1: \ z_1 = 0{,}8327_{3{,}7867}$$

$$k = 2: \ z_2 = 0{,}8327_{5{,}8811}$$

Mètode alternatiu: També podem calcular $\frac{1-i}{\sqrt{5}+i}$ en forma binòmica i passar el resultat a forma polar per obtenir les tres solucions.

4.26. Calculeu $(1+5i)^{-1}\,(2+3i)\,(1+i)^{10}$

Primer calculem cadascun dels factors involucrats en el producte:

- $(1+5i)^{-1} = \frac{1}{1+5i} = \frac{1-5i}{(1+5i)(1-5i)} = \frac{1-5i}{1-25i^2} = \frac{1-5i}{1+25} = \frac{1-5i}{26}$
- Utilitzarem la fórmula de Moivre per calcular $(1+i)^{10}$.

  Fórmula de Moivre:

  $$(r(\cos\alpha + i\sin\alpha))^n = r^n(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)),$$

  essent $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ la forma trigonomètrica d'un nombre complex qualsevol, i en el nostre cas, n = 10.

  Primer trobem el mòdul i l'argument de 1+i per donar la forma trigonomètrica d'aquest nombre complex:

  $$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

  $$\tan\alpha = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \alpha = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

  Aleshores:

  $$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$(1+i)^{10} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{10} = (\sqrt{2})^{10}\left(\cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2}\right) = (\sqrt{2})^{10}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = (\sqrt{2})^{10}\,i$$

Finalment:

$$(1+5i)^{-1}\,(2+3i)\,(1+i)^{10} = \frac{1-5i}{26}(2+3i)(\sqrt{2})^{10}\,i = (\sqrt{2})^{10}\,\frac{1}{26}(1-5i)(2i+3i^2) =$$

$$= (\sqrt{2})^{10}\,\frac{1}{26}(1-5i)(2i-3) = (\sqrt{2})^{10}\,\frac{1}{26}(2i-3-10i^2+15i) = (\sqrt{2})^{10}\,\frac{1}{26}(7+17i) =$$

$$= \frac{2^5}{26}(7+17i) = \frac{32(7+17i)}{26} = \frac{16(7+17i)}{13} = \frac{112+272i}{13} = \frac{112}{13} + \frac{272}{13}i$$

Mètode alternatiu: També es pot calcular aquesta expressió trobant primer la forma polar dels factors $(1+5i)^{-1}$, $(2+3i)$ i $(1+i)^{10}$ i fent després el producte.

4.27. Representeu gràficament els conjunts de nombres *z* complexos que satisfan les següents condicions, tenint en compte que tot nombre complex es pot identificar amb un punt del pla, on l'abscissa (*x*) és la part real i l'ordenada (*y*) la part imaginària:

a) $\mathrm{Re}(z) \geq 2$

b) $zz^c \leq 1$

c) $\mathrm{Im}(z) \leq -1$

d) $z^2 - 2z + 3 \in R$

e) $\mathrm{Re}(z^2 - 2z + 3) = 2$

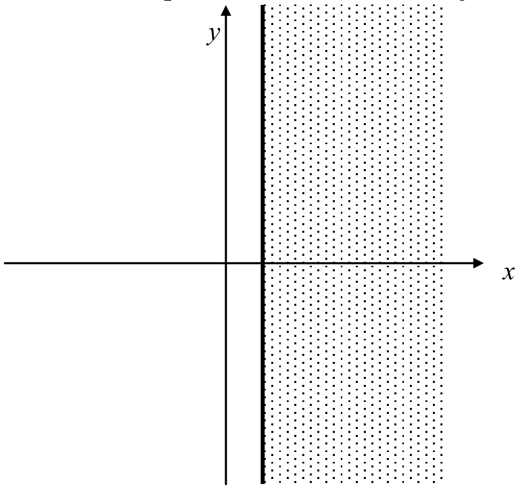
f) $z^c = -z$

g) $z^c = z^{-1}$

Sigui $z = x + yi$ un nombre complex qualsevol, és a dir, Re(z) = x i Im(z) = y.

a) $\mathrm{Re}(z) \geq 2$

Estem buscant els nombres complexos tals que la seva part real sigui més gran o igual que dos. Per tant, hem de trobar els punts (x, y) del pla tals que $x \geq 2$.
La primera coordenada dels punts de la zona ombrejada és més gran o igual que dos.



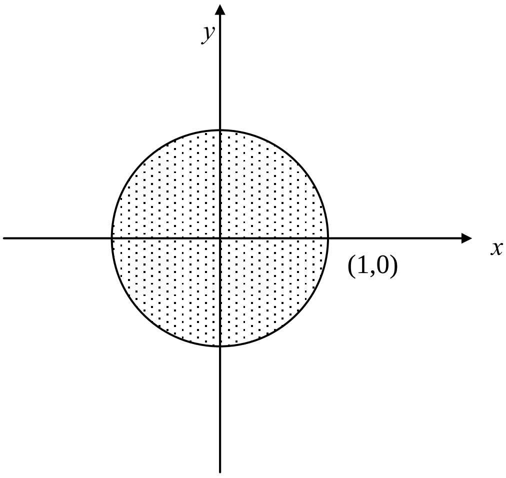
y=-x+1

b) $zz^c \leq 1$

Sigui $z = x + yi$ un nombre complex qualsevol i $z^c = x - yi$ el seu conjugat.

$$zz^c = (x + yi)(x - yi) = x^2 - xyi + xyi + y^2 = x^2 + y^2 \leq 1$$

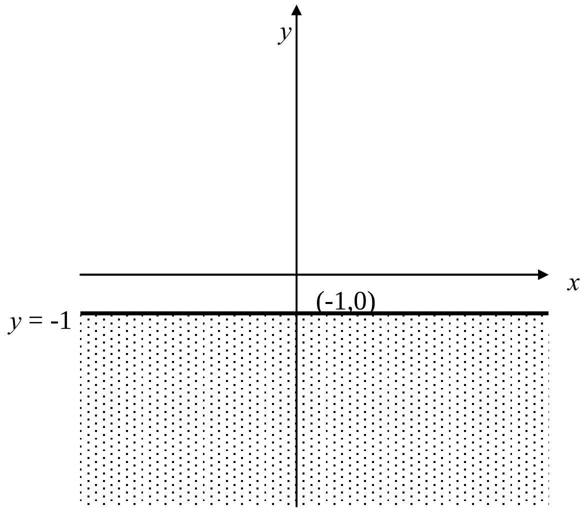
que representa el cercle de centre (0,0) i radi 1.



Com que la desigualtat no és estricta, els punts de la vora del cercle (és a dir, els punts sobre la circumferència) també són del conjunt solució.

c) Im(z) ≤ -1

Aquest cas és anàleg al primer però aquí hem de buscar els punts del pla amb ordenada més petita o igual que –1, és a dir, $y \leq -1$, que representa la part ombrejada.



d) z^2-2z + 3 ∈ *R*

Sigui $z = x + yi$ un nombre complex qualsevol.

Primer calculem $z^2\text{-}2z + 3$:

$$z^2\text{-}2z + 3 = (x + yi)^2 - 2(x + yi) + 3 = x^2 + 2xyi - y^2 - 2x - 2yi + 3 =$$

$$= \underbrace{x^2 - y^2 - 2x + 3}_{\text{Re}(z)} + \underbrace{(2xy - 2y)}_{\text{Im}(z)} i$$

Ara hem d'imposar que el nombre $z^2\text{-}2z + 3$ sigui real, és a dir, que la seva part imaginària sigui zero:

$$\text{Im}(z) = 2xy - 2y = 0 \Rightarrow xy - y = 0 \Rightarrow (x-1)y = 0$$

Quan el producte de dos factors és nul, considerem les solucions que s'obtenen en igualar a zero cadascun d'aquests factors:

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

El primer cas representa els nombres complexos amb part real igual a 1: $z = 1 + yi$ i el segon, els complexos amb part imaginària igual a zero: $z = x$, és a dir, els nombres reals.

e) Re(z^2 - 2z + 3) = 2

Per l'apartat (d) d'aquest exercici sabem que:

$$z^2 - 2z + 3 = \underbrace{x^2 - y^2 - 2x + 3}_{\text{Re}(z)} + \underbrace{(2xy - 2y)}_{\text{Im}(z)} i$$

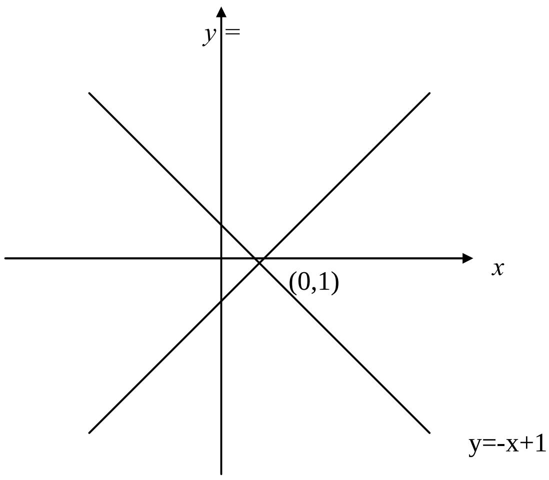
En aquest cas, hem d'igualar la part real a 2:

$$\text{Re}(z) = x^2 - y^2 - 2x + 3 = 2$$

Per poder obtenir un quadrat perfecte sumem i restem 1 en el membre de l'esquerra:

$$x^2 - y^2 - 2x + 3 + 1 - 1 = 2$$
$$\underbrace{x^2 - 2x + 1} - y^2 + 2 = 2$$
$$(x-1)^2 - y^2 = 0$$
$$y^2 = (x-1)^2 \Rightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ y = -(x-1) = -x + 1 \end{cases}$$

El conjunt solució és la unió de les rectes $y = x - 1$ i $y = -x + 1$, és a dir, els nombres complexos: $z = x + (x-1)i$ i $z = x - (x-1)i$.
Observació: Els nombres d'un dels dos grups són els conjugats dels de l'altre.



f) $z^c = -z$

Si $z = x + yi$ és un nombre complex qualsevol, el seu conjugat és $z^c = x - yi$ i el seu oposat $-z = -x - yi$. Hem d'imposar que el conjugat sigui igual a l'oposat:

$z^c = -z \Rightarrow x - yi = -x - yi \Rightarrow x = -x \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$

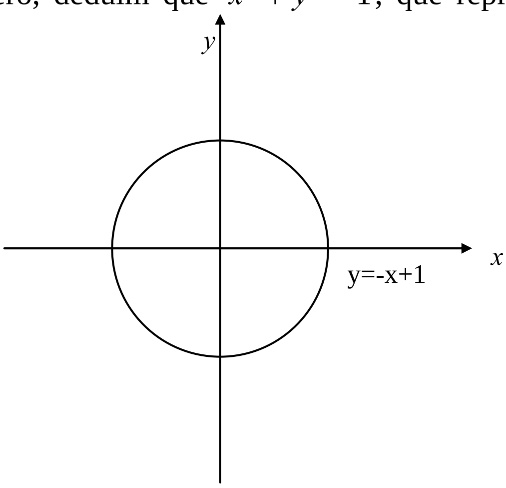
Per tant, els nombres complexos tals que el seu conjugat és igual al seu oposat són aquells que tenen part real nul·la, és a dir, els nombres imaginaris purs.

g) $z^c = z^{-1}$

Recordem que només podem calcular l'invers dels nombres complexos no nuls.

$$z^c = z^{-1} \Rightarrow x - yi = \frac{1}{x + yi} = \frac{x - yi}{(x + yi)(x - yi)} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2}$$

Com que z no pot ser zero, deduïm que $x^2 + y^2 = 1$, que representa la circumferència de centre (0,0) i radi 1.



5. VECTORS DELS CONJUNTS $\Re^n$

Producte cartesià de *n* conjunts: $A_1\text{x}...\text{x}A_n = \{(x_1,...,x_n): x_1 \in A_1 ... x_n \in A_n\}$

$\Re\text{x}.^{(n}..\text{x}\Re = \Re^n$

Dels elements del conjunt $\Re^n$ en diem, a més d'elements, vectors i/o punts.

Suma (resta) de vectors del conjunt $\Re^n$: $(x_1,...,x_n) \pm (y_1,...,y_n) = (x_1 \pm y_1,...,x_n \pm y_n)$

Producte d'un real per un vector del conjunt $\Re^n$: $k(x_1,...,x_n) = (kx_1,...,kx_n)$

Producte escalar (euclidi habitual) de vectors del conjunt $\Re^n$:

$(x_1,...,x_n)\cdot(y_1,...,y_n) = \langle (x_1,...,x_n)\cdot(y_1,...,y_n)\rangle = x_1y_1 + ... + x_ny_n$

Mòdul d'un vector del conjunt $\Re^n$: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$

Distància entre vectors (entre punts) del conjunt $\Re^n$: $d(x,y) = \|x - y\|$

Independència lineal de vectors: $x_1,...,x_n \in \Re^n$ **són linealment independents si i només si** $a_1x_1,...,a_kx_k = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_k = 0$**. En cas contrari són linealment dependents (un es pot donar com una combinació lineal d'altres:** $x_k = \lambda_1 \cdot x_1 + ... + \lambda_{k-1} \cdot x_{k-1}$**)**

Un conjunt de *n* vectors linealment independents del conjunt $\Re^n$ formen una base del conjunt $\Re^n$.

Tot vector del conjunt $\Re^n$ es pot escriure com una combinació lineal (única) d'una base del conjunt $\Re^n$.

Sigui $A \subset \Re^n$ tal que estigui format per totes les combinacions lineals d'un nombre *m* de vectors linealment independents. Aleshores del conjunt *A* se'n diu subespai vectorial del conjunt $\Re^n$, i del nombre *m* se'n diu dimensió del subespai vectorial (i aquells *m* vectors se'n diu una base del subespai vectorial). Si *A* és un subespai vectorial de dimensió *m*, es poden trobar infinits conjunts de *m* vectors linealment independents, tal que les seves combinacions lineals donin *A*, qualsevol dels esmentats conjunts rep el nom de base del conjunt *A*

Funcions lineals entre conjunts de la forma $\Re^n$

$\Re^n \xrightarrow{F} \Re^m$ / $F(x_1,...,x_n) = (a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n, ..., a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n)$

Compleixen $F(x+y) = F(x) + F(y), F(kx) = kF(x)$

$\{x : F(x) = 0\}$ $NucF$ **(nucli) ;** $F(\Re^n) = \text{Im}(F)$ **(imatge o recorregut)**

$NucF$ **i** $\text{Im}(F)$ **són subespais. De la dimensió de *F* se'n diu "nul·litat" i de la dimensió de** $\text{Im}(F)$ **se'n diu "rang".**

Solen escriure's matricialment:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}}_{=y}$$

***A* és la matriu de *F* en base matricial $\{(1,...,0),...,(0,...,1)\}$. Si en $\Re^n$ i/o en $\Re^m$ els vectors es donen com a combinació lineal dels vectors d'altres bases, per a una mateixa funció canviarà la matriu associada. (De vegades es busquen bases que proporcionin matrius especialment senzilles).**

Vectors propis (o autovectors) i valors propis (autovalors) d'una funció lineal. *v* és un vector propi, si essent no nul, $F(v)=kv$. De *k* se'n diu valor propi que s'associa a *v*.
Els valors propis (reals) són les solucions reals (si n'hi ha) de $\det(A-\lambda I)=0$
Si *F* actua entre espais de dimensió *n* i es troben *n* vectors propis linealment independents, llavors si treballem en la base de vectors propis, la matriu de *F* és diagonal, i en ella hi trobem els valors propis.

5.1. Tenint els vectors $x=(0,1,2),\quad y=(3,4,0),\quad z=(0,1,0)$. Es sol·licita

a) $x+y-z$ **b)** $\langle x,2y\rangle$ **c)** $\|2y-2z\|$ **d)** $d(x,y)$

a) (0,1,2)+2(3,4,0)-(0,1,0)=(3,4,2)
b) $\langle(0,1,2),2(3,4,0)\rangle=\langle(0,1,2),(6,8,0)\rangle=8$
c) $\|2y-2z\|=\|2(3,4,0)-2(0,1,0)\|=\|(6,8,0)-(0,2,0)\|=\|(6,6,0)\|=\sqrt{\langle(6,6,0),(6,6,0)\rangle}=$

$$=\sqrt{36+36+0}=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$$

d) $d[(0,1,2),(3,4,0)]=\|(0,1,2)-(3,4,0)\|=\|(-3,-3,2)\|=\sqrt{\langle(-3,-3,2),(-3,-3,2)\rangle}=$

$$=\sqrt{9+9+4}=\sqrt{22}$$

5.2. Considerem els vectors *x*=(1,0,2), *y*=(0,1,0), *z*=(-1,1,-2). Són linealment independents? Constitueixen una base del conjunt $\Re^3$?

$$a(1,0,2)+b(0,1,0)+c(-1,1,-2)=(0,0,0)\overset{?}{\Leftrightarrow} a=b=c=0$$
$$(a,0,2a)+(0,b,0)+(-c,c,-2c)=(0,0,0)\Rightarrow(a-c,b+c,2a-2c)=(0,0,0)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\begin{cases}a-c=0\\ b+c=0\\ 2a-2c=0\end{cases}\begin{cases}a-c=0\\ b+c=0\end{cases}\begin{cases}a=c\\ b=-c\end{cases}\Rightarrow \text{Són linealment dependents.}$$

Els tres vector no constitueixen una base del conjunt $\Re^3$.

5.3. Es té una funció lineal donada, en base natural, per la matriu $\begin{pmatrix}0&-2&1\\2&0&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}$.

a) Si és possible, invertiu la matriu.
b) És (0,0,1) un vector propi de la funció lineal?
c) Quins són els valors propis reals de l'esmentada funció lineal? I els vectors propis associats?

a) $\begin{vmatrix}0&-2&1\\2&0&1\\-1&-1&0\end{vmatrix}=0-2+2-0-0-0=0\Rightarrow\begin{pmatrix}0&-2&1\\2&0&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}$ no es pot invertir.

b) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq k\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (0,01)$ no és un vector propi.

c) $\begin{vmatrix} 0-\lambda & -2 & 1 \\ 2 & 0-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 2 + 2 - \lambda - \lambda - 4\lambda = -\lambda^3 - 6\lambda = -\lambda(\lambda^2 + 6) = 0$

Té un sol valor real propi: $\lambda = 0$

Vectors propis associats al valor propi 0:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y+z \\ 2x+z \\ -x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2y + z = 0 \\ 2x \quad + z = 0 \\ \text{-}x\text{-}y \quad = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 2y \to z = -2x \\ z = -2x \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow (1,-1,-2)$$

Vectors propis: $k(1,-1,-2) \quad \forall k \neq 0$

6. MATRIUS I DETERMINANTS

.<u>Matriu d'ordre *pq*</u> és un conjunt de *p.q* elements disposats en un rectangle de *p* files i *q* columnes.
.<u>Tipus de matrius</u>: Matrius quadrades. Matrius (vectors) fila. Matrius (vectors) columna. Matrius nul·les. Matrius diagonals. Matrius identitats. Matrius triangulars.
.<u>Operacions amb matrius</u>: Per poder *sumar* dues matrius han de tenir el mateix ordre i aleshores es sumen els elements que ocupen la mateixa posició, dins de cada matriu. Per *multiplicar una matriu per un escalar* es multiplica cada element per l'escalar. Per poder *multiplicar dues matrius* el nombre de columnes de la primera ha de ser igual al nombre de files de la segona, i aleshores es multiplica ordenadament un element de fila per un element de columna, se sumen els resultats i el que queda passa a ocupar la posició fila-columna corresponent.
.S'anomena <u>menor complementari</u> d'un qualsevol dels elements a la matriu resultant de suprimir en la matriu original la fila i la columna de l'element en qüestió. Es representa el menor complementari de l'element a_{ij} per M_{ij}.
.<u>Determinant</u> és l'element obtingut en operar d'una determinada forma sobre els elements d'una matriu quadrada; sumar el resultat de multiplicar cada element d'una de les seves línies (files o columnes) pel seu adjunt.
En general es fa el sumatori del producte de cada element d'una línia qualsevol (fila o columna) pel determinant del menor complementari afectat del signe

$$(-1)^{\text{posició fila + posició columna}}$$

com a potència (se'n diu adjunt o cofactor).

.<u>Regla (de Sarrus)</u> per al càlcul dels determinants en uns casos particulars:
- D'ordre dos: (dos per dos)

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\ a_{22} - a_{12}\ a_{21}$$

- D'ordre tres: (tres per tres)

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{32}a_{23}a_{11}$$

.<u>Matriu transposada</u> A^T és aquella que s'obté en canviar files per columnes.
.<u>Matriu inversa</u>: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot (\text{matriu d'adjunts de la matriu transposada})$

6.1. Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$**, calculeu-ne la inversa.**

Calculem el valor del determinant de la matriu: det (A) = 12
La matriu transposada és:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Construïm la matriu d'adjunts de la matriu transposada:

$$\begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ -4 & -1 & 2 \\ -4 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriu inversa és doncs

$$A^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ -4 & -1 & 2 \\ -4 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

Comprovem que efectivament la matriu obtinguda és la inversa de la matriu A:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ -4 & -1 & 2 \\ -4 & -7 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.2. Donades les matrius

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{4} \\ \mathbf{4} & \mathbf{6} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{9} \\ \mathbf{6} & \mathbf{6} \end{pmatrix}$$

trobeu les matrius *X* i *Y* tals que

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{Y}^T &= \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{X}^T+\boldsymbol{Y}\cdot\boldsymbol{C} &= \boldsymbol{D} \end{aligned}\right\}$$

Podem transformar la primera equació en :

$$X = B - A \cdot Y^T$$
$$X^T = (B - A \cdot Y^T)^T = B^T - (A \cdot Y^T)^T$$
$$X^T = B^T - Y \cdot A^T$$

De la segona equació podem trobar també $X^T = D - Y \cdot C$.

Igualant les dues expressions

$$B^T - Y \cdot A^T = D - Y \cdot C$$
$$Y \cdot C - Y \cdot A^T = D - B^T$$
$$Y(C - A^T) = D - B^T$$

Anem a calcular els valors de

$$C-A^T=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$$

$$D-B^T=\begin{pmatrix}-2 & 9\\ 6 & 6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & 4\\ 4 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & 5\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

Com que la matriu C-A^T és invertible,

$$Y=\left(D-B^T\right)\cdot\left(C-A^T\right)^{-1}$$

on

$$\left(C-A^T\right)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

obtenim

$$Y=\begin{pmatrix}-6 & 5\\ 2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+5 & -2\\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\Rightarrow Y=\begin{pmatrix}3 & -2\\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

$$X=B\text{-}A\cdot Y^T=\begin{pmatrix}4 & 4\\ 4 & 6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & \frac{2}{3}\\ -2 & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}1 & \frac{10}{3}\\ 3 & \frac{14}{3}\end{pmatrix}$$

6.3. Un agent de borsa va vendre a un client 200 accions tipus A, 300 tipus B, 500 tipus C i 250 tipus D. Els preus per acció de A, B, C i D són 100, 150, 200 i 300 euros, respectivament. Escriviu un vector fila que representi el nombre d'accions comprades de cada tipus. Escriviu un vector columna que representi el preu per acció de cada tipus. Utilitzant la multiplicació de matrius, trobeu la despesa total de les accions.

El vector fila que representa el nombre d'accions comprades de cada tipus és: $\begin{bmatrix}200 & 300 & 500 & 250\end{bmatrix}$.

El vector columna que representa el preu per acció de cada tipus és: $\begin{bmatrix}100\\ 150\\ 200\\ 300\end{bmatrix}$.

La despesa total de les accions ve donada pel producte d'aquests dos vectors:

$$\begin{bmatrix}200 & 300 & 500 & 250\end{bmatrix}\begin{bmatrix}100\\150\\200\\300\end{bmatrix} = 20.000+45.000+100.000+75.000 = 240.000 \text{ euros.}$$

6.4. Suposem que un contractista ha acceptat comandes per a set cases estil rústic, tres estil modern i cinc estil colonial. Suposem, a més a més, que els factors que s'utilitzen en cada tipus són acer, fusta, vidre, pintura i mà d'obra. Les entrades de la matriu següent, *A*, donen el nombre d'unitats de cada factor que s'utilitzarà en cada tipus de casa:

	Acer	**Fusta**	**Vidre**	**Pintura**	**Mà d'obra**
Rústic	**5**	**20**	**16**	**7**	**17**
Modern	**7**	**18**	**12**	**9**	**21**
Colonial	**6**	**25**	**8**	**5**	**13**

a) Calculeu, fent servir el producte de matrius, la quantitat de cada factor necessari per satisfer totes les seves comandes.

b) Suposem que l'acer costa 1.500 euros per unitat, la fusta 800 euros per unitat, i el vidre, la pintura i la mà d'obra costen 500, 100 i 1.000 euros per unitat, respectivament. Calculeu, mitjançant el producte de matrius, la despesa total.

El contractista també vol tenir en compte la despesa resultant de transportar el factor al lloc de la construcció així com també la despesa de la compra. Suposem que les despeses estan donades per la següent matriu, *B*:

Cost unitari	**Transport**	
1.500	**45**	**Acer**
800	**20**	**Fusta**
500	**30**	**Vidre**
100	**5**	**Pintura**
1.000	**0**	**Mà d'obra**

c) Trobeu una matriu les entrades de la qual donin les despeses de compra i de transport dels materials per a cada tipus de casa.

d) Trobeu una matriu la primera entrada de la qual doni el preu de compra total i la segona entrada de la qual doni la despesa total de transport.

a) Sigui $\begin{bmatrix}7 & 3 & 5\end{bmatrix}$ el vector fila que representa el nombre de cases d'estil rústic, modern i colonial, respectivament. El producte d'aquest vector fila per la matriu *A*, que representa les unitats necessàries de cada factor per a cada tipus de casa, donarà un altre vector fila, els elements del qual indicaran la quantitat de cada matèria primera:

$$\begin{bmatrix}7 & 3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 20 & 16 & 7 & 17\\7 & 18 & 12 & 9 & 21\\6 & 25 & 8 & 5 & 13\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}35+21+30 & 140+54+125 & 112+36+40 & 49+27+25 & 119+63+65\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}86 & 319 & 188 & 101 & 247\end{bmatrix}$$

És a dir, es necessiten les següents quantitats de cada factor: acer: 86 unitats; fusta: 319 unitats; vidre: 188 unitats; pintura: 101 unitats; mà d'obra: 247 unitats.

b) Sabent el preu i la quantitat necessària de cada matèria podem calcular la despesa total mitjançant el producte de matrius:

$$\begin{bmatrix} 86 & 319 & 188 & 101 & 247 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.500 \\ 800 \\ 500 \\ 100 \\ 1.000 \end{bmatrix} = 86 \cdot 1.500 + 319 \cdot 800 + 188 \cdot 500 + 101 \cdot 100 + 247 \cdot 1.000 =$$

$= 735.300$

Per tant, la despesa total és de 735.300 euros.

c) Ara el que ens interessa és conèixer la despesa corresponent a cada tipus de casa. Hem de multiplicar la matriu *A* (fila = tipus de casa) per *B* (la primera columna indica el preu unitari de compra de cada factor primera i la segona el que costa transportar-la):

$$\begin{bmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.500 & 45 \\ 800 & 20 \\ 500 & 30 \\ 100 & 5 \\ 1.000 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 7.500 + 16.000 + 8.000 + 700 + 17.000 & 225 + 400 + 480 + 35 \\ 10.500 + 14.400 + 6.000 + 900 + 21.000 & 315 + 360 + 360 + 45 \\ 9.000 + 20.000 + 4.000 + 500 + 13.000 & 270 + 50 + 240 + 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49.200 & 1.140 \\ 52.800 & 1.080 \\ 46.500 & 1.035 \end{bmatrix}$$

La primera fila de la matriu resultant ens indica que el cost dels factors necessaris per a una casa de tipus rústic és de 49.200 euros i que el cost de transport de les mateixes és de 1.140 euros. La segona fila de la matriu resultant ens indica que el cost dels factors necessaris per a una casa de tipus modern és de 52.800 euros i que el cost de transport de les mateixes és de 1.080 euros. La tercera fila de la matriu resultant ens indica que el cost dels factors necessaris per a una casa de tipus colonial és de 46.500 euros i que el cost de transport de les mateixes és de 1.035 euros.

d) Per saber la despesa total generada per la compra i transport de les matèries primeres necessàries per a les set cases d'estil rústic, les tres d'estil modern i les cinc d'estil colonial, fem el següent producte de matrius:

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 49.200 & 1.140 \\ 52.800 & 1.080 \\ 46.500 & 1.035 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 735.300 & 16.395 \end{bmatrix},$$

que voldrà dir que en total el contractista tindrà un cost de factors per un valor de 735.300 euros, i el transport dels quals tindrà un cost de 16.395 euros.

6.5. Un amic us ha enviat un missatge secret que consisteix en tres matrius fila amb els nombres següents:

$$\boldsymbol{R_1} = \begin{bmatrix} -5 & -9 & 29 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{R_2} = \begin{bmatrix} 7 & 23 & 48 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{R_3} = \begin{bmatrix} 34 & 89 & 64 \end{bmatrix}.$$

Entre els dos havíeu dissenyat la següent matriu (utilitzada per codificar el missatge):

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & \mathbf{2} \end{bmatrix}.$$

Desxifreu el missatge procedint de la següent manera:

a) **Calculeu els tres productes matricials $\boldsymbol{R_1A^{-1}}$, $\boldsymbol{R_2A^{-1}}$ i $\boldsymbol{R_3A^{-1}}$.**

b) **Suposem que les lletres de l'alfabet corresponen als nombres del 1 al 26, substituïu els nombres en aquestes tres matrius per lletres i determineu el missatge.**

a) Primer calculem el determinant de la matriu A:

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix}=1.$$

Fent servir la matriu d'adjunts ja podem calcular la inversa de la matriu A:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 14 & -2 & 9 \\ -6 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ara ja podem anar calculant els productes indicats:

- $$R_1A^{-1}=\begin{bmatrix}-5 & -9 & 29\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 14 & -2 & 9 \\ -6 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13 & 1 & 20\end{bmatrix}.$$
- $$R_2A^{-1}=\begin{bmatrix}7 & 23 & 48\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 14 & -2 & 9 \\ -6 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 9 & 19\end{bmatrix}.$$
- $$R_3A^{-1}=\begin{bmatrix}34 & 89 & 64\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 14 & -2 & 9 \\ -6 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 21 & 14\end{bmatrix}.$$

b) Si posem els tres vectors fila calculats un al costat de l'altre i fem la substitució indicada podrem llegir el missatge enviat:

$$\begin{array}{ccccccccc} 13 & 1 & 20 & 8 & 9 & 19 & 6 & 21 & 14 \\ M & A & T & H & I & S & F & U & N \end{array}$$

El missatge és "MATH IS FUN".

7. GENERALITATS DE FUNCIONS DE DIVERSES VARIABLES

TOPOLOGIA A R^n

<u>Bola oberta</u> de centre $x_0 \in R^n$ i radi r >0 és el conjunt $B(x_0,r)=\{x \in R^n \mid d(x,x_0)<r\}$.

<u>Bola tancada</u> de centre $x_0 \in R^n$ i radi r >0 és el conjunt $\overline{B(x_0,r)}=\{x \in R^n \mid d(x,x_0)\le r\}$.

Considerem un conjunt $A \subset R^n$.

Un punt $x_0 \in A$ és un <u>punt interior</u> del conjunt A si i nomes si existeix un nombre real r >0 tal que $B(x_0,r)\subset A$. El conjunt de tots els punts interiors del conjunt A es nota Int (A) i està inclòs a A.

A és un <u>conjunt obert</u> si i només si per a tot $x_0 \in A$ existeix $B(x_0,r)\subset A$, és a dir, si A=Int (A).

Un punt $x_0 \in A$ és un <u>punt adherent</u> al conjunt A si i només si per a tot nombre real r >0 es verifica que $B(x_0,r)\cap A \neq \phi$. El conjunt de tots els punts adherents al conjunt A es nota $\overline{A}$ i inclou A.

A és un <u>conjunt tancat</u> si i només si el seu complementari, $A^c = R^n - A$, és un conjunt obert. Dit d'una altra manera, A és un conjunt tancat si $A=\overline{A}$.

Un punt $x_0 \in R^n$ és un <u>punt d'acumulació</u> del conjunt A si i només si per a tot nombre real r >0 es verifica que $B(x_0,r)\cap A \neq \phi$ i $B(x_0,r)\cap A \neq \{x_0\}$. Tot punt d'acumulació és punt adherent.

Un punt $x_0 \in A$ és un <u>punt aïllat</u> del conjunt A si i només si existeix un nombre real r >0 tal que $B(x_0,r)\cap A = \{x_0\}$. Un punt aïllat no és d'acumulació ni al revés. En canvi, tot punt aïllat és adherent. De fet el conjunt de punts adherents està format per la unió dels punts d'acumulació amb els punts aïllats.

Un punt $x_0 \in R^n$ és un <u>punt frontera</u> del conjunt A si i només si per a tot nombre real r >0 es verifica que $B(x_0,r)\cap A \neq \phi$ i $B(x_0,r)\cap A^c \neq \phi$.

Un conjunt $A \subset R^n$ és <u>fitat</u> si i només si existeix un nombre real r >0 tal que $A \subset B(0,r)$ (el centre de la bola pot ser escollit arbitràriament).

Un conjunt $A \subset R^n$ és <u>compacte</u> si i només si és tancat i fitat.

Un conjunt $A \subset R^n$ és <u>convex</u> si i només si el segment que uneix dos punts qualssevol del conjunt està contingut dins del conjunt.

Un conjunt $A \subset R^n$ és <u>arc-connex</u> si i només si l'arc que uneix dos punts qualssevol del conjunt està contingut dins del conjunt.

FUNCIONS REALS DE DIVERSES VARIABLES

<u>Funció real de n variables</u>:

$$f : A \subset R^n \longrightarrow B \subset R$$

$$x=(x_1,...x_n) \longrightarrow f(x)= f(x_1,...x_n)=z$$

x_1, ..., x_n són les anomenades variables independents i z és la variable depenent.

<u>Domini de definició de *f*</u>: Camp d'existència de la funció *f*, és a dir, conjunt d'elements de R^n on la funció està definida.
<u>Conjunt imatge de *f*</u>: $\left\{ y \in R \,\middle|\, \exists\, x \in R^n \text{ de forma que } f(x) = y \right\}$
Per a les funcions reals de diverses variables es poden estendre les operacions suma, producte, producte per un escalar, quocient i composició definides per a funcions reals de variable real. Siguin $f, g : A \subset R^n \longrightarrow R$. Definim:
<u>Suma</u>: $(f+g)(x) = f(x) + g(x),\ \forall x \in A$
<u>Producte</u>: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \forall x \in A$
<u>Producte per un escalar</u>: $(\lambda f)(x) = \lambda \cdot (f(x)), \lambda \in R, \forall x \in A$
<u>Quocient</u>: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},\ \forall x \in A$ **amb** $g(x) \neq 0$
<u>Composició</u>: Siguin $g : A \subset R^n \longrightarrow R$ i $f : B \subset R \longrightarrow R$ amb $g(A) \subset B$, aleshores $(f \circ g)(x) = f(g(x)), \forall x \in A$ **de forma que** $f \circ g : A \subset R^n \longrightarrow R.$
Donada en general una funció $f = f(x,y) = z$, funció real de dues variables reals, el conjunt de corbes en el pla *xy* per les quals *f(x,y) = C* = constant, s'anomenen <u>corbes de nivell</u> de *f* i s'identifiquen pel valor donat a la variable resposta *z (*per exemple *C)*.

FUNCIONS VECTORIALS DE DIVERSES VARIABLES
Direm que l'aplicació $f : A \to B$, és una <u>funció vectorial de *n* variables i *m* components</u> si i només si *A* és un subconjunt de R^n i *B* és subconjunt de R^m.

$$f : A \subset R^n \longrightarrow B \subset R^m$$
$$x = (x_1, \ldots x_n) \longrightarrow f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$$

de forma que $f(x) = (f_1(x_1, \ldots x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots x_n))$
A les funcions *f* on *i*=1,...,*m*, les anomenem <u>funcions components</u>. L'estudi i la utilització d'una funció vectorial queden reduïts en molts casos al de les seves components.

7.1. **Demostreu si els següents conjunts són o no conjunts oberts, tancats, fitats, compactes, convexos o arc-connexos:**

a) $A = \{(x,y) \in R^2 \mid x, y \in [0,1]\}$
b) $B = \{(x,y) \in R^2 \mid x + y \leq 1\}$
c) $C = \{(x,y) \in R^2 \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 4\}$
d) $D = \{(x,y) \in R^2 \mid x, y \in [0,1]\} \cup \{(3,3)\}$
e) $E = \{(x,y) \in R^2 \mid 4 \leq x^2 + y^2 < 9\}$

a) $A = \{(x,y) \in R^2 \mid x, y \in [0,1]\}$
Aquest conjunt és el quadrat de costat 1 sobre els semieixos positius.
- No és obert, ja que qualsevol bola centrada en un punt de la frontera (que pertany a A) no estarà mai continguda dins el quadrat. Per exemple, el punt (0,1/2) o el punt (1,1) són punts no interiors. Dit d'una altra forma, sempre que el conjunt tingui punts frontera, aquests no són punts interiors i, per tant, el conjunt no pot ser obert.
- És tancat, donat que el seu complementari és obert.
- És fitat. Per exemple, $A \subset B_2(0,0)$, és a dir, A està contingut en la bola de centre l'origen i radi 2.

- És compacte ja que és tancat i fitat.
- És convex: donats dos punts qualssevol del conjunt, el segment que els uneix està contingut en A. Vegem-ne la demostració analítica:

Siguin (x_1, y_1) i (x_2, y_2) punts que pertanyen al conjunt A. És a dir, les coordenades x_1, y_1 i x_2, y_2 pertanyen a l'interval $[0,1]$.
Considerem el segment que uneix aquests dos punts:

$$\text{segm}((x_1, y_1),(x_2, y_2)) = \{(z_1, z_2) \in R^2 \mid (z_1, z_2) = (1-t)(x_1, y_1) + t(x_2, y_2) \text{ amb } t \in [0,1]\} =$$

$$= \{(z_1, z_2) \in R^2 \mid z_1 = (1-t)\cdot x_1 + t\cdot x_2,\ z_2 = (1-t)\cdot y_1 + t\cdot y_2 \text{ amb } t \in [0,1]\}.$$

Hem de comprovar si els punts $(z_1, z_2) = (1-t)(x_1, y_1) + t(x_2, y_2)$ amb $t \in [0,1]$ pertanyen al conjunt A. Dit d'una altra manera, si $z_1 = (1-t)\cdot x_1 + t\cdot x_2$ i $z_2 = (1-t)\cdot y_1 + t\cdot y_2$ pertanyen a l'interval $[0,1]$.
Provem-ho primer per $z_1 = (1-t)\cdot x_1 + t\cdot x_2$. Podem suposar, sense perdre generalitat, que $x_1 \le x_2$. D'una banda:

$$z_1 = (1-t)\cdot x_1 + t\cdot x_2 = x_1 - t\cdot x_1 + t\cdot x_2 = x_1 + t(x_2 - x_1) \overset{(1)}{\ge} x_1.$$

(1) Donat que $x_1 \le x_2$, aleshores $x_2 - x_1 \ge 0$ i, com que $t \in [0,1]$, $t(x_2 - x_1) \ge 0$.

D'altra banda:

$$z_1 = (1-t)\cdot x_1 + t\cdot x_2 \overset{(2)}{\le} (1-t)\cdot x_2 + t\cdot x_2 = x_2 - t\cdot x_2 + t\cdot x_2 = x_2.$$

(2) Ja que $x_1 \le x_2$.

Per tant, $x_1 \le z_1 \le x_2$.
Finalment, $0 \le x_1 \le z_1 \le x_2 \le 1$.
Procedint de manera anàloga amb $z_2 = (1-t)\cdot y_1 + t\cdot y_2$, podem concloure que $z_1, z_2 \in [0,1]$.
Així doncs, els punts del segment que uneix (x_1, y_1) i (x_2, y_2) pertanyen al conjunt A, que era el que volíem demostrar.
Com el conjunt A és convex, també serà arc-connex.

b) $\mathbf{B} = \{(x, y) \in R^2 \mid x + y \le 1\}$

Aquest conjunt és el dels punts del pla que queden per sota la recta $x + y = 1$, és a dir, és un semiplà.

- No és obert, doncs qualsevol bola centrada en un punt de la frontera, que és el conjunt de punts de la recta $x + y = 1$ (que pertany a B), no estarà mai continguda dins el conjunt.
- És tancat. Tots els punts del seu complementari són interiors.
- No és fitat. No hi ha cap bola de radi finit que el contingui.
- En no ser fitat, no és compacte.
- És convex: donats dos punts qualssevol del conjunt, el segment que els uneix està contingut en B. Per tant, també serà arc-connex.

c) $\mathbf{C} = \{(x, y) \in R^2 \mid 0 < x^2 + y^2 \le 4\}$

Aquest conjunt és el cercle de centre (0,0) i radi 2, incloent la circumferència però excloent l'origen.

- No és obert, ja que qualsevol bola centrada en un punt de la frontera, un punt de la circumferència (que pertany a C) no estarà mai continguda dins el conjunt.
- No és tancat perquè el complementari del conjunt és la unió de l'origen, (el punt (0,0)), i l'exterior del cercle. I l'origen no és punt interior del complementari de C.

- És fitat. Per exemple, $C \subset B_3(0,0)$, el conjunt C està contingut en la bola de centre l'origen i radi 3.
- En no ser tancat, no pot ser compacte.
- No és convex. Considerem dos punts de C. Per exemple, els punts $(-1,0)$ i (1,0) (o també els punts (1,1) i (-1,-1)). El segment que els uneix, com que passa per l'origen, no està contingut en el conjunt.
- És arc-connex. Per exemple si considerem el cas anterior, els punts (-1,0) i (1,0) els podem unir mitjançant un arc o una línia poligonal que eviti l'origen. L'únic punt conflictiu és l'origen però sempre es podrà evitar.

d) $\mathbf{D} = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x,y \in [0,1]\} \cup \{(3,3)\}$

Aquest conjunt és la unió del quadrat estudiat en el primer apartat amb el punt (3,3).
- No és obert. Per exemple, el punt (3,3) no és interior, és un punt aïllat.
- És tancat, ja que és la unió de dos tancats: Un punt és un conjunt tancat. Ja s'ha vist que el quadrat $[0,1]\mathrm{x}[0,1]$s'ha vist que és un conjunt tancat.
- És fitat. Per exemple, $D \subset B_4(0,0)$, el conjunt D està contingut en la bola de centre l'origen i radi 4.
- És compacte ja que és fitat i tancat.
- No és ni convex ni arc-connex, doncs el punt (3,3) és un punt aïllat. Els segments i els arcs que l'uneixen a la resta de punts de D no estan continguts mai en el conjunt.

e) $\mathbf{E} = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid 4 \le x^2 + y^2 < 9\}$

E és la corona de centre l'origen, radi interior 2 i radi exterior 3, incloent la circumferència interior però no l'exterior.
- No és obert. Els punts de la circumferència interior no són interiors.
- No és tancat. El complementari conté la circumferència exterior, els punts de la qual no són interiors.
- És fitat. Per exemple, $E \subset B_4(0,0)$, el conjunt E està contingut en la bola de centre l'origen i radi 4.
- No és compacte doncs no és tancat.
- No és convex. Per exemple, el segment que uneix els punts (0,2) i (0,-2) no està tot contingut dins E.
- Però sí és arc-connex. Tots els punts del conjunt es poden unir mitjançant arcs que evitin el cercle interior.

7.2. Trobeu el domini de definició de les funcions següents:

a) $f(x,y) = \left(\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}}, \dfrac{x}{\sqrt{1-y^2}}\right)$

b) $f(x,y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$

c) $f(x,y) = \left(\dfrac{x}{y}, \sqrt{\dfrac{y}{x}}\right)$

a) $f(x,y) = \left(\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}}, \dfrac{x}{\sqrt{1-y^2}}\right)$

Aquesta funció està definida sempre que els denominadors no s'anul·lin i l'expressió sota els radicals no sigui negativa. Així doncs, busquem els punts (x, y) tals que $1-x^2 > 0$ i $1 - y^2 > 0$.

D'una banda tenim que:

$$1-x^2 > 0 \Rightarrow 1 > x^2 \Rightarrow 1 > |x| \Rightarrow -1 < x < 1.$$

D'una altra:

$$1-y^2 > 0 \Rightarrow 1 > y^2 \Rightarrow 1 > |y| \Rightarrow -1 < y < 1.$$

Així, el domini d'aquesta funció és el quadrat amb vèrtexs (-1,-1), (-1,1), (1,-1) i (1,1), excloent la frontera. És a dir:

$\text{Dom}(f) = \{(x, y) \in R^2 \mid -1 < x < 1, -1 < y < 1\}$.

El domini, doncs, és un conjunt obert, fitat, no compacte, convex i, per tant, arc-connex.

b) $\boldsymbol{f(x, y) = \ln(1-x^2-y^2)}$

Aquesta funció està definida en els punts (x, y) tals que $1-x^2-y^2 > 0$. És a dir, en els punts (x, y) tals que $1 > x^2 + y^2$, que representa el cercle de centre (0,0) i radi 1, excloent la circumferència:

$$\text{Dom}(f) = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}.$$

El domini és, per tant, un conjunt obert, fitat, no compacte, convex i arc-connex.

c) $\boldsymbol{f(x, y) = \left(\frac{x}{y}, \sqrt{\frac{y}{x}}\right)}$

Aquesta funció està definida en els punts $(x, y) \in R^2$ tals que:

- $x \neq 0, y \neq 0$,
- $\frac{y}{x} > 0$.

De la segona condició deduïm que *x* i *y* han de ser les dues positives o les dues negatives. Així doncs:

$\text{Dom}(f) = \{(x, y) \in R^2 \mid x \neq 0, y \neq 0, \text{signe}(x) = \text{signe}(y)\}$, (1er i 3er quadrants, sense incloure els eixos).

El domini d'aquesta funció és un conjunt obert, no fitat i, per tant, no compacte. No és ni convex ni arc-connex.

7.3. El volum d'un paral·lelepípede recte que té per costats *x, y* i *z* és una funció real de tres variables $V = V(x, y, z) = xyz$. El domini de la funció volum i el de la funció analítica corresponent, coincideixen? Per què?

Els dominis d'aquestes dues funcions no coincideixen. El de la funció volum és:

$$\text{Dom}(V) = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x > 0, y > 0, z > 0\},$$

donat que *x*, *y* i *z* representen longituds. En canvi, el domini de la funció analítica corresponent és R^3, ja que no hi ha cap restricció en definir el producte de les tres variables.

7.4. Trobeu les antiimatges de 2 per la funció $f(x,y)=\dfrac{x+2}{\sqrt{4-y^2}}$**. És** f **una funció injectiva?**

Busquem els punts (*x*,*y*) del pla que verifiquen $f(x,y)=2$.

$$\frac{x+2}{\sqrt{4-y^2}}=2 \Leftrightarrow x+2=2\sqrt{4-y^2} \Leftrightarrow (x+2)^2=4(4-y^2) \Leftrightarrow (x+2)^2=16-4y^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+2)^2+4y^2=16.$$

Dividim per 16 els dos membres de la darrera expressió i obtenim:

$$\frac{(x+2)^2}{16}+\frac{4y^2}{16}=\frac{16}{16},$$
$$\frac{(x+2)^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1,$$

que és l'equació canònica de l'el·lipse centrada en (-2,0), amb semieix major 4 i semieix menor 2.

Hem de tenir en compte que només considerem la branca positiva de l'arrel. Aleshores:

$x+2=2\sqrt{4-y^2} \Rightarrow x=2\sqrt{4-y^2}-2,$

i, com que *f* només està definida quan la *y* està entre –2 i 2, resulta que:

$$-2<y<2 \Rightarrow 0<\sqrt{4-y^2}<2 \Rightarrow 0<2\sqrt{4-y^2}<4 \Rightarrow -2<\underbrace{2\sqrt{4-y^2}-2}_{x}<2 \Rightarrow -2<x<2.$$

Per tant, tots els punts (x,y) de l'el·lipse $\dfrac{(x+2)^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$ que verifiquen $-2<x<2$ i $-2<y<2$ són antiimatges de 2. Podem afirmar que la funció *f* no és injectiva.

De forma més immediata tenim per exemple que:

$$x=2\sqrt{4-y^2}-2$$

Si fem, $\left.\begin{matrix} y=1 \\ y=-1\end{matrix}\right\} \to x=2\sqrt{3}-2 \to \left\{\begin{matrix} f\left(2\sqrt{3}-2,1\right)=2 \\ f\left(2\sqrt{3}-2,-1\right)=2\end{matrix}\right\} \to f$ no injectiva

7.5. Trobeu el domini de definició i el conjunt imatge de les següents funcions:

7.5.1. $f(x,y,z)=\left(\dfrac{x+y}{2},\dfrac{1}{e^z}\right)$

7.5.2. $f(x)=\left(\ln x,\sqrt[3]{x}\right)$

7.5.3. $f(x,y)=\left(\ln(x+y),\sqrt[3]{xy}\right)$

7.5.4. $f(x,y,z)=\left(\ln(x+y+z),\sqrt[3]{xyz}\right)$

a) $\boldsymbol{f(x,y,z)=\left(\frac{x+y}{2},\frac{1}{e^z}\right)}$

La primera funció component $\frac{x+y}{2}$ no presenta cap tipus de problema de definició, ja que és polinòmica (lineal en *x* i en *y*).

El denominador de la segona funció component $\frac{1}{e^z}$ no s'anul·la mai, ja que la funció exponencial és estrictament positiva, de forma que tampoc no presenta cap problema de definició.

Per tant, el domini de definició de *f* és:

$$\mathrm{Dom}(f)=R^3.$$

El conjunt imatge d'aquesta funció és:

$$\mathrm{Im}(f)=\{(u,v)\in R^2 \mid v>0\},$$

doncs la primera funció component, $\frac{x+y}{2}=u$, permet obtenir $y=2u-x$ de forma que, fixat un valor qualsevol per a *u*, si prenem un valor qualsevol de *x*, obtenim la *y* corresponent. Per exemple, el punt (0,2*u*) és una de les possibles antiimatges. La segona funció component, $v=\frac{1}{e^z}$, és estrictament positiva.

Im(*f*) és un conjunt obert, no fitat, no compacte, convex i arc-connex.

b) $\boldsymbol{f(x)=\left(\ln x,\sqrt[3]{x}\right)}$

El domini de definició de la primera funció component, $\ln x$, és l'interval $(0,+\infty)$. L'arrel cúbica, la segona funció component, està definida a tota la recta dels reals. Per tant:

$$\mathrm{Dom}(f)=(0,+\infty).$$

Per trobar la imatge de f hem de veure si, donat un punt $(u,v)\in R^2$ qualsevol, existeix $x\in R$ tal que $f(x)=(u,v)$. Aquest problema es redueix a resoldre el sistema no lineal:

$$\begin{cases} u=\ln x, \\ v=\sqrt[3]{x}, \end{cases}$$

que equival al sistema:

$$\begin{cases} e^u=x, \\ v^3=x. \end{cases}$$

Aquest sistema tindrà solució si i només si $e^u=v^3$. Així doncs, donat un punt qualsevol $(u,v)\in R^2$ no sempre podem trobar $x\in R$ tal que $f(x)=(u,v)$.

$$\mathrm{Im}(f)=\{(u,v)\in R^2 \mid e^u=v^3\}.$$

c) $\boldsymbol{f(x,y)=\left(\ln(x+y),\sqrt[3]{xy}\right)}$

El domini de la primera funció component $\ln(x+y)$ és el conjunt $\{(x,y)\in R^2 \mid x+y>0\}$. La segona funció component $\sqrt[3]{xy}$ no presenta cap problema de definició, ja que és una arrel cúbica. Per tant, el domini de definició de la funció *f* és el conjunt:

$\mathrm{Dom}(f)=\{(x,y)\in R^2 \mid x+y>0\}=\{(x,y)\in R^2 \mid y>-x\}$, conjunt obert, no fitat, no compacte, convex i arc-connex.

Per trobar el conjunt imatge de f, és a dir el conjunt de punts $(u,v) \in R^2$ per als quals existeix al menys un punt $(x,y) \in R^2$ tal que $f(x,y) = (u,v)$, hem de resoldre el següent sistema no lineal:

$$\begin{cases} u = \ln(x+y), \\ v = \sqrt[3]{xy}, \end{cases}$$

que és equivalent al sistema:

$$\begin{cases} e^u = x+y, \\ v^3 = xy. \end{cases}$$

Aleshores $x = \dfrac{v^3}{y}$, suposant que $y \neq 0$, (de fet, x i y no es poden anul·lar simultàniament; és indiferent considerar $x \neq 0$ o $y \neq 0$) i substituïm en l'altra equació:

$$e^u = x + y = \frac{v^3}{y} + y,$$

$$e^u - \frac{v^3}{y} - y = 0,$$

$$ye^u - v^3 - y^2 = 0,$$

$$y^2 - ye^u + v^3 = 0,$$

$$y = \frac{e^u \pm \sqrt{e^{2u} - 4v^3}}{2}.$$

Existeix una solució y de l'equació si i només si $e^{2u} - 4v^3 \geq 0$, és a dir, si i només si $e^{2u} \geq 4v^3$. Per tant:

$$\mathrm{Im}(f) = \{(u,v) \in R^2 \mid e^{2u} \geq 4v^3\}.$$

d) $\boldsymbol{f(x,y,z) = \left(\ln(x+y+z), \sqrt[3]{xyz}\right)}$

El domini de definició de la primera funció component $\ln(x+y+z)$ és $\{(x,y,z) \in R^3 \mid x+y+z > 0\}$. La segona funció component $\sqrt[3]{xyz}$ està definida a tot R^3, donat que l'arrel és cúbica i, per tant, una arrel d'índex senar.

De tot això podem deduir que:

$\mathrm{Dom}(f) = \{(x,y,z) \in R^3 \mid x+y+z > 0\}$.

Dom(*f*) és un conjunt obert, no fitat, no compacte, convex i arc-connex.

El conjunt imatge d'aquesta funció és:

$\mathrm{Im}(f) = \left\{(u,v) \in R^2 \middle| \exists\,(x,y,z) \in R^3 \text{ tal que } u = \ln(x+y+z), v = \sqrt[3]{xyz}\right\}.$

Per tant, resolen el sistema no lineal:

$$\begin{cases} u = \ln(x+y+z), \\ v = \sqrt[3]{xyz}, \end{cases}$$

que és equivalent al sistema:

$$\begin{cases} e^u = x+y+z, \\ v^3 = xyz. \end{cases}$$

Aleshores $x = \frac{v^3}{yz}$, considerant que $y \neq 0$ i $z \neq 0$, (x, y i z no es poden anul·lar simultàniament), i substituïm en l'altra equació:

$$e^u = x + y + z = \frac{v^3}{yz} + y + z,$$

$$e^u - \frac{v^3}{yz} - y - z = 0.$$

Multiplicant aquesta equació per y:

$$ye^u - \frac{v^3}{z} - y^2 - yz = 0,$$

$$y^2 + (z - e^u)y + \frac{v^3}{z} = 0,$$

$$y = \frac{-(z - e^u) \pm \sqrt{(z - e^u)^2 - 4v^3 / z}}{2}.$$

Anomenem $\Delta = (z - e^u)^2 - 4v^3 / z$.

Existeix una solució y de l'equació si i només si $\Delta \geq 0$, és a dir, si i només si $(z - e^u)^2 \geq 4v^3 / z$. Podem sempre escollir un valor de z adient de manera que es verifiqui $(z - e^u)^2 \geq 4v^3 / z$, ja que fixat u i v, si z és un valor "molt gran", $(z - e^u)^2$ serà "molt gran" i $4v^3 / z$ serà "molt petit". D'aquesta forma es pot complir la desigualtat. Comprovem aquest tipus de relació amb el següent exemple numèric: podem agafar $u = 1$ i $v = 2$, i aleshores triar un valor de z igual a 1: $(1-e^1)^2 = 2{,}95$ mentre que $4 \cdot 2^3/1 = 32$, no es verifica que 2,95 sigui més gran o igual que 32. Però si prenem un valor de z major, per exemple $z = 10$, obtenim $(10 - e^1)^2 = 53$, mentre que $4 \cdot 2^3/10 = 3{,}2$, i en aquest cas sí que es verifica que 53 és més gran que 3,2.

Per tant, donat $(u, v) \in R^2$ podem trobar un punt $(x, y, z) \in R^3$ tal que $f(x, y, z) = (u, v)$, essent:

$$x = \frac{v^3}{yz},$$

$$y = \frac{-(z - e^u) \pm \sqrt{(z - e^u)^2 - 4v^3 / z}}{2}, \text{ per a un } z \text{ adient.}$$

Podem concloure que $\mathrm{Im}(f) = R^2$.

<u>*Comentari*</u>: Si comparem els enunciats dels tres exercicis anteriors,

b) $f(x) = \left(\ln x, \sqrt[3]{x}\right)$

c) $f(x, y) = \left(\ln(x + y), \sqrt[3]{xy}\right)$

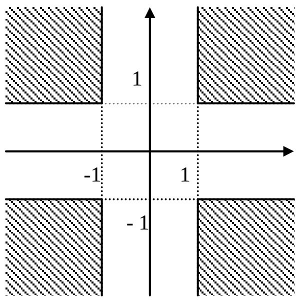
d) $f(x, y, z) = \left(\ln(x + y + z), \sqrt[3]{xyz}\right)$

observem que utilitzem els mateixos tipus de funcions elementals per generar aquestes funcions components, el logaritme neperià i l'arrel cúbica, però que el nombre de variables involucrades canvia des d'una fins a tres. Els resultats obtinguts en cada cas són diferents, la qual cosa ens mostra que tenir més d'una variable implicada en la funció pot fer canviar de forma molt important el comportament d'aquesta.

7.6. Donada la funció de diverses variables $f(x,y)=\left(y\sqrt{x^2-1},x\sqrt{y^2-1}\right)$ **:**

a) **Determineu el domini de definició de *f*.**
b) **Caracteritzeu el tipus de conjunt que correspon al domini de definició de la funció: obert?, tancat?, compacte?, convex? arc-connex?**
c) **Els punts (1/2,0), (-1,1), (-2,-4), (3,5), (0,1), (1/2,1/2) són del domini de *f*? Són punts interiors del domini?**
d) **Els punts (0,0), (0,1), (1,1) són del conjunt imatge de *f*? En cas afirmatiu, quines són les seves antiimatges?**
e) **Podem afirmar que per tot punt (*u*, *v*) del conjunt imatge de *f* existeix un únic (*x*, *y*) del domini de *f* de manera que** $f(x,y)=(u,v)$**?**

a) La funció *f* està definida en els punts $(x,y)\in R^2$ tals que les expressions sota les arrels (quadrades) siguin positives. D'una banda, doncs:
$x^2-1\geq 0\Rightarrow x^2\geq 1\Rightarrow |x|\geq 1\Rightarrow x\geq 1, x\leq -1$.
D'altra banda:
$y^2-1\geq 0\Rightarrow y^2\geq 1\Rightarrow |y|\geq 1\Rightarrow y\geq 1, y\leq -1$.
Per tant,
$\mathrm{Dom}(f)=\{(x,y)\in R^2 \mid x^2-1\geq 0, y^2-1\geq 0\}=\{(x,y)\in R^2 \mid x\geq 1 \text{ o } x\leq -1, \text{ i } y\geq 1 \text{ o } y\leq -1\}$.



b) Caracteritzem el conjunt:
- Dom(*f*) és un conjunt tancat, doncs el seu complementari és obert.
- Dom(*f*) no és obert, ja que el punt $(1,1)\in\mathrm{Dom}(f)$ però no és interior, és frontera.
- Dom(*f*) no és un conjunt fitat i, per tant, no és compacte.
- Dom(*f*) és un conjunt no convex i no arc-connex (per exemple, els punts (2,2) i (-2,2) no es poden unir sense sortir del conjunt).

c) Considerem els diferents punts indicats:
- $(1/2,0)\notin\mathrm{Dom}(f)$ (és a dir, $f(1/2,0)$ no existeix).
- $(-1,1)\in\mathrm{Dom}(f)$ però no és punt interior de Dom(*f*).
- $(-2,-4)\in\mathrm{Dom}(f)$ i és un punt interior de Dom(*f*).
- $(3,5)\in\mathrm{Dom}(f)$ i és un punt interior de Dom(*f*).
- $(0,1)\notin\mathrm{Dom}(f)$ (observem que $f(0,1)$ no té sentit).
- $(1/2,1/2)\notin\mathrm{Dom}(f)$ (és a dir, $f(1/2,1/2)$ no existeix).

d) Considerem un a un els diferents punts a estudiar.
Punt (0,0)

Busquem els punts (x,y) (si existeixen) tals que $f(x,y)=(0,0)$:

$$f(x,y)=\left(y\sqrt{x^2-1},x\sqrt{y^2-1}\right)=(0,0).$$

Igualant coordenada a coordenada:

$$y\sqrt{x^2-1}=0,$$
$$x\sqrt{y^2-1}=0.$$

Les solucions $x=0$ i $y=0$ queden descartades doncs no pertanyen al domini de *f*.

Considerant, doncs, $y\neq 0$, la primera equació té com a solució:

$$\sqrt{x^2-1}=0,$$
$$x^2=1,$$
$$x=\pm 1.$$

Considerant $x\neq 0$, la segona equació té com a solució:

$$\sqrt{y^2-1}=0,$$
$$y^2=1,$$
$$y=\pm 1.$$

Combinant $x=\pm 1$ i $y=\pm 1$ obtindrem els quatre punts (x,y) solució de les dues equacions.

Per tant, el punt (0,0) pertany al conjunt imatge de *f* i les seves antiimatges són:

(1,1), (-1,1), (1,-1) i (-1,-1).

Punt (0,1)

Busquem els punts (x,y) (si existeixen) tals que $f(x,y)=(0,1)$:

$$f(x,y)=\left(y\sqrt{x^2-1},x\sqrt{y^2-1}\right)=(0,1).$$

Igualant coordenada a coordenada:

$$y\sqrt{x^2-1}=0,$$
$$x\sqrt{y^2-1}=1.$$

Com en el cas anterior, les solucions de la primera equació són $x=\pm 1$.

Si $x=+1$, aleshores:

$$\sqrt{y^2-1}=1,$$
$$y^2-1=1,$$
$$y^2=2,$$
$$y=\pm\sqrt{2}.$$

Si $x=-1$, aleshores:

$$\sqrt{y^2-1}=-1,$$

la qual cosa no té sentit, doncs estem considerant la branca positiva de l'arrel quadrada.

Així doncs, el punt (0,1) és del conjunt imatge de f i les seves antiimatges són $\left(1,\sqrt{2}\right)$ i $\left(1,-\sqrt{2}\right)$.

Punt (1,1)

Finalment, hem de trobar (si existeixen) les antiimatges del punt (1,1):

$$f(x,y)=\left(y\sqrt{x^2-1},x\sqrt{y^2-1}\right)=(1,1).$$

Hem de resoldre, doncs, el sistema:

$$\begin{cases} y\sqrt{x^2-1}=1, \\ x\sqrt{y^2-1}=1. \end{cases} \quad (*)$$

Si aixequem al quadrat les dues equacions:

$$\begin{cases} y^2\left(x^2-1\right)=1, \\ x^2\left(y^2-1\right)=1, \end{cases} \quad (**)$$

obtenim el sistema:

$$\begin{cases} y^2x^2-y^2=1, \\ x^2y^2-x^2=1. \end{cases}$$

Si a la primera equació li restem la segona, obtenim:

$$x^2=y^2.$$

Si substituïm en qualsevol equació del sistema (**):

$$x^2\left(x^2-1\right)=1,$$

$$x^4-x^2=1,$$

$$x^4-x^2-1=0.$$

L'equació resultant és una biquadrada. Fent el canvi $t=x^2$, l'equació es transforma en: $$t^2-t-1=0.$$

Busquem les solucions d'aquesta nova equació:

$$t=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Com que $t=x^2>0$, només considerem la solució $t=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, que és la solució positiva. Desfent el canvi, $x=\pm\sqrt{t}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$ i com que $y^2=x^2\Rightarrow y=\pm x$. Però no oblidem que hem de considerar les que són solució del sistema (*). Així que *x*, *y* han de ser positives:

$$x=+\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \text{ i } y=+x=+\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}.$$

Per tant, el punt (1,1) és del conjunt imatge de *f* i l'antiimatge trobada és $\left(+\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}},+\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)$.

e) No podem afirmar que per a tot punt (*u*,*v*) del conjunt imatge de *f* existeixi una única antiimatge, és a dir, *f* no és una funció injectiva. Ja hem comprovat que, per exemple, els punts (0,0) i (0,1) tenen diverses antiimatges.

7.7. Trobeu les corbes de nivell de les funcions:

a) $f(x,y)=x^2+y^2$

b) $g(x,y)=x+y+1$

c) $h(x,y)=xy$

d) $z=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}$

a) $\boldsymbol{f(x,y) = x^2 + y^2}$

Les corbes de nivell de la funció *f* són el conjunt de punts $(x,y) \in R^2$ tals que:

$$f(x,y) = k,$$
$$x^2 + y^2 = k,$$

on *k* és una constant.

Així doncs, les corbes de nivell de la funció *f* són circumferències centrades en l'origen i radi $\sqrt{k}$ (només existeixen per valors $k \geq 0$; de fet, el cas $k = 0$ dóna el punt (0,0)).

b) $\boldsymbol{g(x,y) = x + y + 1}$

Tal com hem fet en l'apartat anterior:

$$g(x,y) = k,$$
$$x + y + 1 = k,$$
$$y = -x + k - 1.$$

En aquest cas, les corbes de nivell són rectes paral·leles de pendent –1 amb intercepció en l'eix d'ordenades igual a *k* -1. La seva equació és $y = -x + k - 1, \forall k$.

c) $\boldsymbol{h(x,y) = xy}$

De manera anàloga:

$$h(x,y) = k,$$
$$xy = k.$$

Quan $k \neq 0$, l'equació $xy = k$ representa hipèrboles, que també es poden identificar com $y = \frac{k}{x}$. Quan $k = 0$, la corba de nivell està formada pels dos eixos de coordenades ($x = 0$ i $y = 0$).

d) $\boldsymbol{z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}}$

Procedint de forma similar als apartats anteriors:

$$z = k,$$
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = k,$$
$$\frac{x^2}{4k} + \frac{y^2}{9k} = 1,$$
$$\frac{x^2}{(2\sqrt{k})^2} + \frac{y^2}{(3\sqrt{k})^2} = 1.$$

En aquest cas les corbes de nivell són el·lipses centrades en l'origen, amb semieixos $2\sqrt{k}$ i $3\sqrt{k}$ amb $k \geq 0$. Per a *k* = 0 tenim un punt (0,0) i per a valors de *k* estrictament negatius no existeixen corbes de nivell (la suma de quadrats mai pot ser menor estricta que 0).

7.8. Classifiqueu les següents còniques:

a) $\boldsymbol{x^2 - 4x - 4y + 5 = 0}$

b) $\boldsymbol{4x^2 - 2y^2 + 4x - 4y - 1 = 0}$

c) $\boldsymbol{-x^2 - 3y^2 - 4x + 4y = 0}$

Recordem que l'equació general d'una cònica ve donada per l'expressió:
$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.
A partir dels coeficients A i C podem determinar de quin tipus de cònica es tracta:

- Si $A = C$ tenim una circumferència.
- Si $A \cdot C = 0$ (i A i C no s'anul·len simultàniament) tenim una paràbola.
- Si $A \cdot C > 0$ tenim una el·lipse.
- Si $A \cdot C < 0$ tenim una hipèrbola.

a) És una paràbola, doncs $A \cdot C = 1 \cdot 0 = 0$.
b) És una hipèrbola, ja que $A \cdot C = 4 \cdot (-2) < 0$.
c) És una el·lipse, donat que $A \cdot C = (-1) \cdot (-3) > 0$.

7.9. Classifiqueu les superfícies donades per les equacions:

a) $\mathbf{3x^2 - 4y^2 + 12z^2 + 12 = 0}$

b) $\mathbf{x^2 + 2y^2 + z^2 + 4x - 4y + 2 = 0}$

c) $\mathbf{2x - y^2 - 4z^2 = 0}$

Indicació: Les diferents superfícies quàdriques tenen per equacions:

El·lipsoide: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Hiperboloide d'una fulla: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

Hiperboloide de dues fulles: $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Con el·líptic: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

Paraboloide el·líptic: $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

Paraboloide hiperbòlic: $z = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

a) $\mathbf{3x^2 - 4y^2 + 12z^2 + 12 = 0}$

Busquem primer la seva forma canònica:

$$3x^2 - 4y^2 + 12z^2 = -12,$$

$$4y^2 - 3x^2 - 12z^2 = 12.$$

Dividim per 12 els dos costats de la igualtat:

$$\frac{4y^2}{12} - \frac{3x^2}{12} - \frac{12z^2}{12} = \frac{12}{12},$$

$$\frac{y^2}{3} - \frac{x^2}{4} - z^2 = 1,$$

$$\frac{y^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2} - \frac{x^2}{2^2} - \frac{z^2}{1^2} = 1$$

És l'equació canònica d'un hiperboloide de dues fulles (d'eix y).

b) $\mathbf{x^2 + 2y^2 + z^2 + 4x - 4y + 2 = 0}$

Completant els quadrats aconseguirem l'equació canònica d'aquesta quàdrica.

$$x^2+4x+2(y^2-2y)+z^2=-2,$$
$$\underbrace{x^2+4x+4}_{(1)}-4+2(\underbrace{y^2-2y+1}_{(2)}-1)+z^2=-2,$$
$$(x+2)^2-4+2(y-1)^2-2+z^2=-2,$$
$$(x+2)^2+2(y-1)^2+z^2=-2+4+2=4.$$

(1) Com que : $x^2+4x=x^2+2\cdot 2\cdot x$ podem pensar en un quadrat amb primer terme x i segon terme 2. Per completar-lo falta el quadrat del segon terme, és a dir, 4. Per tant, sumem i restem el que necessitem.

(2) Com que : $y^2-2y=y^2-2\cdot 1\cdot y$ podem pensar en un quadrat amb primer terme y i segon terme 1. Per completar-lo falta el quadrat del segon terme, és a dir, 1. Per tant, sumem i restem el que necessitem.

Dividim per 4 els dos membres d'aquesta darrera expressió:

$$\frac{(x+2)^2}{4}+\frac{2(y-1)^2}{4}+\frac{z^2}{4}=\frac{4}{4},$$
$$\frac{(x+2)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{2}+\frac{z^2}{4}=1,$$
$$\frac{(x+2)^2}{2^2}+\frac{(y-1)^2}{(\sqrt{2})^2}+\frac{z^2}{2^2}=1$$

És l'equació canònica d'un el·lipsoide centrat en (-2,1,0).

c) $\boldsymbol{2x-y^2-4z^2=0}$

Dividim per 2 aquesta expressió:

$$x-\frac{y^2}{2}-\frac{4z^2}{2}=0,$$
$$x-\frac{y^2}{2}-2z^2=0,$$
$$x=\frac{y^2}{(\sqrt{2})^2}+\frac{z^2}{(1/\sqrt{2})^2}$$

És l'equació canònica d'un paraboloide (d'eix x).

8. CONTINUÏTAT DE FUNCIONS DE DIVERSES VARIABLES

Sigui $f : A \subset R^n \longrightarrow R^m$ **i** $a \in A$ **on el punt** a **és un punt d'acumulació. Aleshores definim el** **límit de *f* en un punt *a*:**

$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ **és possible trobar un** $\delta > 0$ **tal que** $d(f(x), L) = \|f(x) - L\| < \varepsilon$ **sempre que** $d(x,a) = \|x - a\| < \delta$ **on** $\delta > 0,\ x \in A$ **i** $x \neq a$.

Si $f : A \subset R^n \longrightarrow R^m$ **i** $a \in A \subset R^n$

$$x \longrightarrow (f_1(x),\ldots, f_m(x))$$

$\lim_{x\to a} f(x) = L = (L_1,\ldots,L_m) \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f_i(x) = L_i$ **on** $i = 1,\ldots,m$

Si $f : A \subset R^n \longrightarrow R^m$ **i** $a \in A$**, direm que** ***f* és contínua en un punt** $a \in A$ **si i només si**

$$\begin{cases} 1)\text{existeix } \lim_{x\to a} f(x) \\ 2)\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \end{cases}$$

Si $f = (f_1(x),\ldots, f_m(x)) : A \subset R^n \longrightarrow R^m \quad a \in A,\ f$ **és contínua en el punt** $a \Leftrightarrow f_i$ **(on** $i = 1,\ldots,m$**) és contínua en** $a, \forall i$.

Si $f, g : A \subset R^n \longrightarrow R^m \quad a \in A$.

1) **Si** f,g **són contínues en** $a \Rightarrow f + g, \lambda f, \lambda g$ **(on** λ **és real) són contínues en** a.
2) **Si** f,g **són contínues per** $m = 1,2$**, en** $a \Rightarrow f \cdot g$ **és contínua en** a.
3) **Si** f,g **són contínues, per** $m = 1$**, en** a **i** $g(a) \neq 0 \Rightarrow \dfrac{f}{g}$ **és contínua en** a.
4) **Si** $f : A \subset R^m \longrightarrow R^q$ **i** $g : B \subset R^q \longrightarrow R^m$ **on** $f(A) \subset (B)\ a \in A$, f **és contínua en** a **i** g **és contínua en** $f(a) \Rightarrow g \circ f$ **és contínua en** a.

Una funció contínua en cada punt d'un cert conjunt *A* es diu que és **contínua** **en aquest conjunt *A*.**
La Regla de l'Hopital permet

8.1. Calculeu els límits següents:

a) $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{5x^2y}{x^2+y^2}$ e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{1}{x^2+y^2}}$

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{5x^2y}{x^2+y^2}$ f) $\lim_{(x,y)\to(1,-1)} e^{\frac{1}{x^2+y^2}}$

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ g) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{2+\cos(x^2+y^2)}$

d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ h) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4+y^4}{x^2y^2}$

a) Substituint directament:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2} = \frac{5\cdot 1^2\cdot 2}{1^2+2^2} = \frac{10}{5} = 2\,.$$

b) Si substituïm directament obtenim $\frac{0}{0}$ per tant tenim una indeterminació que hem de resoldre. Així doncs, haurem de buscar un camí alternatiu. Utilitzant el canvi a coordenades polars ($x = r\cos\alpha, y = r\sin\alpha$):

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\alpha}} \frac{5r^2\cos^2\alpha\cdot rsen\alpha}{r^2\cos^2\alpha + r^2sen^2\alpha} = \lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\alpha}} \frac{5r^3\cos^2\alpha\cdot sen\alpha}{r^2(\cos^2\alpha + sen^2\alpha)} \overset{(1)}{=}$$

$$= \lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\alpha}} \frac{5r^3\cos^2\alpha\cdot sen\alpha}{r^2} = \lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\alpha}} 5r\underbrace{\cos^2\alpha\cdot sen\alpha} \overset{(2)}{=} 0\,.$$

(1) Recordeu que $\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha = 1$.
(2) Com que l'expressió $\cos^2\alpha\cdot\text{sen}\,\alpha$ és un producte de dos termes, cadascun d'ells menor o igual a 1, tenim una expressió que està fitada per 1, i com r tendeix a zero, el producte resultant tendeix a zero.

<u>Observació</u>: el grau del polinomi que apareix en el denominador d'aquesta expressió és 3 i el del denominador és 2, així el numerador tendirà a zero més ràpidament que el denominador.

c) Si substituïm obtenim, $\frac{0}{0}$ per tant tenim una indeterminació que hem de resoldre. Abordarem el càlcul d'aquest límit considerant el valor de la funció sobre diferents subconjunts del pla i comparant els valors de límit que obtenim en cada cas. Prenem, per exemple, una successió de punts tendint a (0,0) sobre la recta $y = x$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot x}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Prenem ara una successió de punts tendint a (0,0) diferent de l'anterior, per exemple sobre la recta $y = 2x$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=2x}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot 2x}{x^2+(2x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{5x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{5} = \frac{2}{5}.$$

El valor al qual tendeixen aquestes dues successions de punts del pla no coincideix.
I, en general, si considerem com a subconjunts sobre els que avaluem el límit, les rectes $y = mx$, obtenim:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot mx}{x^2+(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{(1+m^2)x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{m}{1+m^2} = \frac{m}{1+m^2}.$$

El valor del límit varia segons la direcció per la qual ens apropem al punt (0,0). Però el límit, si existeix, és únic. Per tant, podem deduir que el límit de la funció no existeix en el punt (0,0).

<u>Comentari</u>: Quan el numerador i el denominador tinguin el mateix grau, podem "sospitar" que el límit de la funció en el punt (0,0) no existirà. Per confirmar la nostra "sospita" considerem les rectes $y = mx$.

d) Si substituïm directament, tornem a obtenim $\frac{0}{0}$. Considerem el càlcul del límit mitjançant l'estudi de la funció sobre diferents subconjunts del pla. Per exemple, prenem una successió de punts tendint a (0,0) sobre la paràbola $y = x^2$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x^2}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot x^2}{x^4 + (x^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{2x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ara prenem una successió de punts tendint a (0,0) diferent de l'anterior, per exemple sobre la paràbola $y = 2x^2$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=2x^2}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot (2x)^2}{x^4 + (2x^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{4x^4}{x^4 + 4x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{4x^4}{5x^4} = \lim_{\substack{x\to 0\\ 2}} \frac{4}{5} = \frac{4}{5}.$$

I, en general, si considerem com a subconjunts del pla les paràboles $y = mx^2$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx^2}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot (mx)^2}{x^4 + (mx^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{m^2 x^4}{x^4 + m^2 x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{m^2 x^4}{(1+m^2)x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{m^2}{(1+m^2)} = \frac{m^2}{1+m^2}.$$

El valor del límit varia segons el "camí parabòlic" escollit per apropar-nos al punt (0,0). Però el límit, si existeix, és únic. Per tant, podem deduir que el límit de la funció no existeix en el punt (0,0).

Idea: Si apliquem el canvi parabòlic ($y = mx^2$) el numerador i el denominador de la funció passaran a tenir el mateix grau.

e) Utilitzant el canvi a coordenades polars:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{1}{x^2+y^2}} = \lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\alpha}} e^{\frac{1}{r^2\cos^2\alpha + r^2 sen^2\alpha}} = \lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\alpha}} e^{\frac{1}{r^2(\cos^2\alpha + sen^2\alpha)}} = \lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\alpha}} e^{\frac{1}{r^2}} =$$

$$= e^{\frac{1}{0}} = e^{+\infty} = +\infty.$$

Observació: Aquest límit també es pot calcular substituint directament.

f) Substituint directament:

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} e^{\frac{1}{x^2+y^2}} = e^{\frac{1}{1+1}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

g) Canviant de coordenades cartesianes a coordenades polars:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{2+\cos(x^2+y^2)} = \lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\alpha}} \frac{r^2\cos^2\alpha + r^2 sen^2\alpha}{2+\cos(r^2\cos^2\alpha + r^2 sen^2\alpha)} =$$

$$= \lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\alpha}} \frac{r^2(\cos^2\alpha + sen^2\alpha)}{2+\cos\left[r^2(\cos^2\alpha + sen^2\alpha)\right]} = \lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\alpha}} \frac{r^2}{2+\cos r^2} \xrightarrow{\text{Substituint directament}} = \frac{0}{2+1} = 0 .$$

<u>*Observació*</u>: Aquest límit també es pot calcular substituint directament els valors de x i y.

h) Si substituïm directament, obtenim la indeterminació $\frac{0}{0}$. Donat que el numerador i el denominador del quocient que defineix la funció tenen el mateix grau, podem intuir que el límit no existeix. Considerem una successió de punts tendint a (0,0) sobre la recta $y = mx$, per a qualsevol m:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} \frac{x^4+y^4}{x^2y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4+(mx)^4}{x^2(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4+m^4x^4}{m^2x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+m^4)x^4}{m^2x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1+m^4}{m^2} = \frac{1+m^4}{m^2} .$$

El límit va variant segons la direcció per la qual ens apropem al punt (0,0), per tant el valor que obtenim no és únic. Llavors, no existeix el límit d'aquesta funció en l'origen.

8.2. Estudieu la continuïtat de les següents funcions:

a) $\boldsymbol{f(x,y) = (2x^2 + y^3, y-1)}$

b) $\boldsymbol{g(x,y) = \dfrac{3x^2}{x-y}}$

a) Les dues funcions components de la funció vectorial f, $2x^2 + y^3$ i $y-1$, són funcions polinòmiques i, per tant, no tenen discontinuïtats. Així doncs, f és una funció contínua a tot R^2.

b) La funció g, en ésser una funció racional, serà discontínua en els punts on el denominador $x-y$ s'anul·la. Per tant, serà contínua en el conjunt:

$$R^2 - \{(x,y)\in R^2 \mid x-y=0\} = \{(x,y)\in R^2 \mid x-y\neq 0\} = \{(x,y)\in R^2 \mid x\neq y\}.$$

8.3. Donada la funció $\boldsymbol{f(x,y) = \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}}$**:**

a) Calculeu el límit de la funció quan (*x*,*y*) tendeix a (0,0).
b) Trobeu les antiimatges de 0 per *f*, és a dir, el conjunt de punts (*x*,*y*) del pla tals que $\boldsymbol{f(x,y)=0}$. Quina família de corbes representa en el pla aquest conjunt de punts?

a) Per fer el càlcul del límit, com la substitució directa per $x = 0$ i $y = 0$ en la funció $f(x,y)$ ens dóna una indeterminació, utilitzem el canvi a coordenades polars:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\alpha}} \frac{\sin(r^2\cos^2\alpha + r^2\sin^2\alpha)}{r^2\cos^2\alpha + r^2\sin^2\alpha} =$$

$$= \lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\alpha}} \frac{\sin\left[r^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)\right]}{r^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)} = \lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\alpha}} \frac{\sin(r^2)}{r^2} \overset{(1)}{=} 1.$$

(1) El desenvolupament per Taylor de la funció $\sin(x)$ al voltant del 0 és: $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$. Aleshores, quan x s'apropa a zero, menyspreant potències d'ordre major que 1 de x, podem considerar l'aproximació: $\text{sen}(x) \approx x$, de forma que, aleshores, el quocient $\frac{\sin x}{x}$ tendeix a 1, quan x tendeix a 0. Un mètode alternatiu per calcular el límit $\frac{\sin r^2}{r^2}$ quan r tendeix a 0 és utilitzar el mètode de L'Hôpital:

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\alpha}} \frac{\sin(r^2)}{r^2} = \lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\alpha}} \frac{2r\cos(r^2)}{2r} = \lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\alpha}} \cos r^2 = \cos 0 = 1.$$

b) Hem de buscar els punts (x,y) diferents de l'origen tals que $f(x,y)=0$:

$$\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow \sin(x^2+y^2) = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 = k\pi,\ k>0.$$

Les antiimatges del 0 es situen sobre circumferències centrades en l'origen i de radi $\sqrt{k\pi}$, amb $k>0$.

8.4. Donada la funció $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$:

a) Estudieu el límit quan (x,y) tendeix a (0,0).

b) Determineu el domini de definició de la funció $g(x,y) = \ln(f(x,y))$.

a) Si observem la funció f , el grau del polinomi del numerador i el del denominador són iguals. Demostrarem que el límit de la funció en l'origen no existeix. Prenem una successió de punts tendint a (0,0) sobre la recta $y = mx$, per a qualsevol m:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-(mx)^2}{x^2+(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-m^2x^2}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-m^2)x^2}{(1+m^2)x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-m^2}{1+m^2} = \frac{1-m^2}{1+m^2}.$$

El límit és diferent segons la recta sobre la que ens movem. Per exemple sobre la bisectriu $y = x$ el límit pren el valor 0, mentre que sobre la recta $y = 0$ el límit és 1. Per tant, el límit no pot existir.

b) El domini de definició de la funció $g(x,y) = \ln(f(x,y))$ són els punts (x,y) del pla tals que $f(x,y) > 0$, és a dir, tals que $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} > 0$ ja que la funció logaritme neperià només està definida sobre valors reals estrictament positius. El denominador d'aquesta expressió x^2+y^2 sempre és positiu. Per tant ens interessen només aquells punts que fan el numerador positiu:

$$x^2 - y^2 > 0,$$
$$x^2 > y^2,$$
$$|x| > |y|.$$

D'aquí podem deduir que $x \neq 0$.

Distingim els següents casos:

- Si x>0, aleshores $x > |y|$, és a dir: $-x < y < x$.
- Si x<0, aleshores $-x > |y|$, és a dir:

$-x > y$ o $-x > -y$ (que és equivalent a $x < y$).

Així doncs:

$$\mathrm{Dom}(g) = \{(x, y) \in R^2 \mid x > 0, -x < y < x\} \cup \{(x, y) \in R^2 \mid x < 0, y < -x \text{ o } y > x\}.$$

9. DIFERENCIABILITAT DE FUNCIONS DE DIVERSES VARIABLES

Sigui $f : A \subset R^n \longrightarrow R$, on A és un conjunt obert i x és un punt interior de $A, x \in A \quad x = (x_1,..., x_n)$

S'anomena <u>derivada direccional de f en a</u> (o derivada de f en el punt a) segons la direcció v (on v és un vector de norma $\|v\| = 1$, el qual fixa una direcció en R^n) a

$$D_v f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} \quad \text{(si existeix el límit).}$$

S'anomena <u>derivada parcial respecte a x_i</u> de f en el punt x i escrivim $D_i f(x), \frac{\partial}{\partial x_i} f(x),\ D_{x_i} f(x)$, al límit següent, si existeix:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_1,..., x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1},..., x_n) - f(x_1, x_2,..., x_n)}{t}$$

Per al càlcul efectiu, $D_i f(x)$ és la derivada de f respecte a x_i mentre totes les altres variables es mantenen fixes. Les derivades parcials de f són les derivades direccionals, en la direcció donada pels eixos coordenats.

Direm que la funció $f : A \subset R^n \longrightarrow R$ és <u>derivable en un punt</u> $a \in A$ si i només si existeixen totes les derivades parcials de f en a.

Sigui $f : A \subset R^n \longrightarrow R \quad a \in A$, f és <u>derivable en A</u> si és derivable en cada punt $a \in A$.

Es defineix el <u>gradient</u> de la funció $f(x)$ en el punt a com el vector fila:

$$\nabla f(a) = gradf(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a),..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right) = \left(D_1 f(a), D_2 f(a),..., D_n f(a)\right)$$

El vector gradient de f en un punt a, si les funcions derivades parcials són contínues, dóna la direcció de la derivada direccional màxima.

f és <u>diferenciable</u> en un punt $a \in A$ si i només si existeix una aplicació lineal F de R^n a R^m $\left(F : R^n \longrightarrow R^m \right)$ de manera que donat $\varepsilon > 0$ existeix un $\delta > 0$ tal que, si $\|h\| < \delta$, aleshores $\left\| f(a+h) - f(a) - F(h) \right\| < \varepsilon \|h\|$ és a dir, s'ha de verificar que $\lim_{h \to 0} \frac{\left\| f(a+h) - f(a) - F(h) \right\|}{\|h\|} = 0$. Aquesta aplicació lineal F, si existeix, és única i s'escriu $Df(a)$ (o dfa), i s'anomena diferencial de f en el punt a.

L'<u>aproximació lineal</u> de f en el punt $a+h$ quan h és petit, ve donada per la diferencial de f en el punt a i pel valor de la funció en el punt a:

$$f(a+h) \cong f(a) + Df(a)(h) = f(a) + F(h).$$

Per punts x que pertanyen en un entorn del punt a: $f(x) \cong f(a) + Df(a)(x-a)$

<u>Equació del pla tangent</u> a la gràfica de $f : R^2 \longrightarrow R$, en el punt (x_0, y_0):

$$z = f(x_o, y_o) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o) \right](x - x_o) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o) \right](y - y_o)$$

Sigui $f : A \subset R^n \longrightarrow R \quad a \in A$. Si $D_i f = \frac{\partial}{\partial x_i} f = D_{x_i} f$ admet derivada parcial *j*-èsima, aleshores $D_j((D_i f)(a)) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} f\right)(a)$ són les <u>derivades parcials de segon ordre</u> o derivades parcials segones de ***f*** en ***a***.

Notació : $D_{j\,i} f(a) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} f\right)\right)(a) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f\right)(a) = D_{x_j x_i} f(a)$

<u>Teorema de Schwarz</u>:

Sigui $f \in C^1(A)$, *A* obert de R^n (C^1, una funció és C^1 si existeixen totes les derivades d'ordre 1 i, a més a més, són totes contínues). Si existeixen i són contínues en *A* les derivades creuades $D_{ij}f$ i $D_{ji}f$, aleshores $D_{ij}f = D_{ji}f$ en *A*. (Observació: En el nostre cas, amb funcions regulars, sempre serà cert).

S'anomena <u>matriu hessiana</u> de *f* en *a*, a la matriu:

$$d^2 f_a = H = (D_{ij} f(a)) = \begin{pmatrix} D_{11} f(a) & D_{21} f(a) & \dots & D_{n1} f(a) \\ D_{12} f(a) & D_{22} f(a) & \dots & D_{n2} f(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_{1n} f(a) & D_{2n} f(a) & \dots & D_{nn} f(a) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_2 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_n \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_2 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_n \partial x_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_2 \partial x_n} & \dots & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

<u>Regla de la cadena</u>: Siguin $A \subset R^n$ y $B \subset R^m$ dos conjunts oberts. Si $f : A \subset R^n \to R^m$ és diferenciable en $x_0 \in A$, $g : B \subset R^m \to R^p$ és diferenciable en $y_0 = f(x_0)$ i $f(A) \subset B$, aleshores $g \circ f$ és diferenciable en x_0 i es verifica que $D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0)$.

Denotant per $y_j = f_j(x)$: $\frac{\partial (g \circ f)_k}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(y) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$.

9.1. Trobeu les funcions derivades parcials de les funcions següents:

a) $f(x, y) = x^3 arctgxy$

b) $f(x, y) = e^{xy} + \ln(x^2 + y^2)$

c) $f(x, y) = x^4 y + e^{xy^2}$

a) Fem la cerca de les funcions derivades parcials de forma operativa, utilitzant les regles conegudes de derivació:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3x^2 arctgxy+x^3\cdot\frac{y}{1+(xy)^2}=3x^2 arctgxy+\frac{x^3y}{1+x^2y^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^3\cdot\frac{x}{1+(xy)^2}=\frac{x^4}{1+x^2y^2}.$$

b) $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=ye^{xy}+\frac{2x}{x^2+y^2}\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=xe^{xy}+\frac{2y}{x^2+y}.$$

c) $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=4x^3y+y^2e^{xy^2}\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^4+2xye^{xy^2}.$$

9.2. Donada la funció $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

a) Calculeu-ne les derivades parcials en qualsevol punt.
b) És contínua en l'origen?

a) Les parcials de *f* fora de l'origen es poden calcular directament, ja que aquest punt és l'únic que pot presentar problemes.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y(x^2+y^2)-2x(xy-y^3)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2y+y^3-2x^2y+2xy^3}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^3-x^2y+2xy^3}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{(x-3y^2)(x^2+y^2)-2y(xy-y^3)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^3+xy^2-3x^2y^2-3y^4-2xy^2+2y^4}{(x^2+y^2)^2}=$$

$$=\frac{x^3-xy^2-3x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

Calculem ara les parcials en l'origen a partir de la definició, és a dir:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{0/x^2-0}{x}=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to0}\frac{-y^3/y^2-0}{y}=\lim_{y\to0}\frac{-y^3}{y^3}=-1.$$

Per tant:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^3-x^2y+2xy^3}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-xy^2-3x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ -1 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

b) Fora del punt (0,0) la funció *f* no presenta cap problema de continuïtat, ja que és una expressió fraccionària i el denominador només s'anul·la en l'origen. Veiem què passa en l'origen. La funció *f* està definida en aquest punt, on val 0, és a dir, $f(0,0)=0$. Estudiarem si existeix el límit de *f* en l'origen i, cas d'existir, si coincideix amb la seva imatge, que és 0. A tal efecte, fem canvi a polars:

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\alpha}} \frac{r\cos\alpha\, r\sin\alpha - r^3 sen^3\alpha}{r^2\cos^2\alpha + r^2\sin^2\alpha} = \lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\alpha}} \frac{r^2\cos\alpha\sin\alpha - r^3\sin^3\alpha}{r^2\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)} = \lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\alpha}} \frac{r^2\cos\alpha\sin\alpha - r^3\sin^3\alpha}{r^2} =$$

$$= \lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\alpha}} \left(\frac{r^2\cos\alpha\sin\alpha}{r^2} - \frac{r^3\sin^3\alpha}{r^2} \right) = \lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\alpha}} (\cos\alpha\sin\alpha - r\sin^3\alpha) = \cos\alpha\sin\alpha\,, \forall\alpha.$$

El límit depèn de l'angle α. Per a valors diferents de α, que corresponen a diferents direccions, el valor al qual es tendeix quan ens apropem a l'origen canvia. Aleshores, no existeix el límit de la funció en aquest punt.
Per tant, aquí tenim un exemple d'una funció que és derivable en l'origen (és a dir, que existeixen les derivades parcials en el (0,0)) però que no és contínua en aquest punt. Hem comprovat una propietat o característica que poden tenir les funcions de diverses variables: la derivabilitat no implica continuïtat, la qual cosa no es pot donar en el cas de funcions reals de variable real.

9.3. Considereu la funció $f(x,y)=\left(e^{xy}\ln(1+y^2),\dfrac{1}{xy}\right)$:

a) **Quin és el domini de definició de la funció *f*?**
b) **És R^2 el conjunt imatge de *f*?**
c) **Demostreu que el punt (1,1) pertany al conjunt imatge de *f*.**
d) **Doneu la diferencial de la funció *f* en el punt (x,y).**

a) El domini de definició de la primera funció component $e^{xy}\ln(1+y^2)$ és tot R^2, ja que l'exponencial de l'expressió polinòmica no presenta cap tipus de problema de definició i el logaritme tampoc, ja que $1+y^2$ és estrictament positiu. La segona funció component $\dfrac{1}{xy}$ està definida quan el denominador no s'anul·la, és a dir, quan ni *x* ni *y* no són zero.
Per tant:

$$\mathrm{Dom}(f)=\left\{(x,y)\in R^2 \mid x\neq 0, y\neq 0\right\}.$$

b) Estudiem quin és el conjunt imatge de *f*:

$$\mathrm{Im}(f)=\left\{(u,v)\in R^2 \mid u=e^{xy}\ln(1+y^2), v=\frac{1}{xy}\right\}.$$

Donat (*u*,*v*), hem de resoldre el sistema no lineal per saber si podem trobar *x* i *y* en funció de *u* i *v*:

$$\begin{cases} u=e^{xy}\ln(1+y^2),\\ v=\dfrac{1}{xy}. \end{cases}$$

De la segona equació, com que $y\neq 0$, $\dfrac{1}{vy}=x$, i substituint en la primera, obtenim:

$$u = e^{1/v}\ln(1+y^2) \Rightarrow e^{-1/v}u = \ln(1+y^2) \Rightarrow e^{e^{-1/v}u} \underset{(1)}{=} 1+y^2 \Rightarrow e^{e^{-1/v}u} - 1 = y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pm\sqrt{e^{e^{-1/v}u} - 1} = y.\ (*)$$

(1) Apliquem l'exponencial als dos costats de la igualtat.

De l'expressió (*) deduïm que *y* existirà si i només si $e^{e^{-1/v}u} - 1 > 0$ (el cas 0 queda descartat, ja que $y = 0$ no pertany al domini de *f*). Equivalentment: $e^{e^{-1/v}u} > 1$, i aplicant logaritmes als dos costats, arribem a la inequació $e^{-1/v}u > 0$. Com que l'exponencial sempre és estrictament positiva , aquesta inequació serà certa si i només si *u* és estrictament positiva.
Amb l'expressió (*) fixats els valors *u* i *v* obtenim *y*, i després ja podem trobar la *x* substituint en $x = \frac{1}{vy}$, expressió que tindrà sentit sempre que $v \neq 0$.
Finalment:

$$\mathrm{Im}(f) = \{(u,v) \in R^2 \mid u > 0 \text{ i } v \neq 0\},$$

conjunt que no és tot R^2.

d) El punt (1,1) pertany al conjunt imatge de *f* perquè la seva primera coordenada és estrictament positiva i la segona és no nul·la, com acabem de veure en l'apartat anterior. Dit d'una altra forma, el sistema:

$$\begin{cases} 1 = e^{xy}\ln(1+y^2) \\ 1 = \dfrac{1}{xy} \end{cases}$$

és compatible. Una antiimatge del punt (1,1) serà una solució d'aquest sistema, i per tant, tenint en compte que $y = \frac{1}{x}$,

$$1 = e^1 \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow \frac{1}{e} = \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow e^{1/e} = 1+\frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{e^{1/e}-1} \Rightarrow x = +\sqrt{\frac{1}{e^{1/e}-1}} \approx 1{,}5$$

$$y = \left(+\sqrt{\frac{1}{e^{1/e}-1}}\right)^{-1} \approx 0{,}667.$$

d) En aquest cas, *f* és una funció vectorial amb dues components de dues variables *x* i *y*, és a dir, $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y)) = \left(e^{xy}\ln(1+y^2), \frac{1}{xy}\right)$. Aleshores:

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ye^{xy}\ln(1+y^2) & xe^{xy}\ln(1+y^2) + 2e^{xy}y(1+y^2)^{-1} \\ -(x^2y)^{-1} & -(xy^2)^{-1} \end{pmatrix}.$$

9.4. Donada la funció de $f(x,y) = x\,\mathrm{sen}\,y + e^x$:

a) És diferenciable en R^2 ? En cas afirmatiu calculeu la seva diferencial en el punt (0,0).

b) Fent servir l'aproximació lineal de $f(x,y)$ en un entorn del (0,0), calculeu de manera aproximada $f(0{,}5{,}0{,}2)$ i $f(0{,}05{,}0{,}03)$.

a) Les funcions x i $\operatorname{sen} y$ són diferenciables perquè són funcions derivables amb la funció derivada contínua. Per tant, també ho serà el seu producte. La funció exponencial és diferenciable. I com que la suma de funcions diferenciables és diferenciable, la funció *f* és diferenciable en R^2.
Calculem ara la diferencial de la funció *f* en el punt (0,0):

$$Df(0{,}0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0{,}0), \frac{\partial f}{\partial y}(0{,}0) \right) = (\sin y + e^x, x\cos y)\Big|_{(0,0)} = (1{,}0)$$

b) Un cop sabem que la funció és diferenciable i coneixem la seva diferencial, podem aproximar la funció linealment en un entorn de l'origen:

$$f(x,y) \approx f(0{,}0) + Df(0{,}0)(x,y) = 1 + (1{,}0)\cdot(x,y) = 1 + x$$

O de forma equivalent:

$$f(x,y) \approx f(0{,}0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0{,}0)[x-0] + \frac{\partial f}{\partial y}(0{,}0)[y-0]$$

$$f(x,y) \approx f(0{,}0) + \left[\left(\sin y + e^x\right)\Big|_{(0,0)}\right]x + \left[\left(x\cos y\right)\Big|_{(0,0)}\right]y = 1 + x \Rightarrow$$

$$f(x,y) \approx 1 + x = \pi(x,y).$$

D'aquesta manera, calculem el valor aproximat de la funció en els punts (0,5,0,2) i (0,05,0,03):

$$f(0{,}5{,}0{,}2) \approx \pi(0{,}5{,}0{,}2) = 1 + 0{,}5 = 1{,}5,$$

$$f(0{,}05{,}0{,}03) \approx \pi(0{,}05{,}0{,}03) = 1 + 0{,}05 = 1{,}05.$$

que podem comparar amb el valor exacte de la funció en aquests punts *f*(0,5,0,2) = 1,748 i *f*(0,05,0,03) = 1,0527, essent l'error absolut en cada un dels punts

$$\left|f(0{,}5{,}0{,}2) - \pi(0{,}5{,}0{,}2)\right| = 0{,}248 \text{ i } \left|f(0{,}05{,}0{,}03) - \pi(0{,}05{,}0{,}03)\right| = 0{,}0027.$$

Quant més proper és el punt al (0,0) més acurada és l'aproximació obtinguda.

9.5. Calculeu el pla tangent a la gràfica de $z = x^2 + y^4 + e^{xy}$ en el punt (1,0,2).

Trobem el pla tangent a la gràfica de $z = f(x,y)$ en un punt (x_0, y_0, z_0) a partir de la funció que dóna l'aproximació lineal de *f* a l'entorn d'aquest punt:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

En el nostre cas, $x_0 = 1, y_0 = 0, z_0 = f(x_0, y_0) = 2$, per tant

$$f(1{,}0) = 2;\ \frac{\partial f}{\partial x}(1{,}0) = 2x + ye^{xy}\Big|_{(1,0)} = 2;\ \frac{\partial f}{\partial y}(1{,}0) = 4y^3 + xe^{xy}\Big|_{(1,0)} = 1.$$

Substituint en l'equació general del pla tangent, $z = 2 + 2(x-1) + y = 2 + 2x - 2 + y = 2x + y$.
Així doncs, l'equació del pla tangent a la gràfica de $z = f(x,y)$ en el punt (1,0,2) és $z = 2x + y$.

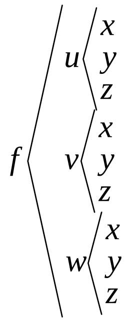
9.6. Sigui $f(u,v,w) = u^2 + v^2 - w$, on $u(x,y,z) = x^2y$, $v(x,y,z) = y^2$, i $w(x,y,z) = e^{-xz}$.

a) Fent servir la regla de la cadena, calculeu $\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}$ i $\frac{\partial h}{\partial z}$ essent $h = f(u,v,w)$.

b) Obteniu l'expressió de la funció *h* depenent de les variables *x*, *y* i *z*.

c) Obteniu les derivades parcials de la funció *h* directament a partir de l'expressió obtinguda en l'apartat b).

a) Donada la funció $h(x,y,z) = f(u,v,w) = f(u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z))$ observem com depenen unes variables de les altres.
El següent arbre mostra els "camins" que relacionen *f* amb les diferents variables:



Si volem la derivada parcial de la funció composada respecte *x*, com a regla pràctica per utilitzar la regla de la cadena, hem de seguir els camins que acaben en *x* i sumar-los:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} = 2u \cdot 2xy + 2v \cdot 0 + (-1)\cdot(-ze^{-xz}) = 4uxy + ze^{-xz}.$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} = 2u \cdot x^2 + 2v \cdot 2y + (-1)\cdot 0 = 2ux^2 + 4vy.$$

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z} = 2u \cdot 0 + 2v \cdot 0 + (-1)\cdot(-xe^{-xz}) = xe^{-xz}.$$

Aleshores, en lloc de *u*, *v* i *w* escrivim les seves expressions en funció de *x*, *y* i *z*:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 4(x^2y)xy + ze^{-xz} = 4x^3y^2 + ze^{-xz},$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = 2(x^2y)x^2 + 4y^2y = 2x^4y + 4y^3,$$

$$\frac{\partial h}{\partial z} = xe^{-xz}.$$

b) Per obtenir l'expressió de la funció *h* en funció de les variables *x*, *y* i *z* substituirem directament:

$$h(x,y,z) = f(u,v,w) = f(u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z)) = \left(x^2y\right)^2 + \left(y^2\right)^2 - e^{-xz} = x^4y^2 + y^4 - e^{-xz}.$$

c) Amb les regles de derivació habituals calcularem les derivades parcials de la funció *h*:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 4x^3y^2 + 0 - (-z)e^{-xz} = 4x^3y^2 + ze^{-xz},$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = x^4 2y + 4y^3 + 0 = 2x^4y + 4y^3,$$

$$\frac{\partial h}{\partial z} = xe^{-xz}.$$

que coincideixen amb les funcions derivades trobades en l'apartat a).

9.7. Trobeu la matriu hessiana de la funció $f(x,y) = x^2y^3\,\mathrm{sen}(xy)$. Doneu la matriu hessiana d'aquesta funció en el punt (1,0) i en el punt (1,1).

Primer necessitem calcular les derivades parcials de primer i de segon ordre de la funció *f*:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^3 \sin(xy) + x^2 y^4 \cos(xy)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2 y^2 \sin(xy) + x^3 y^3 \cos(xy)$$

Aleshores tornant a derivar:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2y^3 \sin(xy) + 2xy^4 \cos(xy) + 2xy^4 \cos(xy) - x^2 y^5 \sin(xy) =$$
$$= 2y^3 \sin(xy) + 4xy^4 \cos(xy) - x^2 y^5 \sin(xy)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6x^2 y \sin(xy) + 3x^3 y^2 \cos(xy) + 3x^3 y^2 \cos(xy) - x^4 y^3 \sin(xy) =$$
$$= 6x^2 y \sin(xy) + 6x^3 y^2 \cos(xy) - x^4 y^3 \sin(xy)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \underset{(1)}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 6xy^2 \sin(xy) + 6x^2 y^3 \cos(xy) - x^3 y^4 \sin(xy)$$

(1) Observem que es verifica el teorema de Schwarz que diu que quan les $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existeixen i són contínues, aleshores les derivades parcials de segon ordre mixtes coincideixen, les derivades $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ són iguals.

<u>*Observació*</u>: Un càlcul addicional permet detectar possibles errors. Quan tenim $\frac{\partial f}{\partial x}$, trobarem $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ derivant $\frac{\partial f}{\partial x}$ respecte *y*, que hauria de coincidir, si es verifiquen les condicions del teorema de Schwarz, amb la derivada que obtindríem a partir de la $\frac{\partial f}{\partial y}$ derivant respecte *x*. En el nostre cas farem aquesta comprovació:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 6xy^2 sen(xy) + 2x^2 y^3 \cos(xy) + 4x^2 y^3 \cos(xy) - x^3 y^4 sen(xy) =$$
$$= 6xy^2 sen(xy) + 6x^2 y^3 \cos(xy) - x^3 y^4 sen(xy),$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 6xy^2 sen(xy) + 3x^2 y^3 \cos(xy) + 3x^2 y^3 \cos(xy) - x^3 y^4 sen(xy) =$$
$$= 6xy^2 sen(xy) + 6x^2 y^3 \cos(xy) - x^3 y^4 sen(xy),$$

obtenint el mateix resultat.

Ara ja podríem muntar la hessiana:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}.$$

Passem a avaluar la matriu hessiana en els dos punts indicats:

$$Hf(1,0)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \text{ i}$$

$$Hf(1,1)=\begin{pmatrix}2\,\mathrm{sen}1+4\cos1-\mathrm{sen}1 & 6\,\mathrm{sen}1+6\cos1-\mathrm{sen}1\\ 6\,\mathrm{sen}1+6\cos1-\mathrm{sen}1 & 6\,\mathrm{sen}1+6\cos1-\mathrm{sen}1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{sen}1-4\cos1 & 5\,\mathrm{sen}1+6\cos1\\ 5\,\mathrm{sen}1+6\cos1 & 5\,\mathrm{sen}1+6\cos1\end{pmatrix}.$$

9.8. Un insecte es troba en un medi tòxic. El grau de toxicitat ve donat per la funció $T(x,y)=4x^2-5y^2$. L'insecte es troba en el punt (-3,-5) del pla. En quina direcció s'haurà de moure per disminuir el més ràpidament possible la seva toxicitat?

El vector gradient de *T* en un punt del pla representa la direcció en què la toxicitat augmentarà més ràpidament, és a dir, dóna la derivada direccional màxima.
L'oposat del vector gradient de *T* en el punt (-3,-5) dóna la derivada direccional mínima. Si l'insecte segueix aquesta direcció, la toxicitat disminuirà el més ràpidament possible.

$$-\nabla T(-3,-5)=-\left(\frac{\partial f}{\partial x}(-3,-5),\frac{\partial f}{\partial y}(-3,-5)\right)=-\left.(8x,-10y)\right|_{(-3,-5)}=-(-24,50)=(24,-50).$$

L'insecte, doncs, s'hauria de moure segons la direcció del vector (24,-50).

9.9. Suposem que una muntanya té forma de paraboloide el·líptic $z = 1- x^2 - y^2$, *x* i *y* són les coordenades est-oest i nord-sud, i *z* és l'altitud sobre el nivell del mar (*x*, *y* i *z* estan mesurades en metres). Un enginyer vol construir un ferrocarril que pugi aquesta muntanya. Pujar directament la muntanya és massa "empinat" o dreçat per a les forces de les màquines. En el punt (1,1), en quines direccions es pot col·locar la via de manera que pugi un 3%, és a dir, que s'obtingui un angle tal que la seva tangent sigui 0,03? Quina és la condició que hauran de verificar aquestes direccions?

En aquest problema es tracta de buscar un vector adient que faci que la derivada direccional sigui igual a 0,03.

Sigui $v=(v_1,v_2)$ un vector unitari, és a dir, verificant la condició $v_1^2+v_2^2=1$. Donat que *f* és diferenciable, les derivades parcials de la funció $f=f(x,y)=1-x^2-y^2$ són funcions contínues, la derivada direccional de *f* en el punt (1,1) i segons la direcció del vector *v* es pot calcular utilitzant el vector gradient de *f* en el punt (1,1). El producte escalar d'aquest vector amb el vector *v* és la derivada direccional de *f* en el punt (1,1) i la direcció *v*. Aquesta derivada direccional ve donada per l'expressió:

$$D_v f(1,1)=\nabla f(1,1)\cdot v=\langle \mathrm{grad}f(1,1),v\rangle.$$

<u>*Observació*</u>: el signe · aquí correspon al producte escalar de dos vectors.

Busquem, doncs, el gradient de la funció $f(x,y)=1-x^2-y^2$ en el punt (1,1):

$$\nabla f(1,1)=\left.(-2x,-2y)\right|_{(1,1)}=(-2,-2).$$

Ara ja podem calcular la derivada direccional de *f* en (1,1) segons el vector *v*:

$$D_v f(1,1)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,1),\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\right)\cdot(v_1,v_2)=(-2,-2)\cdot(v_1,v_2)=-2v_1-2v_2.$$

Imposem que aquesta derivada direccional sigui igual a 0,03:

$$-2v_1-2v_2=0{,}03\Rightarrow(-2)(v_1+v_2)=0{,}03\Rightarrow v_1+v_2=-\frac{0{,}03}{2}=-0{,}015\Rightarrow v_1+v_2+0{,}015=0.$$

Podem concloure que les direccions demanades en l'enunciat seran els vectors $v = (v_1, v_2)$ unitaris, $v_1^2 + v_2^2 = 1$, i de forma que verifiquin la condició $v_1 + v_2 + 0{,}015 = 0$.

Questions diverses relacionades amb les funcions de diverses variables i l'espai en el qual es defineixen

9.10. Sigui la funció $f(x,y) = \dfrac{2ye^x \ln y + 1}{3xy}$, aleshores les afirmacions següents són certes:

- És una funció real de dues variables reals.
- El domini de *f* no és R^2.
- No és una funció que es manté fitada en qualsevol conjunt compacte de R^2. Per exemple podem considerar la bola tancada de centre el punt (0,1) i radi 0,5, que és un conjunt compacte. La funció pren valors tan grans com vulguem en considerar punts suficientment propers al punt (0,1).
- La derivada parcial respecte *y* no és $2e^x (\ln y + 1) - \dfrac{1}{3xy^2}$.
- La derivada parcial respecte *x* no és $2ye^x \ln y - (3x^2 y)^{-1}$.

9.11. Donada la funció real de dues variables reals $f(x,y) = \ln(x)/\ln(y)$

- El domini de la funció no és el conjunt R^2 - {(0,0)}.
- El domini de la funció és el conjunt de punts (*x*,*y*) tals que *x*>0, *y*>0 , i *y*≠1.
- No és una funció que es manté fitada en el seu domini. En punts (*x*,*y*) del domini, amb un valor de *y* proper a 1, la funció assoleix valors molt grans, ja que el logaritme neperià d'aquests valors és molt proper a zero, resultat que apareix en el denominador del quocient que defineix la funció.
- Aquesta funció no es pot reescriure com *f*(*x*,*y*)=ln (*x* / *y*).
- Aquesta funció *f*(x,*y*) no és igual a la funció ln(*x*-*y*).
- El conjunt imatge de *f* és tot *R*. Per demostrar que aquesta afirmació és correcta, utilitzarem els coneixements que tenim sobre la funció logaritme neperià (funció real de variable real). Del fet que la funció logarítmica és una funció definida sobre els reals estrictament positius i que el seu conjunt imatge són tots els reals, deduïm que *f*(*x*,*y*) té per imatge també *R*. Només cal considerar, per exemple, que *f*(*x*,*e*)= = ln(*x*) / ln(*e*) = ln (*x*) / 1 = ln (*x*).

9.12. Sigui la funció $f(x,y,z) = (\tan x,\ 1/(x+y+z), \sqrt{xyz})$

- El domini o camp d'existència de la funció *f* no és el conjunt de punts (*x*,*y*,*z*) de R^3 amb *x*>0, *y*>0 i *z*>0. Per exemple, té sentit calcular *f* (-10,-1,1) = (tan(-10),-0,1, $\sqrt{10}$).i en canvi, la 1ª coordenada no és estrictament positiva. Per altra part, el punt (π/2,1,1) té totes les coordenades positives i no obstant no està definida la primera funció component, la funció tangent no està definida en el punt π/2.
- La funció *f* està definida en el punt (0,1,1), i la seva imatge és (0, 1/2, 0).
- La funció *f* no està definida en el punt (π/2,0,0).
- El domini de *f* no són els punts (*x*,*y*,*z*) de R^3 amb *xyz*≥0.
- La funció *f* no està definida en el punt (-π/2,1,1).

- La funció no sempre pren valors diferents sobre punts diferents del seu domini. (és a dir, no és injectiva)
- La gràfica d'aquesta funció no és una superfície en R^3.

9.13. Donada la funció $f(x,y,z) = (\tan x,\ 1/z,\ \sqrt{xyz})$

- La diferencial de *f* en un punt (a,b,c) no és la matriu que té la segona columna igual a

$$\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -1/c^2 \end{matrix}$$

- No existeix la matriu diferencial de *f* en el punt (0,1,0).
- La matriu diferencial en el punt (1,1,1), $df_{(1,1,1)}$, no és la matriu $\begin{pmatrix} \cos 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.
- És localment bijectiva en un entorn del punt (1,1,1).
- No té sentit dir que el determinant de la matriu de la diferencial de *f* en qualsevol punt de R^3 és diferent de zero.
- La tercera fila de la $df_{(2,2,2)}$ és $1/\sqrt{2} \quad 1/\sqrt{2} \quad 1/\sqrt{2}$
- La diferencial de *f* en el punt $(\pi/2,1,1)$ no està definida.

9.14. Donada la funció de dues variables $z = f(x,y) = 3x + y^2 + 3$

- Qualsevol valor real és del conjunt imatge de *f*.
- El punt (-1,0) no és antiimatge de $z = 1$.
- La representació gràfica d'aquesta funció no és un pla a l'espai.
- Hi ha infinits punts (x,y) sobre els que la funció *f* pren el valor 0.
- Les corbes de nivell de *f* són de tipus parabòlic.
- Una equació per a les corbes de nivell d'aquesta gràfica és $y^2 = k - (3 + 3x)$ on k és una constant.
- La funció *f* és una funció no fitada superiorment.
- No existeix una fita inferior per a la funció *f*.
- Si r és un nombre real positiu, $f^{-1}(r)$ no pot ser mai un nombre, és de $\Re^2$.

9.15. Sigui la funció $f(x) = 2\, e^x \ln(x-1)^2 + x$:

- No és una funció real de dues variables.
- És una funció real de variable real.
- Existeix un conjunt compacte de R on la funció no es manté fitada.
- No existeix $f(x)$ per a tot x real.

9.16. Donada la funció $z = f(x,y) = \sin(x/y)$:

- El domini de la funció *f* no és el conjunt R^2-{(0,0)}.
- És una funció fitada en el seu domini d'existència o camp de definició.
- Aquesta funció *f* no es pot escriure $\sin(x)/\sin(y)$.
- El conjunt imatge de *f* no és el conjunt dels reals.
- El conjunt imatge de *f* no és l'interval obert de la recta real (-1, 1).

9.17. Donada la funció $f(x,y) = (y/x, (x/y)^{1/2})$:

- La imatge de f en el punt (4,4) és (1,1).
- El domini de f no consisteix en els punts (x,y) que verifiquen les condicions $x>0$ i $y>0$.
- El conjunt imatge de f no conté el punt (-1,1).
- Existeix més d'una antiimatge per al punt (1,1).
- L'antiimatge del punt (2,1/2) no és (1,2).
- Les antiimatges de (9,1/3) no són tots els punts (x,y) que verifiquen que $y = 3x$.
- Una possible antiimatge de (-4,1/2) no és el punt (-4,1).
- La funció $f(x,y)$ no sempre pren valors diferents sobre punts (x,y) diferents. (és a dir, no injectiva)
- El valor (1,1) no és l'únic punt del conjunt imatge que té més d'una antiimatge.
- El punt $(-1/2, 2^{1/2})$ no pertany al conjunt imatge de f.
- El domini de f no és un conjunt compacte.
- El domini de f és un conjunt obert.
- El domini de f és un conjunt no fitat.
- El punt (1,1) és un punt interior del domini de f.

9.18. Donada la funció real de dues variables $z = f(x,y) = y + x^2 + 1$:

- El conjunt imatge de f és R.
- El punt (0,-1) és antiimatge de $z = 0$.
- La representació gràfica d'aquesta funció no és una paràbola a l'espai.
- Hi ha un nombre infinit de punts (x,y) sobre els quals la funció f pren el valor 0.
- Les corbes de nivell de f són conjunts tancats.
- Les corbes de nivell de f no són conjunts fitats.
- La funció f és una funció no fitada superiorment en el seu domini de definició**.**
- La funció f és una funció no fitada inferiorment en el seu domini de definició.
- Si v és un nombre real positiu, les antiimatges de v, $f^{-1}(v)$, no són sempre punts amb les dues coordenades positives.
- Existeix un conjunt de R^2 on la funció pren un valor màxim igual a 10.
- El conjunt de totes les antiimatges de $z = -1$ no és $\{ (x,y) \in \Re^2$ tals que $y = x^2 \}$.

9.19. Considerem l'equació $x^2 + y^2 - 2y = 0$ i la corba que defineix en el pla xy:

- És una cònica no degenerada.
- Quan representem en el pla els punts (x,y) que verifiquen aquesta equació obtenim una corba que talla a l'eix d'ordenades.
- Aquesta corba no és una hipèrbola d'eixos de simetria paral·lels als eixos coordenats.
- Aquesta corba no és una paràbola de vèrtex (0,0).
- Aquesta equació no defineix una circumferència centrada en el (0,0).
- L'origen de coordenades és un punt d'aquesta corba.
- No tenim una el·lipse amb semieixos de longitud $a = 1$ i $b = 2$.
- No és una circumferència de radi 2.
- El punt (1,-1) no és un punt de la corba.
- És una circumferència de radi 1 i centrada en el punt (0,1).

9.20. Donada la funció $z = f(x,y) = \sin(x) - \cos(y)$:

- És una funció real de dues variables reals.
- La funció f no sempre pren valors reals estrictament positius.

- La funció *f* és una funció fitada superiorment i inferior.
- El domini de la funció és el conjunt R^2.
- És una funció no exhaustiva.
- Aquesta funció no és igual a la funció $\sin(x)-(1-\sin^2(y))^{1/2}$, ja que és necessari tenir en compte el signe de $\cos(y)$.
- El conjunt imatge de *f* no és tot *R*.
- El valor màxim de la funció *f* és 2.
- El valor mínim de la funció *f* és -2.
- El punt $z=0$ és del conjunt imatge de *f*.
- La funció *f* no és una funció injectiva.
- La funció *f* no és una funció bijectiva.
- La representació gràfica de la funció *f* és una superfície de R^3.
- Una possible antiimatge de 0 no és el punt (0,0).
- Una possible antiimatge de π no és el punt (1,0).
- Una possible antiimatge de 1 és el punt $(0,\pi)$.
- Una possible antiimatge de -1 és el punt (0,0).
- Una possible antiimatge de -2 no és el punt $(3\pi/2, \pi)$.
- Una possible antiimatge de 2 no és el punt $(\pi,0)$.
- El conjunt imatge de *f* és un conjunt fitat de *R*.
- El conjunt imatge de *f* no és un conjunt obert de *R*.
- El conjunt imatge de *f* és un conjunt compacte de *R*.
- El límit de $f(x,y)$ quan (x,y) tendeix a (0,0) existeix i val -1.
- El límit de $f(x,y)$ quan la norma o mòdul de (x,y) tendeix a infinit no és infinit.
- No es compleix que $f(x,y) = f(-x,-y)$.

9.21. Donada la funció $f(x,y) = \left(\dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}, \dfrac{x y^2}{x^2+y^2}\right)$:

- La imatge de (4,4) mitjançant la funció *f* és (2,2).
- L'antiimatge de (2,0) no és (1,1).
- El domini de *f* no és el conjunt de punts (x,y) de R^2 amb *x* diferent de zero i *y* diferent de zero. Per exemple es pot calcular la imatge del punt (0,5) mitjançant *f* . L'única condició que hem de demanar als punts que formen part del domini és que simultàniament les dues components no siguin zero.
- El conjunt imatge de *f* conté el punt (-1,1).
- Existeix una única antiimatge pel punt (1,1).
- Una antiimatge de (0,-1) no és el punt (-2,2).
- Existeix al menys una antiimatge pel punt (-1,-1).
- Una antiimatge de (-1,1) és el punt (2,-2).
- El sistema d'equacions que hem de resoldre per trobar antiimatges de (1,1) és un sistema d'equacions no lineal.
- El sistema d'equacions que hem de resoldre per trobar antiimatges de (-1,-1) és un sistema d'equacions compatible determinat.
- El sistema d'equacions que hem de resoldre per trobar antiimatges de (1,-1) és un sistema d'equacions compatible determinat.
- El punt (0,0) pertany al conjunt imatge de *f*.
- El punt (0,0) és un punt amb més d'una antiimatge per *f*, és un punt amb infinites antiimatges.
- Per trobar l'antiimatge de (1,2) hem de resoldre un sistema d'equacions que resulta ser un sistema compatible determinat.

- Existeixen infinits punts del domini de f que tenen com a imatge el punt (0,0).
- El sistema d'equacions que hem de resoldre per trobar antiimatges de (u,v) és un sistema d'equacions que no sempre resulta ser compatible. La compatibilitat del sistema d'equacions que s'ha de resoldre depèn dels valors de u i de v. Per exemple, el sistema que obtenim quan fixem $u=0$ i $v\neq 0$ és un sistema incompatible.
- No és una funció bijectiva.
- Donada una parella de valors reals qualsevol (u,v) no sempre és possible trobar la seva antiimatge per la funció f.
- La representació gràfica de f no és una superfície a R^3.

9.22. Sigui A el conjunt de punts (x,y) del pla determinat per les condicions $1<x\leq 2$ i $y\leq 1$:
- El punt (3/2,2) és un punt exterior de A.
- El punt (2,0) no és un punt interior de A.
- A és un conjunt no tancat.
- A no és un conjunt compacte.
- El conjunt A no és un conjunt obert.
- A és un conjunt no fitat.
- El punt (1,1/2) és un punt frontera de A.
- El punt (2,-1) és un punt frontera de A.
- El punt (1,1) no és un punt exterior de A.
- El conjunt complementari de A no és un conjunt fitat.

9.23. Les següents afirmacions són certes:
- La funció definida per $(x,y) \rightarrow \left(\dfrac{x^3+y^3}{x^3-y^3}\right)^{1/3}$, no té per domini R^2-{(0,0)}.
- La funció $f(x,y)=\ln(e^{x+y})$ té com a conjunt imatge el conjunt dels nombres reals.
- La funció real $(x,y) \rightarrow \dfrac{x+y}{\ln(x-y)}$ no té per domini el conjunt $\{(x,y) \mid x>0 \text{ i } y>0\}$.
- La funció $f(x,y,z)=z(\sin(x+y))$ és una funció real de diverses variables.
- El domini de definició de $f(x,y)=(\ln(x^3-1), \ln(y^3-1), (x^3+y^3)^{-1})$ és el conjunt de punts (x,y) tals que $x>1$ i $y>1$.
- El límit de $\dfrac{\ln(x^2)}{\ln(y^2)}$ quan (x,y) tendeix a (0,0) no és 0.
- El límit de $\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}$ quan (x,y) tendeix a (0,0) no existeix.
- El domini de continuïtat de $f(x,y)=\ln((\sin y)^2)+(1/x)$ no és el conjunt de punts $\{(x,y)$ tals que $x\neq 0\}$.
- El domini de continuïtat de $f(x,y)=(xy)^{1/4}-\tan(xy)$ no és el conjunt $\{(x,y)$ tals que $xy>0\}$.
- El domini de continuïtat de $f(x,y,z)=(\sin x, \ln(y), 1/(z-3))$ no és el conjunt de R^3 donat com $[-1, 1]\times(0, +\infty)\times[3, +\infty)$.
- Una funció globalment bijectiva sempre és una funció localment bijectiva en qualsevol punt del seu domini de definició.
- Una funció que és localment bijectiva en tots els punts del seu domini no sempre és una funció globalment bijectiva.

10. OPTIMITZACIÓ DE FUNCIONS REALS DE VARIABLE REAL

Extrems relatius i extrems absoluts

Sigui $f: B \subset R \longrightarrow R$.

Un punt $a \in B$ dóna un màxim absolut de f en B si i només si $f(x) \le f(a)\ \forall x \in B$.

Un punt $a \in B$ dóna un màxim relatiu de f en B si i només si existeix un $r \in R,\ \ r > 0,$ tal que $f(x) \le f(a)\ \ \forall x \in B \cap (a-r, a+r)$.

Un punt $a \in B$ dóna un mínim absolut de f en B si i només si $f(x) \ge f(a)\ \forall x \in B$.

Un punt $a \in B$ dóna un mínim relatiu de f en B si i només si existeix un $r \in R,\ \ r > 0,$ tal que $f(x) \ge f(a)\ \ \forall x \in B \cap (a-r, a+r)$.

Caracterització dels extrems relatius per a funcions reals de variable real:

Sigui $f: B \subset R \longrightarrow R$, on B és un conjunt obert de R i la funció f és r vegades derivable en B. Sigui $a \in B$ i $K \le r$. Si $f'(a) = \ldots = f^{K-1}(a) = 0$ i $f^{(K)}(a) \ne 0$ aleshores:

1) f presenta un extrem relatiu en a si i només si K és un nombre parell.

2) Si f presenta un extrem relatiu en a aleshores tenim que:

Si $f^{(K)}(a) > 0$, f presenta un mínim relatiu en a.

Si $f^{(K)}(a) < 0$, f presenta un màxim relatiu en a.

Teorema sobre existència d'extrems absoluts: Tota funció contínua en un compacte presenta extrems absoluts

10.1. Estudieu els extrems relatius i absoluts de la funció $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ sobre el domini $D = [-11/10, 31/10]$.

Hem d'estudiar els extrems (absoluts i relatius) d'aquesta funció real de variable real.
Per trobar candidats a extrems relatius, igualem la derivada de f a zero. Aquesta tècnica és l'habitual per identificar possibles extrems (relatius) en el conjunt de punts que són interiors al conjunt.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2),$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ o bé } x - 2 = 0,$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ o bé } x = 2.$$

Possibles extrems relatius es troben en $x = 0$ i $x = 2$. Per decidir si, efectivament, ho són i de quin tipus, estudiarem el signe de la segona derivada en cadascun d'aquests punts:

$$f''(x) = 6x - 6.$$

En $x = 0$ la segona derivada val $f''(0) = -6 < 0$. En $x = 0$ la funció assoleix un extrem relatiu, que, en particular, és un màxim relatiu i val $f(0) = 5$.

En $x = 2$ la segona derivada val $f''(2) = 6 \cdot 2 - 6 = 12 - 6 = 6 > 0$. En $x = 2$ la funció assoleix un extrem relatiu, que, en particular, és un mínim relatiu i val $f(2) = 1$.

Resolució alternativa: fem l'estudi del signe de f', és a dir, dels intervals de creixement (amb $f'>0$) i decreixement (amb $f'<0$) de la funció. Pel teorema de Bolzano, entre dos zeros d'una funció contínua (en aquest cas, de f') el signe es manté constant. Només caldrà, doncs, avaluar la derivada en punts intermitjos dels intervals determinats pels zeros de f',[1] és a dir, en els intervals $\left[-11/10,0\right), (0,2)$ i $\left(2,31/10\right]$:

	$\left[-11/10,0\right)$	$(0,2)$	$\left(2,31/10\right]$
$f'(x)=3x^2-6x$	$+$	$-$	$+$

Observem que f és creixent en els intervals $\left[-11/10,0\right)$ i $\left(2,31/10\right]$, i decreixent en $(0,2)$. Per tant, això també ens permet concloure que en $x=0$ la funció presenta un màxim relatiu i en $x=2$ un mínim relatiu.

Els candidats a extrems absoluts són els extrems relatius que hem trobat abans (dins l'obert del domini, perquè caracteritzem els punts interiors) i els punts frontera del domini (ja que aquests punts no són punts interiors). Hem de comparar els valors de la funció f en aquests candidats:

$$f(0)=5,$$

$$f(2)=1,$$

que ja havíem calculat, i:

$$f(-11/10)=\left(\frac{-11}{10}\right)^3-3\left(\frac{-11}{10}\right)^2+5=0{,}039<1,$$

$$f(31/10)=\left(\frac{31}{10}\right)^3-3\left(\frac{31}{10}\right)^2+5=5{,}961>5.$$

El màxim absolut de la funció f s'assoleix en el punt 31/10 i val 5,961.

El mínim absolut de la funció f s'assoleix en el punt –11/10 i val 0,039.

Mirem també si f presenta punts d'inflexió. Per caracteritzar-los, fem zero la segona derivada:

$$f''(x)=6x-6=0 \Leftrightarrow x=1.$$

En $x=1$ hi ha un possible punt d'inflexió. Comprovem que la tercera derivada en aquest punt és diferent de zero:

$$f'''(x)=6\neq 0,$$

i, en particular:

$$f'''(1)=6\neq 0.$$

Així doncs, en $x=1$ la funció presenta un punt d'inflexió.

10.2. D'una cartolina de dimensions 4 cm x 9 cm, tallem petits quadrats idèntics a cada cantonada i la cartolina sobrant es doblega per formar una caixa sense tapa. Trobeu les dimensions de la caixa que proporcionen el major volum. Quin és el valor del volum màxim?.

Quan dobleguem la cartolina, havent ja tallat els petits quadrats a cada cantonada d'aquesta, obtenim una caixa de dimensions x (alçada), $9-2x$ (llargada) i $4-2x$ (amplada). El volum de la caixa és el producte d'aquestes tres dimensions i, per tant, el podem expressar com una funció d'una variable:

$$V=V(x)=x(9-2x)(4-2x),$$

$$V=V(x)=4x^3-26x^2+36x.$$

[1] En el tema 2 (Nombres racionals i reals) vam veure com funcionaven aquestes taules de signes.

Donat que x, $9-2x$ i $4-2x$ representen longituds, han de ser positives:

$$x \geq 0,$$
$$9-2x \geq 0 \Leftrightarrow 9/2 \geq x,$$
$$4-2x \geq 0 \Leftrightarrow 2 \geq x.$$

Perquè el problema tingui sentit, la x haurà de verificar les tres inequacions. Per tant $0 \leq x \leq 2$.

Hem de maximitzar la funció $V(x)$ en el domini $[0,2]$. De fet, els extrems del domini serien casos degenerats, ja que no obtindríem una caixa.

Per trobar els candidats igualem a zero la derivada de la funció volum:

$$V' = V'(x) = 12x^2 - 52x + 36 = 0,$$
$$V' = V'(x) = 4(3x^2 - 13x + 9) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 13x + 9 = 0,$$
$$x = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 3 \cdot 9}}{2 \cdot 3} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 108}}{6} = \frac{13 \pm \sqrt{61}}{6}.$$

$V'(x) = 0$ quan $x = \frac{13+\sqrt{61}}{6}$ i quan $x = \frac{13-\sqrt{61}}{6}$. Però podem descartar $x = \frac{13+\sqrt{61}}{6}$ ja que és més gran que 2 i, per tant, no es troba en el domini de la funció V.

Comprovem que, efectivament, quan $x = \frac{13-\sqrt{61}}{6}$ el volum és màxim. Els candidats a màxim absolut són $x = 0$, $x = \frac{13-\sqrt{61}}{6} \approx 0{,}9$ i $x = 2$. Comparem els valors de la funció V en aquests punts:

$$V(0) = 0 \text{ cm}^3,$$
$$V(0{,}9) = 14{,}256 \text{ cm}^3,$$
$$V(2) = 0 \text{ cm}^3.$$

En conclusió, quan $x = \frac{13-\sqrt{61}}{6} \cong 0{,}9$ cm les dimensions de la caixa de volum més gran seran: 0,9 cm (alçada), 2,2 cm (amplada) i 7,2 cm (llargada), i el volum corresponent serà de 14,256 cm^3.

10.3. Un fabricant de caixes de cartró té una demanda de caixes de base quadrada. El volum de la caixa ha de ser de 32 m^3 . Trobeu les dimensions de la caixa que minimitzen la quantitat de material necessari per a la seva realització:

a) sense tapa,

b) amb tapa.

a) Al costat del quadrat de la base li diem x. Si l'altura de la caixa és h i sabem que el volum és de 32 m^3, és a dir:

$$V = x \cdot x \cdot h = x^2 \cdot h = 32,$$

llavors podem posar l'altura en funció de x: $h = 32/x^2$.

La quantitat de material necessari per a la realització de la caixa ve donada per l'àrea de la superfície de la caixa, que és la suma de les àrees de les superfícies que representen les seves cares:

- la base: x^2,

- quatre vegades l'àrea d'una cara, que és $x \cdot \left(\frac{32}{x^2} \right)$:

$4 \cdot x \cdot (32/x^2) = 4 \cdot 32/x = 128/x$.

La quantitat de material ve expressada per la funció:

$$S = S(x) = x^2 + 128/x,$$

que haurem de minimitzar.

Aleshores igualem la seva derivada a zero:

$$S' = S'(x) = 2x - 128/x^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^3 - 128}{x^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 - 128 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 64 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \text{ m}.$$

Si el costat del quadrat de la base és 4 l'altura corresponent val $h = 32/x^2 = 32/16 = 2\,\text{m}$.

Finalment, les dimensions de la caixa que minimitzen la quantitat de material necessari són $4\,\text{m} \times 4\,\text{m} \times 2\,\text{m}$.

Podem garantir que en 4 apareix el mínim absolut, ja que entre 0 i 4, la funció *S*' és negativa (*S* és decreixent) i a partir de 4, la funció *S*' és positiva (*S* és decreixent).

b) Al costat del quadrat de la base li diem *x*. Si l'altura de la caixa és *h* i sabem que el volum és de 32 m^3, és a dir:

$$V = x \cdot x \cdot h = x^2 \cdot h = 32,$$

llavors podem posar l'altura en funció de *x*: $h = 32/x^2$.

La quantitat de material necessari per a la realització de la caixa ve donada per l'àrea de la superfície de la caixa, és a dir, per la suma de les àrees de les superfícies que representen les seves cares:

- la base: x^2,
- la tapa: x^2,
- les quatre cares laterals: $4 \cdot x \cdot (32/x^2) = 4 \cdot 32/x = 128/x$.

La quantitat de material ve expressada per la funció:

$$S = S(x) = 2x^2 + 128/x,$$

que haurem de minimitzar.

Aleshores igualem la seva derivada a zero:

$$S' = S'(x) = 4x - 128/x^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{4x^3 - 128}{x^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^3 - 128 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 32 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{32} \text{ m}.$$

Si el costat del quadrat de la base és $\sqrt[3]{32}$ l'altura corresponent val $h = 32/x^2 = \frac{32}{\left(\sqrt[3]{32}\right)^2} = \sqrt[3]{32}\,\text{m} \approx 3{,}175\,\text{m}$.

Finalment, les dimensions de la caixa que minimitzen la quantitat de material necessari són $\sqrt[3]{32}\,\text{m} \times \sqrt[3]{32}\,\text{m} \times \sqrt[3]{32}\,\text{m}$. És a dir, en aquest cas la caixa serà un cub.

La justificació de que s'ha trobat un mínim absolut és anàloga a la de l'apartat a).

10.4. Un fanal ha de ser instal·lat exactament sobre el centre d'una plaça circular de radi *r*. A quina altura *h* ha d'estar situat perquè la il·luminació *I* en la vora de la plaça sigui òptima?. Considerem que la il·luminació és directament proporcional al cosinus de l'angle d'incidència α del raig lluminós i inversament proporcional al quadrat de la distància *d* des de la posició de la llum fins al terra.

<u>Indicació</u>: Si $I(\alpha) = k \cos \alpha / d^2$, amb k constant i $0 < \alpha < \pi/2$, aleshores utilitzant relacions trigonomètriques obtenim les relacions $d = r / \text{sen}\, \alpha$, $h = d \cos \alpha$ i $\text{tg}\, \alpha = r / h$.

Substituïm $d = r/\text{sen}\,\alpha$ en l'expressió de la il·luminació I :

$$I(\alpha) = \frac{k\cos\alpha}{d^2} = \frac{k\cos\alpha}{(r/\text{sen}\,\alpha)^2} = \frac{k\cos\alpha\,\text{sen}^2\,\alpha}{r^2} = \frac{k}{r^2}\cos\alpha\,\text{sen}^2\,\alpha\,,$$

i obtenim una funció de α només (k i r són constants donades). Per optimitzar-la igualem a zero la seva derivada:

$$I'(\alpha) = \frac{k}{r^2}(-\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}^2\,\alpha + 2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha\cos\alpha) = \frac{k}{r^2}\text{sen}\,\alpha\,(-\text{sen}^2\,\alpha + 2\cos^2\alpha) =$$

$$= \frac{k}{r^2}\text{sen}\,\alpha\left[(-\text{sen}^2\,\alpha + 2(1-\text{sen}^2\,\alpha)\right] = \frac{k}{r^2}\text{sen}\,\alpha\,(-3\text{sen}^2\,\alpha + 2)\,,$$

$$I'(\alpha) = 0 \underset{(1)}{\Rightarrow} -3\text{sen}^2\,\alpha + 2 = 0 \Rightarrow \text{sen}^2\,\alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \text{arcsen}\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0{,}9553\,\text{rads} = 54{,}7356^{\text{o}}.$$

(1) La solució $\text{sen}\,\alpha = 0$ queda descartada, doncs α ha d'estar entre 0 i $\pi/2$ estrictament, sinó l'expressió de la distància d no té sentit.

Calculem la segona derivada en el punt $\text{arcsen}\sqrt{\frac{2}{3}}$ per comprovar que aquí la funció I presenta un màxim relatiu:

$$I''(\alpha) = \frac{k}{r^2}\left[\cos\alpha(-3sen^2\alpha + 2) + sen\alpha(-6sen\alpha\cos\alpha)\right] = \frac{k}{r^2}(-9sen^2\alpha\cos\alpha + 2\cos\alpha) =$$

$$= -\frac{k}{r^2}\cos\alpha(9sen^2\alpha + 2),$$

Per tant

$$I''\left(arcsen\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -3.9996\frac{k}{r^2} < 0.$$

Anem a veure que, efectivament, és el màxim absolut. La funció $\frac{k}{r^2}\cos\alpha\,\text{sen}^2\,\alpha$, amb $0 \le \alpha \le \pi/2$, té el màxim absolut en $\text{arcsen}\sqrt{\frac{2}{3}}$ ja que en els extrems 0 i $\pi/2$ val 0 i en el punt $\text{arcsen}\sqrt{\frac{2}{3}}$ val $0{,}3849\frac{k}{r^2}$, que és estrictament positiu.

Ara ja podem calcular l'altura h que optimitzarà el problema:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{r}{h} \Rightarrow h = \frac{r}{\text{tg}\,\alpha}\,,$$

$$h_{\text{opt}} = \frac{r}{tg\left(arcsen\sqrt{\frac{2}{3}}\right)} \cong \frac{r}{1{,}4142} \cong 0{,}7071\,r.$$

L'altura a la qual s'ha de situar el llum per tenir màxima il·luminació a la vora de la plaça depèn doncs, de les seves dimensions, i és igual a $h_{\text{opt}} \cong 0{,}7071\,r$.

10.6. Els costos de producció d'un article depenen del nombre d'objectes fabricats segons la funció $f(x)$, on x és el nombre d'articles, $f(x) = 110 + 100x - x^2/2$ ($f(x)$ dóna aleshores el cost de producció de x articles). El preu de venda de cada article depèn del nombre d'objectes venuts segons la funció $p(x) = 125 - x$, on x és el nombre d'objectes venuts i $p(x)$ és el preu de venda d'un objecte. Quin és el preu que s'ha de fixar per la venda d'un article per maximitzar els guanys?

Podem escriure el benefici com una funció de x, nombre d'articles, on $x > 0$:
Guanys = Ingressos – Costos.

$$G(x) = xp(x) - f(x) = x(125 - x) - (110 + 100x - x^2/2) =$$

$$= 125x - x^2 - 110 - 100x + \frac{x^2}{2} = -\frac{1}{2}x^2 + 25x - 110.$$

El domini de validesa d'aquesta funció guanys és la intersecció dels dominis que podem establir per a les dues funcions implicades, ingressos i costos, o $xp(x)$ i $f(x)$. La funció ingressos no té sentit per a $x > 125$. Per a la funció costos hem de considerar el conjunt de valors x per als quals s'accepta que $f(x)$ explica bé la relació entre la producció i el seu cost. En no indicar res de forma explícita, suposem que aquesta expressió és vàlida per a $x \in [0,125]$. (Es pot veure que la funció, és positiva en l'esmentat interval).
Per maximitzar els guanys igualarem a zero la primera derivada:

$$G'(x) = -x + 25,$$

$$G'(x) = 0 \Rightarrow x = 25.$$

Per decidir si en $x = 25$ tenim efectivament un màxim avaluem la segona derivada en aquest punt:

$$G''(x) = -1,$$

$$G''(25) = -1 < 0.$$

Podem afirmar que en $x = 25$ la funció guanys assoleix un màxim. A més a més, la derivada sempre és positiva per a x tals que $x < 25$ (la funció G és creixent) i la derivada sempre és negativa per a x tals que $x > 25$ (la funció G és decreixent). Per tant, aquest màxim és absolut.
Finalment, si $x = 25$ és el nombre d'articles venuts, el preu de venda d'un article ha de ser de $p(25) = 125 - 25 = 100$ pts per maximitzar els beneficis.

Observació: Tenint en compte que podem escriure $x = 125 - p$, també podem resoldre el problema estudiant el benefici com una funció del preu p.

11. OPTIMITZACIÓ DE FUNCIONS DE DIVERSES VARIABLES

Extrems relatius i extrems absoluts

Sigui $f: B \subset R^n \longrightarrow R$.

Un punt $a \in B$ dóna un màxim absolut de f en B si i només si $f(x) \leq f(a) \;\; \forall x \in B$.

Un punt $a \in B$ dóna un màxim relatiu de f en B si i només si existeix un $r \in R$, $r > 0$, tal que $f(x) \leq f(a) \;\; \forall x \in B \cap B_r(a)$, on

$$B_r(a) = \text{Bola de centre } a \text{ i radi } r = \left\{x \in R^n \text{ tal que } d(x,a) = |x-a| < r\right\}.$$

Un punt $a \in B$ dóna un mínim absolut de f en B si i només si $f(x) \geq f(a) \;\; \forall x \in B$.

Un punt $a \in B$ dóna un mínim relatiu de f en B si i només si existeix un $r \in R$, $r > 0$, tal que $f(x) \geq f(a) \;\; \forall x \in B \cap B_r(a)$.

Condicions necessàries per a extrem relatius en funcions reals de diverses variables

Sigui $\begin{array}{c} f: A \subset R^n \longrightarrow R \\ x = (x_1, \ldots, x_n) \longrightarrow f(x) \end{array}$ **on A és un conjunt obert de R^n. Si f presenta un extrem relatiu en $a \in A$ i f és derivable en a (és a dir, si existeixen totes les derivades parcials), aleshores es verifica** $\dfrac{\partial f(a)}{\partial x_1} = 0, \ldots, \dfrac{\partial f(a)}{\partial x_n} = 0$.

Caracterització d'extrems relatius per a funcions reals de diverses variables:

Considerem la següent seqüència de menors principals de $Hf(a)$ (matriu hessiana de f en a):

$$D_1 = a_{11}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Aleshores:

. $D_1 > 0, D_2 > 0, \ldots, D_n > 0$, en a hi ha un mínim relatiu.

. $D_1 < 0, D_2 > 0, D_3 < 0, D_4 > 0, \ldots, (-1)^n D_n > 0$, en a hi ha un màxim relatiu.

. $D_1 \geq 0, D_2 \geq 0, \ldots, D_n \geq 0$, no es pot afirmar res.

. $D_1 \leq 0, D_2 \geq 0, D_3 \leq 0, D_4 \geq 0, \ldots, (-1)^n D_n \geq 0$, no es pot afirmar res.

. Cap dels anteriors, en a no hi ha extrem.

Teorema de Weierstrass: Tota funció contínua en un compacte té màxims i mínims absoluts.

El mètode de Lagrange és un mètode que permet obtenir extrems condicionats.

11.1. Trobeu els valors màxim i mínim de la funció $f(x,y) = x^2 + y^2 - x + 1$ en el disc D definit per $x^2 + y^2 \leq 1$.

El disc D és un conjunt compacte, ja que és fitat i tancat. I com que la funció *f* és contínua sobre aquest disc, sabem que *f* assoleix un màxim i un mínim absoluts sobre aquest conjunt (teorema de Weierstrass).

Candidats a donar extrem relatiu són els punts en què les dues derivades parcials de la funció $f(x,y)$ s'anul·len:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1/2,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y = 0 \Leftrightarrow y = 0.$$

Hem trobat un possible extrem relatiu, el punt (1/2,0). Per saber si efectivament és un extrem relatiu i, en cas afirmatiu, de quin tipus, estudiem el signe de la matriu hessiana en el punt (1/2,0):

$$Hf(1/2,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}_{|(1/2,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La hessiana de *f* en el punt (1/2,0) compleix que:

$$D_1 = 2 > 0,$$
$$D_2 = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 > 0,$$

la qual cosa implica que en aquest punt la funció *f* assoleix un mínim relatiu.
Hem d'estudiar altres possibles extrems de la funció *f* sobre la frontera del disc D. Aquests punts frontera no són punts interiors i requereixen un estudi independent. És a dir, estudiarem la funció $f(x,y)$ sobre els punts de la circumferència d'equació $x^2 + y^2 = 1$. Aquesta equació representa una restricció per a les variables *x* i *y*. Se'n diu, per tant, un problema d'extrems lligats. Si $x^2 + y^2 = 1$ (restricció imposada), aleshores $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$, expressió que només té sentit si $x^2 < 1$, o sigui, si $x \in [-1,1]$. En l'expressió $f(x,y) = x^2 + y^2 - x + 1$ podem substituir $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$, per obtenir així l'expressió de *f* com una funció de només *x*:

$$1 - x + 1 = -x + 2 = F(x).$$

La gràfica de la funció *F* és una recta amb pendent –1 que, sobre el seu domini de definició, l'interval $[-1,1]$, assoleix el màxim en $x = -1$ i el mínim en $x = 1$.

Quan $x = -1$, aleshores: $y^2 = 1 - x^2 = 1 - 1 = 0 \Rightarrow y = 0.$

Quan $x = 1$, aleshores: $y^2 = 1 - x^2 = 1 - 1 = 0 \Rightarrow y = 0.$

Per tant, els candidats a extrems absoluts són els punts (-1,0), (1,0) i (1/2,0). Hem de comparar els valors de la funció *f* en aquests punts:

$$f(-1,0) = 3,$$
$$f(1,0) = 1,$$
$$f(1/2,0) = 3/4.$$

La funció *f* assoleix el màxim absolut en el punt (-1,0) i val 3.
La funció *f* assoleix el mínim absolut en el punt (1/2,0) i val 3/4.

11.2. Trobeu els extrems de la funció $g(x,y) = x^2 + xy - 3y + 1$ sobre el conjunt A on A = $\{(x,y) \in R^2$ tals que $x \geq 0, y \geq 0, y = 2x\}$.

El conjunt A és la semirecta $y = 2x$ amb extrem el punt (0,0).
Considerant només les *x* positives i substituint $y = 2x$ (que és la restricció o lligadura entre les dues variables) en l'expressió $g(x,y)$ obtenim una funció que només depèn de *x*:

$$x^2 + xy - 3y + 1 \underset{y=2x}{=} x^2 + x \cdot 2x - 3 \cdot 2x + 1 = x^2 + 2x^2 - 6x + 1 = 3x^2 - 6x + 1 = G(x).$$

Aquesta funció *G* representa una paràbola i hem de tenir en compte que el domini de definició és el conjunt dels reals positius. *G* no està fitada superiorment sobre el conjunt A i, en conseqüència, la funció *g* tampoc.

Estudiem els candidats a extrem relatiu de la funció *G*:

$$G'(x) = 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1,$$

i, per tant, $y = 2 \cdot 1 = 2$. Aquesta paràbola és oberta cap a dalt (el coeficient del terme x^2 és positiu) i el seu vèrtex és, precisament, el punt (1,2). Podem concloure que la funció assoleix un mínim absolut en el punt (1,2) que val $g(1,2) = 1^2 + 1 \cdot 2 - 3 \cdot 2 + 1 = -2$.

11.3. Estudieu els valors màxim i mínim de la funció $f(x, y) = xy$ sotmesa a la restricció o lligadura $x + y = 2$.

Aquest problema de dues variables, *x*, *y*, pot transformar-se'n en un d'una variable. Aïllem *y* de la restricció, $y = 2 - x$, i substituïm en la funció *f*:

$$f(x, 2 - x) = x(2 - x) = 2x - x^2 = h(x).$$

Derivem, doncs, la funció *h* i igualem a zero:

$$h'(x) = 2 - 2x,$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Si $x = 1$, llavors $y = 1$.

En $x = 1$ la funció *h* té un possible extrem relatiu i, conseqüentment, (1,1) és un candidat a extrem relatiu de la funció *f*. Avaluem la segona derivada de *h* quan $x = 1$ per saber si és un màxim, un mínim o no és extrem:

$$h''(x) = -2,$$

$$h''(1) = -2 < 0.$$

Això vol dir que en $x = 1$ la funció assoleix un màxim relatiu. Per decidir si és absolut estudiem el signe de $h'(x)$ a l'esquerra i la dreta de $x = 1$, és dir, volem saber com és el creixement d'aquesta funció a ambdós costats de $x = 1$:

- Quan $x < 1$ aleshores $h'(x) > 0$. Per tant, a l'esquerra de $x = 1$ la funció *h* és creixent.
- Quan $x > 1$ aleshores $h'(x) < 0$. Per tant, a la dreta de $x = 1$ la funció *h* és decreixent.

Per tant, podem concloure que en el punt (1,1) la funció *f* assoleix un màxim absolut. No existeix mínim absolut doncs la funció *h*(*x*) no està fitada inferiorment; quan *x* pren valors grans, *h*(*x*) pren valors negatius molt petits, dit d'una altra forma: $\lim_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$.

11.4. Calculeu i classifiqueu els extrems de la funció $f(x, y) = xy$ sotmesa a la restricció $x^2 + y^2 = 8$, utilitzant el mètode de Lagrange.

Com que tenim una sola restricció només necessitem un multiplicador de Lagrange, λ. Sigui $g(x, y) = x^2 + y^2 - 8$ la funció associada a la restricció. Construïm la funció de Lagrange φ:

$$\varphi(x, y, \lambda) = xy - \lambda(x^2 + y^2 - 8).$$

(També es pot construir la funció φ considerant un signe positiu davant del multiplicador λ).

Els candidats a extrem han de verificar el següent sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = y - 2\lambda x = 0, \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = x - 2\lambda y = 0, \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 8 = 0. \end{cases}$$

De les dues primeres equacions deduïm que $2\lambda = \dfrac{y}{x} = \dfrac{x}{y}$ i, per tant, $x^2 = y^2$ o, equivalentment, $y = \pm x$. Observem que ni x ni y no poden ser zero. Si $x = 0$ (o $y = 0$), de la primera equació obtenim $y = 0$ (o $x = 0$), però això és incompatible amb la tercera equació.
Substituint en la restricció obtenim:

$$x^2 + x^2 = 8 \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2.$$

Aleshores, $y = \pm 2$. Si x, y tenen el mateix signe, $\lambda = \dfrac{1}{2}$. Si x, y tenen signes diferents, $\lambda = -\dfrac{1}{2}$.
I els candidats a extrems relatius són els punts (2,2,1/2), (2,-2,-1/2), (-2,2,-1/2) i (-2,-2,1/2).
Com que la funció f és contínua sobre la circumferència $x^2 + y^2 = 8$, que és un conjunt compacte, f assoleix un màxim i un mínim absoluts sobre aquesta circumferència. Per tant, entre els quatre punts candidats trobarem els extrems absoluts. Comparem els valors de la funció f en aquests punts:

$$f(2,2) = f(-2,-2) = 4,$$
$$f(2,-2) = f(-2,2) = -4.$$

Podem afirmar que en els punts (2,2) i (-2,-2) la funció f assoleix el seu valor màxim (que val 4) i que en els punts (2,-2) i (-2,2) assoleix el seu valor mínim (que val –4). Hi ha, doncs, dos punts màxims absoluts i dos punts mínims absoluts.

11.5. Tenim la funció de producció $z = f(x,y) = 100\ln(1 + 2x + 4y + 8xy)$ on x i y són dos factors variables, i z representa la quantitat de producte final. Considerem com domini de $f(x, y)$ la regió del pla $[0,100]\text{x}[0,120]$. Calculeu el mínim cost per a una producció de 1.000 unitats i essent p_x = 45 pts el preu per unitat del factor x i p_y = 20 pts el preu per unitat del factor y. Quina seria la combinació de factors que donaria el mínim cost? (Es considera que el cost és funció només dels preus dels factors utilitzats).

La funció cost ve donada per l'expressió $C(x,y) = p_x x + p_y y = 45x + 20y$, on $(x,y) \in [0,100] \times [0,120]$. Donat que aquest domini és un conjunt compacte, el teorema de Weierstrass ens assegura l'existència de màxim i mínim absoluts.
Volem una producció de 1.000 unitats, per tant tenim la següent restricció:

$$1.000 = 100\ln(1 + 2x + 4y + 8xy).$$

Haurem de trobar una solució, ja que f és una funció contínua sobre $[0,100]\text{x}[0,120]$, que és un domini tancat i fitat (compacte) i, per tant, f assolirà un màxim i un mínim absoluts sobre aquest conjunt.
Hi ha dues formes possibles de resoldre aquest problema:

1. Utilitzant els multiplicadors de Lagrange.
2. Directament, utilitzant la substitució per reduir la funció cost a una funció d'una variable.

1. Utilitzant els multiplicadors de Lagrange:
Construïm la funció auxiliar:

$$\varphi(x,y,\lambda)=45x+20y+\lambda\left[1.000-100\ln(1+2x+4y+8xy)\right].$$

Els possibles extrems relatius han de ser solució del sistema:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=0\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\lambda}=0\end{cases}.$$

Per tant:

$$\begin{cases}45-100\lambda\dfrac{2+8y}{1+2x+4y+8xy}=0,\\ 20-100\lambda\dfrac{4+8x}{1+2x+4y+8xy}=0,\\ 1.000=100\ln(1+2x+4y+8xy).\end{cases}$$

Les solucions del sistema són candidats a ser extrems relatius lligats (sobre l'obert de derivabilitat $(0,100)\times(0,120)$). Després haurem d'estudiar la frontera junt amb la condició de lligadura.
Anem, doncs, a resoldre el sistema:

$$45=100\lambda\frac{2+8y}{1+2x+4y+8xy},$$

$$20=100\lambda\frac{4+8x}{1+2x+4y+8xy}.$$

Dividim la primera equació entre la segona:

$$\frac{45}{20}=\frac{100\lambda\dfrac{2+8y}{1+2x+4y+8xy}}{100\lambda\dfrac{4+8x}{1+2x+4y+8xy}}\Rightarrow\frac{9}{4}=\frac{2+8y}{4+8x}\Rightarrow\frac{9}{4}=\frac{1+4y}{2+4x}\Rightarrow\frac{9(2+4x)}{4}=(1+4y)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9(1+2x)=2(1+4y)\Rightarrow 9+18x=2+8y\Rightarrow y=\frac{7+18x}{8}.$$

Substituïm en la tercera equació:

$$1.000=100\ln(1+2x+4y+8xy),$$

$$10=\ln(1+2x+4y+8xy),$$

$$10=\ln\left(1+2x+4\frac{7+18x}{8}+8x\frac{7+18x}{8}\right),$$

$$10=\ln\left(1+2x+\frac{7+18x}{2}+x(7+18x)\right),$$

$$10=\ln(1+2x+7/2+9x+7x+18x^2),$$

$$10=\ln(9/2+18x+18x^2).$$

Apliquem l'exponencial a ambdós costats de la igualtat i obtenim la següent equació de segon grau:

$$e^{10} = 9/2 + 18x + 18x^2,$$

$$18x^2 + 18x + 9/2 - e^{10} = 0,$$

que resolem:

$$x = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot 18 \cdot (9/2 - e^{10})}}{2 \cdot 18} \cong \frac{-18 \pm \sqrt{324 - 72(4{,}5 - 22026{,}5)}}{36} \cong$$

$$\cong \frac{-18 \pm \sqrt{324 + 1585584}}{36} \cong \frac{-18 \pm 1259{,}33}{36} \cong \begin{cases} x_1 \cong 34{,}48, \\ x_2 \cong -35{,}48 < 0 \end{cases}$$

on la solució negativa no és valida per al nostre problema.
Aleshores podem calcular la y corresponent:

$$y = \frac{7 + 18x}{8} \cong \frac{7 + 18 \cdot 34{,}48}{8} \approx 78{,}46,$$

i en el punt (34,48, 78,46) la funció cost presenta un possible extrem relatiu.
Per trobar els extrems absoluts hem de veure on intersecta la lligadura amb la frontera:

1. Amb $x = 0$:

$$10 = \ln(1 + 4y) \Rightarrow e^{10} = 1 + 4y \Rightarrow y = \frac{e^{10} - 1}{4} = 5506{,}37 > 120,$$

no interessa, doncs no pertany al domini.

2. Amb $x = 100$:

$$10 = \ln(1 + 200 + 4y + 800y) \Rightarrow e^{10} = 201 + 804y \Rightarrow y = \frac{e^{10} - 201}{804} = 27{,}15 < 120,$$

i, per tant, aquí sí tenim un possible extrem absolut.

3. Amb $y = 0$:

$$10 = \ln(1 + 2x) \Rightarrow x = \frac{e^{10} - 1}{2} = 11012{,}75 > 100,$$

no interessa, doncs no pertany al domini.

4. Amb $y = 120$:

$$10 = \ln(1 + 2x + 480 + 960x) \Rightarrow x = \frac{e^{10} - 481}{962} \approx 22{,}4 < 100,$$

i, per tant, aquí sí tenim un possible extrem absolut.

Comparem la funció cost en els punts (34,48, 78,46), (100, 27,15) i (22,4, 120):

$$C(34{,}48, 78{,}46) \cong 3120{,}8,$$

$$C(100, 27{,}15) \cong 5043,$$

$$C(22{,}4, 120) \cong 3408.$$

Així doncs, en el punt (34,48, 78,46) la funció cost assoleix un mínim absolut i en el punt (100, 27,15) un màxim absolut.

2. Directament:
Aïllant una variable de la restricció i, substituint en la funció que es vol optimitzar, transformar-la en funció amb una variable menys.
Transformem la restricció:

$$1.000 = 100 \ln(1 + 2x + 4y + 8xy),$$

$$10 = \ln(1 + 2x + 4y + 8xy),$$

$$e^{10} = 1 + 2x + 4y + 8xy,$$

i la considerem en l'obert $(0,100)\times(0,120)$.

Posem la y en funció de x i d'aquesta forma convertim la funció cost en una funció d'una única variable, x:

$$e^{10}-1-2x=(4+8x)y,$$

$$y=y(x)=\frac{e^{10}-1-2x}{4+8x}.$$

Hem d'anar alerta amb el domini i la imatge de la funció $y(x)$. Pels punts candidats que obtindrem, quan la x pertanyi a l'interval obert (0,100) la y haurà de pertànyer a l'interval (0,120). Sinó, no ens interessa.

$$C(x,y)=C(x,y(x))=C(x)=45x+20\cdot\frac{e^{10}-1-2x}{4+8x},$$

$$C(x)=45x+5\cdot\frac{e^{10}-1-2x}{1+2x}=45x+\frac{5e^{10}-5-10x}{1+2x}.$$

Candidats a extrem relatiu són els punts de l'obert de derivabilitat (0,100) on la primera derivada s'anul·la:

$$C'(x)=45+\frac{(-10)(1+2x)-(5e^{10}-5-10x)(2)}{(1+2x)^2},$$

$$C'(x)=45+\frac{-10-20x-10e^{10}+10+20x}{(1+2x)^2},$$

$$C'(x)=45-\frac{10e^{10}}{(1+2x)^2},$$

$$C'(x)=\frac{45(1+2x)^2-10e^{10}}{(1+2x)^2},$$

$$C'(x)=0\Rightarrow 45(1+2x)^2-10e^{10}=0,$$

$$9(1+2x)^2-2e^{10}=0,$$

$$(1+2x)^2=\frac{2e^{10}}{9}\Rightarrow 1+2x=\pm\sqrt{\frac{2e^{10}}{9}},$$

però, com que la $x\geq 0$, només considerem el signe positiu, és a dir, podem descartar el signe negatiu.

$$2x=+\sqrt{\frac{2e^{10}}{9}}-1,$$

$$x=\frac{1}{2}\left(+\sqrt{\frac{2e^{10}}{9}}-1\right)\cong\frac{1}{2}(69{,}96-1)=34{,}48.$$

Aleshores, podem calcular la y corresponent:

$$y=y(34{,}48)\cong\frac{e^{10}-1-2\cdot 34{,}48}{4+8\cdot 34{,}48}\cong 78{,}46\in(0,120).$$

Per saber si la funció $C(x)$ assoleix un extrem i de quin tipus en el punt $x=34{,}48$ estudiem el signe de la segona derivada en aquest punt:

$$C''(x)=\frac{45\cdot 2\cdot 2(1+2x)(1+2x)^2-2\cdot 2(1+2x)\left[45(1+2x)^2-10e^{10}\right]}{(1+2x)^4},$$

$$C''(x)=\frac{180(1+2x)^3-180(1+2x)^3+40e^{10}(1+2x)}{(1+2x)^4},$$

$$C''(x)=\frac{40e^{10}(1+2x)}{(1+2x)^4}=\frac{40e^{10}}{(1+2x)^3},$$

$$C''(34{,}48)=\frac{40e^{10}}{(1+2\cdot 34{,}48)^3}=\ldots\cong 2{,}573>0.$$

Per tant, en el punt $x=34{,}48$ la funció $C(x)$ assoleix un mínim relatiu i val:

$$C(34{,}48,\,78{,}46)=45\cdot 34{,}48+20\cdot 78{,}46\cong 1551{,}6+1569{,}2=3120{,}8.$$

Estudiem els extrems de l'interval $\left[0{,}100\right]$:

- Quan $x=0\Rightarrow y=\dfrac{e^{10}-1}{4}=5506{,}375\notin\left[0{,}120\right]$ i, aleshores, no ens interessa.
- Quan $x=100\Rightarrow y=\dfrac{e^{10}-1-200}{4+800}=27{,}15\in\left[0{,}120\right]$ i la funció cost val $C(100,\,27{,}15)=45\cdot 100+20\cdot 27{,}15=5043$.

Comparem el valor obtingut amb el valor de la funció en el punt (34,48, 78,46).
Finalment, en el punt (34,48, 78,46) la funció cost assoleix un mínim absolut (que val 3120,8) i en el punt (100, 27,15) la funció cost presenta un màxim absolut (que val 5043). Per tant, per a una producció de 1000 unitats el mínim cost s'aconsegueix quan $x=34{,}48$ i $y=78{,}46$.