

DEPARTAMENT D'ENGINYERIA AGRÀRIA

APUNTS DE CONTRUCCIONS
Càlcul d'estructures

Coordinador assignatura
Josep Claramunt Blanes

Edició de setembre de 2004

I. INTRODUCCIÓ

En el context del coneixement humà, dividir un problema en parts més petites de més fàcil assimilació i reconstruir la globalitat per l'ensamblatge de cada una de les solucions és un mètode molt utilitzat. En el càlcul d'estructures també s'utilitza aquest mètode, trencant el problema en tantes parts que depenen de tants factors (la forma de l'estructura, el tipus de càrrega que la sol·licita, el tipus de material constitutiu) que la comprensió del problema complet queda esvaïda per l'estructura complexa del procés de càlcul. No obstant això, aquests apunts pretenen donar una visió conjunta de totes aquestes parts aplicades a elements senzills de forma que sigui més assimilable l'estructura del procés.

Per entendre el procés de càlcul cal tenir en compte els següents conceptes:

La definició "càlcul d'estructures" no és del tot correcta. En el projecte de qualsevol estructura es planteja primerament una tipologia formal que pretén adequar-se al problema a resoldre. En aquest plantejament podem inventar elements nous però l'estudi de les tipologies històriques ens pot ajudar de forma més efectiva a determinar quina tipologia estructural és més adequada. Després només caldrà extrapolar solucions, dissenyar nous elements, etc, per adaptar-nos al problema concret. A partir d'aquesta forma inicial que suposarem correcta, s'estableixen, ja sigui per experiència, càlculs aproximats o tempteig, unes dimensions mínimes dels elements que componen l'estructura. És en aquest punt quan s'inicia el procés de càlcul que pretén únicament comprovar que les dimensions són correctes. Per tant, en general, les estructures no es calculen sinó que es comproven.

Els criteris que determinen que una estructura és o no vàlida per resoldre un determinat problema tenen el següent esquema: una càrrega que actua sobre un element estructural l'afecta d'una forma que quantifiquem com A . Si aquest valor A és inferior a un altre B que definim com a límit superior, aleshores l'estructura és correcta davant d'aquest efecte. Aquests criteris, habitualment diversos, s'anomenen estats límits.

Un altre concepte important a l'hora d'enfrontar-se a un problema de càlcul (o comprovació) estructural és el de determinar el camí que segueixen les càrregues des del lloc on es produeixen fins els recolzaments. Aquest camí, que anomenarem descens de càrregues, ens pot servir per comprovar el grau de correcció de l'estructura en base a uns criteris de simplicitat i jerarquia. Podem afirmar que una estructura serà més correcta quant menys elements intervinguin en el trajecte de les càrregues i més ordenats estiguin. El descens de càrregues també ens pot servir per determinar l'ordre en que haurem de calcular els diferents elements estructurals. En general és difícil abordar la complexitat estructural de tot un edifici sencer i per això el dividim en elements més o menys independents fàcilment calculables. En aquest sentit solen aïllar-se de la resta aquells elements que només transmeten forces constants i no moments flectors. Per exemple, el càlcul de les corretges d'una nau industrial se sol fer de forma independent, donat que aquests elements acostumen a articular-se a la resta de l'estructura. L'ordre de càlcul d'una estructura començarà per aquells elements, independitzables o no, que rebin directament les càrregues. La comprovació prosseguirà en el mateix sentit descendent tenint en compte que les reaccions calculades en elements anteriors seran les càrregues dels posteriors.

Finalment cal dir que el procés de càlcul està regulat per l'administració a partir de normatives, unes d'obligat compliment, com les Normes Bàsiques de l'Edificació (NBE), i altres recomanades, com les Normes Tecnològiques de l'Edificació (NTE), UNE, També cal esmentar que s'estan elaborant normatives europees que seran vigents en tots els països de l'UE ben aviat i que han estat batejades amb el nom d'Eurocódigos.

D'entre les d'obligat compliment destaquen:

- **NBE-AE-88** "Acciones en la edificación" on es determinen els valors mínims de les càrregues que actuen en els edificis.
- **NBE-EA-95** "Estructuras de acero en la edificación" o es determinen les característiques dels productes d'acer, els seus mètodes de càlcul i la seva execució.
- **EHE** "Instrucción de hormigón estructural".

Per comprovar un element en un projecte d'estructura caldrà seguir els següents passos:

- Determinar totes les càrregues que actuen sobre l'estructura, a partir de la norma vigent, establint el que es coneix amb el nom d'estat de càrregues genèric per a tota l'edificació. A partir d'aquest estat de càrregues calcularem des diferents hipòtesis de càlcul i finalment determinarem els valors de les càrregues sobre l'element que s'analitza.
- Càlcul de les condicions d'equilibri, esforços interns o sol·licitacions i deformacions de l'element que s'analitza.
- Comprovació dels estats límits aplicables a cada element estructural.

Cada un d'aquests epígrafs és ampliat en els tres capítols següents de Càlcul de càrregues, Anàlisi estructural i Comprovació dels estats límits.

II. CÀLCUL DE CÀRREGUES

II.1. CLASIFICACIÓ

La norma NBE-AE-88 defineix la següent classificació de les accions:

- Acció gravitatòria

És la força produïda per el pes dels elements constructius, de les persones i objectes que l'utilitzen i de la neu sobre les cobertes. Es subdivideix en:

- Concàrrega

És la part de càrrega constant en magnitud i posició. Es subdivideix en:

- Pes propi

Fracció de la càrrega corresponent als elements purament estructurals.

- Càrregues permanents

Fracció de la càrrega corresponent als elements constructius que no són estructurals.

- Sobrecàrrega

És la part de càrrega variable en magnitud i/o posició. Es subdivideix en:

- Sobrecàrrega d'us

És la fracció de sobrecàrrega deguda a l'ús normal de l'edifici o durant la seva execució.

- Sobrecàrrega de neu

És la fracció de càrrega corresponent al pes de la neu que pugui acumular-se sobre les cobertes.

- Acció del vent

És el valor de la pressió o succió que el vent genera sobre els tancaments de l'edificació

- Acció tèrmica

És el valor de la força que s'origina per la coacció de les deformacions tèrmiques dels materials. Pot obviar-se quant es col.loquen junts de dilatació a distàncies adequades.

- Acció reològica

És el valor de la força que s'origina per la coacció de les deformacions dels materials inestables a la humitat, per l'actuació de càrregues a llarg termini o altres casos de deformació dels materials no relacionades amb la temperatura.

- Acció sísmica

És la conseqüència de la inèrcia dels materials sotmesos a acceleracions sísmiques. La norma sísmica publicada conjuntament amb la NBE-AE-88, la P.D.S.-1/1974, ha estat derogada i substituïda per la NCS/94 (Norma de Construcció Sismorresistente)

- Acció del terreny

Es la càrrega que es produeix per la pressió del terreny sobre els elements en contacte amb ell. En general s'aplica sobre fonamentacions i murs de contenció.

Els valors que estableix la norma de càrregues pels diferents tipus de càrrega s'han de considerar com a característics. (Això implica un grau de confiança del 95%, és a dir que els seus valors no seran sobrepassats durant el 95% de la vida de l'edifici).

II.2. ACCIONS GRAVITATÒRIES

II.2.1. CONCÀRREGA

La norma estableix que el pes dels elements es calcula multiplicant el seu volum per la seva densitat aparent. El volum s'obté a partir de les dimensions reals i la densitat aparent es determinarà experimentalment. No obstant això, la norma edita les taules 2.1 a 2.5 on s'estableixen valors de molts materials i elements constructius i estructurals. Cal remarcar que per error tipogràfic en la taula 2.5 "Peso elementos constructivos", les unitats en que s'expressen els valors són en Kg/m^2 i no en Kg/m^3 .

II.2.2. SOBRECÀRREGUES D'US

La sobrecàrrega d'us és conseqüència de les càrregues variables fruit de l'activitat que es desenvolupa en un edifici. Es descomposa en:

- Sobrecàrrega uniforme sobre els sostres.
És el pes corresponent als objectes i a la ocupació que genera l'activitat que es desenvolupa. Aquelles que no coincideixin expressament amb les especificades en la taula 3.1 de la norma, s'extrapolaran a situacions similars.
En el cas dels magatzems, el valor de la sobrecàrrega es calcula en funció de la disposició i quantitat de material emmagatzemat.
- Sobrecàrrega d'envans.
La justificació que dona la norma per substituir la càrrega permanent que pot suposar una paret per una sobrecàrrega uniforme és el fet, d'altre banda corrent, que molts edificis canvien la distribució dels seus espais al llarg de la seva vida. La norma considera que només es canvien de lloc les parets de poc gruix i pes i, per això, només queden dins d'aquesta categoria les de pes inferior a 120 Kg/m^2 (com a màxim de fins a 7 cm de gruix).
Cal remarcar el tercer paràgraf de l'article 3.3 que diu "Cuando la sobrecarga de uso sea de 300 ó de 400 Kg/m^2 , se podrá tomar como sobrecarga adicional de tabiquería la mitad del peso de ésta." Aquest paràgraf s'ha d'interpretar que la paraula **ésta** es refereix als envans i en conseqüència al seu pes. Un error freqüent es interpretar el paràgraf en base al valor de la sobrecàrrega envans de referència, que la norma estableix en 100 Kp/m^2 .
- Sobrecàrregues aïllades.
Sota aquest epígraf la norma vol considerar dues causes provables. Per una banda, el fet habitual que un element aparentment sense càrrega pateixi les conseqüències de una persona directament col·locada sobre ell per raons de manteniment o altres causes.
D'altre banda, considerar aquells casos en que l'efecte de la pressió d'una roda d'un vehicle sobre l'estructura és pitjor que la càrrega repartida que representa la sobrecàrrega d'us.
- Sobrecàrrega de balcons volats.
Amb aquesta sobrecàrrega es vol considerar l'efecte que pot suposar una acumulació de persones o coses sobre la punta dels voladissos per causes especials (pensem en dies de festa al carrer o amb els testos amb plantes grosses)
- Sobrecàrregues horitzontals.
Considera l'efecte de les empentes que es generen en l'extrem superior de les baranes per l'ús que se'n fa d'elles.

Cal fer especial atenció que en les zones amb trànsit de vehicles cal aplicar un coeficient d'impacte a la sobrecàrrega d'us de valor 1.4.

II.2.3. SOBRECÀRREGUES DE NEU

La sobrecàrrega de neu correspon al pes de la neu que es pot acumular en les superfícies de la coberta. En general es calcula en base a les estadístiques fiables de la zona on es situa l'edifici. A falta d'aquestes estadístiques s'apliquen els valors de la taula 4.1 en funció de l'alçada topogràfica del solar on s'edifica.

En el cas que la coberta sigui inclinada i de superfície llisa que permeti l'esllavissament de la neu, es pot considerar la projecció vertical del pes sobre el faldó. Si la inclinació és superior a 60°, no cal tenir en compte la sobrecàrrega de neu.

També és possible que per la configuració de les cobertes es pugui acumular una quantitat major de neu. En aquest cas s'aplica el valor de càrrega corresponent a la quantitat de neu que pot arribar a acumular-se, en base als valors del pes específic aparent de l'article 4.2. En general es considera com a límit d'acumulació la superfície que uneix les arestes superiors de la zona que s'analitzi.

II.3. ACCIONS DE VENT

Correspon al valor de la pressió amb que el vent actua sobre els paraments de les construccions, tenint en compte que el vent actua de la següent manera:

- És horitzontal, amb una oscil·lació de $\pm 10^\circ$ en el cas de construccions obertes.
- Segueix les direccions principals de l'edificació, de forma no simultània.
- Si l'edifici té forats (portes i finestres), el vent pot exercir pressió en la cara interior dels tancaments que es sumarà a la produïda exteriorment.

El valor de la pressió en K_p/m^2 que actua sobre un element superficial es calcula a partir de la pressió dinàmica del vent, que es funció de la situació de l'edifici i de l'alçada de l'element respecte el terra, i d'un coeficient anomenat eòlic, que es funció de la seva rugositat i de l'angle d'incidència respecte del vent. La taula 5.1 dona els valors de les pressions dinàmiques en funció de la situació i alçada de l'edifici. La taula 5.2 i 5.4 dona els valors dels coeficients eòlics en funció de la situació, l'angle d'incidència i el tipus de superfície. Cal fer dues consideracions: en la taula 5.1 s'esmenta el significat de les situacions *remanso* i *en corriente*. La interpretació que s'acostuma a fer és considerar *remanso* aquelles situacions en que l'edifici està situat dins de la projecció d'altres edificis, però separats per carrers (Per exemple una nau industrial dins d'un polígon completament edificat) i les plantes baixes dels edificis. Aquesta situació és diferent de la considerada en el segon paràgraf de l'epígraf 5.4 on es considera la reducció de sobrecàrrega per a elements superposats a poca distància. Considerarem *en corriente* aquelles parts dels edificis que sobresurtin de la projecció dels que son veïns.

II.4. CÀRREGUES SEGONS LA NORMA EHE

La nova norma EHE conté un annex de càlcul de càrregues d'obligat compliment per a estructures de formigó. L'estudi d'aquest annex queda fora de l'àmbit de l'assignatura donat que el material que estudiem és l'acer.

II.5. ESTAT DE CÀRREGUES

II.5.1. ESTAT DE CÀRREGUES

L'estat de càrregues d'un edifici reflecteix els valors de les càrregues que s'apliquen a cada una de les zones en que es divideix l'edificació per raons de canvi d'us, de posició, de sistema constructiu o estructural, ... El podríem definir com una taula de valors de càrregues aplicades a zones concretes d'una edificació.

II.5.2. HIPÒTESIS DE CÀLCUL

El concepte d'hipòtesis de càlcul parteix de la base que no sempre és més desfavorable per una estructura aplicar totes les càrregues possibles que aplicar-les de forma parcial o local. És freqüent que menys quantitat de càrrega aplicada a un lloc determinat influeixi de forma més desfavorable en una estructura. Per això, tota estructura es calcularà per assolit una sèrie d'estats de càrrega diferents i possibles que no tenen perquè representar el 100 % de les càrregues, però que es considera que poden ser d'efectes més perjudicials. En cap cas s'han de considerar estats de càrregues impossibles. D'altra banda, la norma ens permet aplicar uns coeficients de simultaneïtat en el cas en que la probabilitat de que dos o més successos afectin a una estructura sigui baixa.

La mateixa norma de càrregues estableix que en tota estructura es consideraran els següents casos de càrrega:

Cas de càrrega	Classe d'acció
Cas I	Concàrregues Sobrecàrrega d'us Sobrecàrrega de neu Assentament de recolzaments Empentes del terreny
Cas II	Totes les del cas I Accions del vent Accions tèrmiques i reològiques
Cas III	Concàrregues Sobrecàrrega d'us Sobrecàrrega de neu Assentament de recolzaments Empentes del terreny augmentades en un 25% Accions del vent reduïdes al 50% Accions tèrmiques i reològiques reduïdes al 50% Accions sísmiques

Taula 1. Hipòtesis de càrregues segons la norma NBE-AE-88

No obstant això, les normatives referents a materials concrets, com la d'estructures d'acer o la de formigó, poden modificar-la i variant-ne el contingut o els coeficients.

D'altra banda, la distribució de la càrrega en determinats tipus d'estructura, especialment les reticulars, pot portar a situacions molt desfavorables. En aquests casos, la norma de càrregues (art. 3.8) preveu alternar les sobrecàrregues en els vans consecutius.

II.5.3. HIPÒTESIS DE CàLCUL EN LA NORMA NBE-EA-95

En el cas de les estructures metàl·liques, Art 3.1.5 NBE-EA-95 defineix els diferents casos de càrrega establint uns coeficients de seguretat que depenen del cas de càrrega i de l'estat límit en estudi.

La norma entén com a càrregues constants les següents:

- El pes propi
- La càrrega permanent
- El pes i les empentes del terreny
- Les accions tèrmiques
- Els assentaments dels fonaments

I com a càrregues variables:

- La sobrecàrrega d'us i explotació
- Les sobrecàrregues d'execució durant el període de construcció
- L'acció del vent
- La sobrecàrrega de neu
- L'acció sísmica

En la taula 3.1.5* de la norma s'especifiquen les hipòtesis a considerar:

COEFICIENTS DE PONDERACIÓ

Cas de càrrega	Classe d'acció	Coeficient de ponderació	
		Desfavorable	Favorable
CAS I	Accions constants	1.33	1.00
Accions constants i combinació de dos accions variables independents	Ia Sobrecàrrega	1.33	1.50
	Vent	1.50	1.33
	Ib Accions constants	1.33	1.00
	Ib Sobrecàrrega	1.50	0
	Neu	1.50	0
	Ic Accions constants	1.33	1.00
	Ic Vent	1.50	0
	Neu	1.50	0
	CAS II	Accions constants	1.33
Accions constants i combinació de tres accions variables independents	Sobrecàrrega	1.33	0
	Vent	1.33	0
	Neu	1.33	0
CAS III*	Accions constants	1.00	1.00
Accions constants i combinació de quatre accions variables independents, incloses les sísmiques	Sobrecàrrega	r (1)	0
	Vent	0.25 (2)	0
	Neu	0.50 (3)	0
	Acció sísmica	1.00	0

(1) r és el coeficient reductor per a les sobrecàrregues (Taula VIII de la norma sismoresistent P.G.S.1, part A):

cas 1er: Terrats, habitatges i hotels (excepte locals de reunió): $r = 0.50$

cas 2on: Oficines comerços, calçades i garatges: $r = 0.60$

cas 3er: Hospitals, presons, edificis docents, esglésies, edificis de reunió i espectacles i sales de reunió d'hotels: $r = 0.80$

(2) Només es considerarà en situació topogràfica exposada.

(3) Només aplicable en aquells indrets on la neu sigui habitualment permanent durant més de 30 dies.

* l'actual norma de sisme (NCSE-94) manté els mateixos coeficients reductors segons l'article C.3.4 taula 2.

Taula 2. Hipòtesis de càrregues segons la norma NBE-EA-95

En cada element estructural només cal estudiar aquelles hipòtesis que siguin d'aplicació. Per exemple, una estructura de suport d'una màquina situada en l'interior d'un edifici sense possibilitat de corrents d'aire directes només s'ha de calcular per suportar les accions constants i l'ús, amb coeficients 1.33 i 1.5 respectivament.

D'altra banda, la norma d'estructures metàl·liques barreja dos conceptes que són el de les hipòtesis de càrrega i el de la seguretat. El més destacable és que els coeficients de seguretat es redueixen a mesura que intervenen més tipus de càrrega i que aquests són els més baixos de tots els utilitzats en càlcul d'estructures. Això és degut al excel·lent comportament de les estructures d'acer en estat límit últim i el bon control de fabricació que es fa sobre els productes.

En general, en els estats de càrregues i durant tot el càlcul, convé classificar les accions segons els diferents conceptes de la taula anterior.

II.6. CÀRREGUES SOBRE UN ELEMENT ESTRUCTURAL

Com ja s'ha explicat, l'anàlisi d'una estructura comporta una simplificació del fenomen real. Una de les més habituals, tenint en compte els mitjans dels que disposem, és considerar l'estructura tridimensional com a conjunt d'elements estructurals plans. Per exemple, una nau industrial s'acostuma a descomposar en biguetes i pòrtics, cada un d'ells resistint en una sola direcció.

És per això que les càrregues aplicades als elements lineals han d'estar aplicades en un sol pla i, en conseqüència la tipologia de càrregues ha de ser puntual (en N, Kp, Kgf, ...) o lineal (en N/m, Kp/m, Kgf/m, ...). Com les càrregues calculades en l'apartat anterior són majoritàriament tridimensionals (això és en N/m^2 , Kp/m^2 , Kgf/m^2) cal transformar-les a càrregues lineals. El concepte físic és el d'aplicar a l'element lineal la part proporcional de càrrega corresponent de la superfície que sustenta.

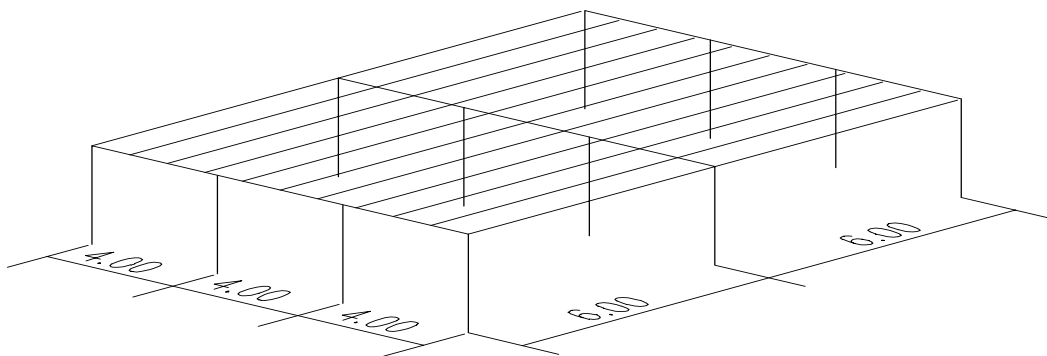


Figura 1. Estructura formada per tres pòrtics consecutius.

Suposem el cas d'una estructura com la de la figura anterior, en la que el valor total de les càrregues corresponents a pes propi, càrregues permanents, sobrecàrrega d'ús i sobrecàrrega de neu sigui de $650 Kp/m^2$. La següent figura ens permet entendre el significat de l'estat de càrregues com si d'una sèrie de caixes d'un metre quadrat de superfície i de $650 Kp$ de pes estiguessin col·locades a sobre de tota l'estructura.

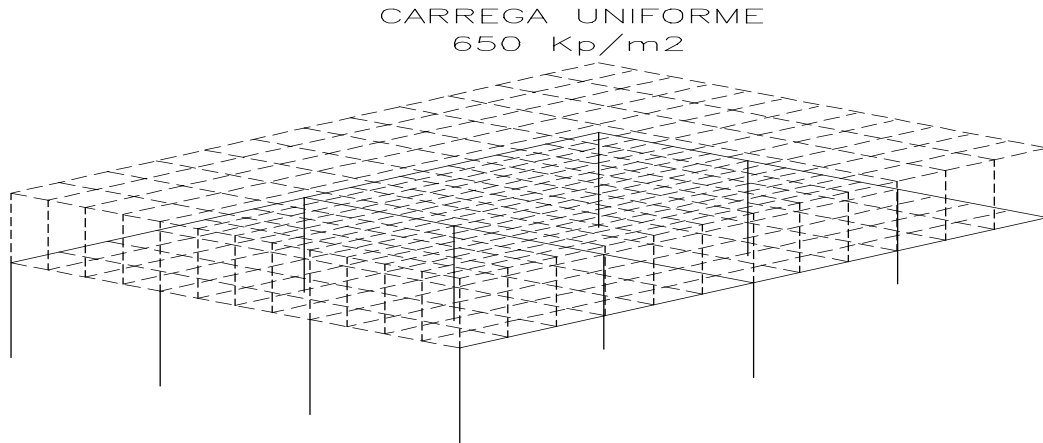


Figura 2. Càrrega total sobre l'estructura

En el moment en que analitzem qualsevol dels elements estructurals (pòtics), haurem de repartir la càrrega de forma que a cada element lineal li correspongui la fracció de càrrega que anirà a parar a ell.

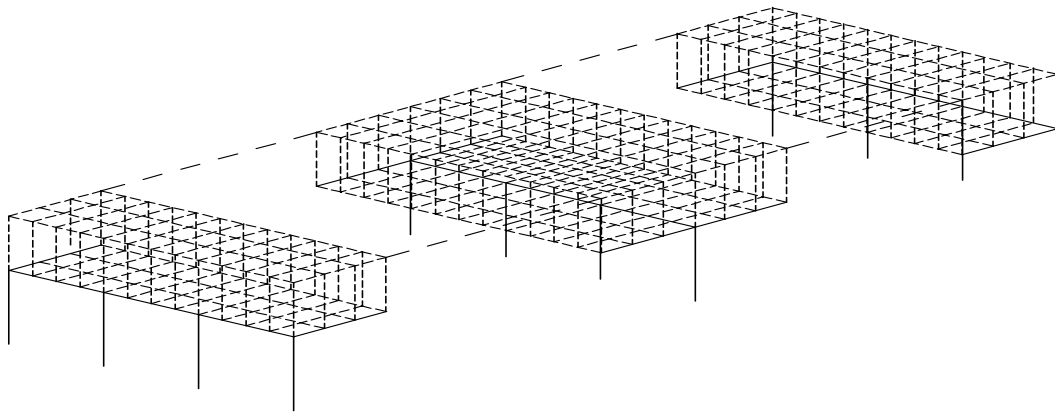


Figura 3. Part proporcional de sustentació en cada pòtic

Podem suposar que cada element lineal suporta la meitat de la càrrega corresponent a tot el sostre que s'hi recolza. Així, al pòtic extrem li corresponen tres files de caixes, mentre que al central li en corresponen sis.

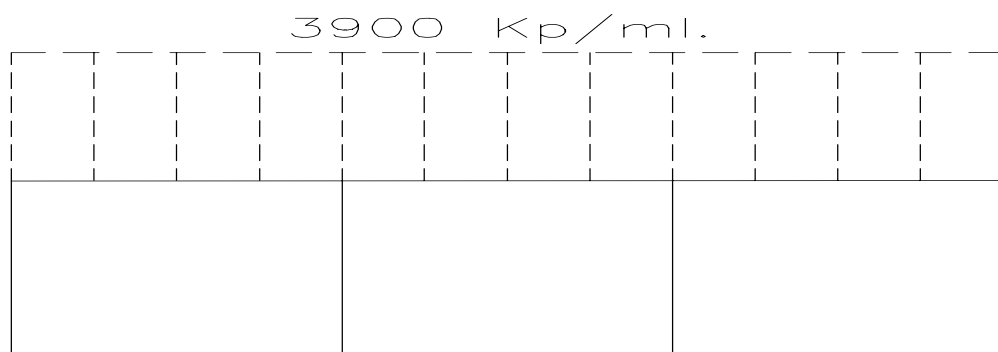


Figura 4. Valor total de la càrrega en el pòtic central

La càrrega lineal corresponent al pòrtic central serà de $650 \cdot 6 = 3.900 \text{ Kp /ml}$. (Això no és del tot exacte, perquè en la realitat l'element central suporta una part més important de càrrega que depèn de la rigidesa del sostre i dels seus recolzaments.)

En aquest exemple s'ha considerat com a una sola unitat la totalitat de la càrrega. En general, en les estructures de formigó això és correcte perquè els coeficients de seguretat depenen dels danys que pugui ocasionar l'estructura si es produís un col·lapse i del control que se'n faci a l'obra. En les estructures d'acer, però, cal mantenir cada unitat de càrrega (concàrregues, sobrecàrrega d'us, sobrecàrrega de neu, ...) de forma independent. Això és així perquè els coeficients de seguretat que afecten a les estructures metàl·liques depenen del tipus de càrrega (accions constants i fàcilment calculables tenen un coeficient de seguretat inferior que aquelles que són més difícils de quantificar, de la mateixa manera que major quantitat de blocs de càrregues considerats en una hipòtesis i, per tant de menys probabilitat, tenen coeficients més baixos).

III. ANALISI ESTRUCTURAL

III.1. INTRODUCCIÓ

Definim anàlisi estructural com aquella matèria destinada a estudiar els efectes interns de les càrregues exteriors sobre una estructura.

Al llarg de l'història han aparegut mètodes diversos lligats als problemes habituals i als coneixements físics i matemàtics de cada època. Inicialment, aquests mètodes consideraven els materials estructurals com rígids sotmesos a l'equilibri estàtic. Tot i que les primeres referències corresponen als egipcis i als grecs, especialment Arquímedes, el seu desenvolupament com a doctrina es deu a Newton. Dins de les aplicacions de la doctrina teòrica podem trobar mètodes d'anàlisi gràfics, entre els que destaca el de Cremona, vàlid per a estructures isostàtiques triangulars (encavallades) i també d'anàlisis com el de Ritter.

En el renaixement apareix el concepte de cos deformable. Especialment en el segle XVI són Leonardo da Vinci i Galileo els que s'interessen per les propietats i característiques de deformabilitat dels cossos. Fins i tot Galileo, després de la publicació del llibre *Dos nuevas ciencias* va estar a punt de ser cremat a la foguera per divergir de l'església en referència a la situació de la fibra neutra.

En 1678 Hooke formula la seva teoria sobre els moviments axials, relacionant el valor de les càrregues amb el de les deformacions, establint el concepte de cos elàstic.

Ja en el segle XVII Bernoulli estableix l'equació diferencial del comportament elàstic d'una barra sotmesa a càrregues exteriors i Euler en el XVIII estableix les lleis de la flexió i inicia els estudis dels fenòmens d'inestabilitat en elements comprimits. Al mateix temps Coulomb determina valors de les tensions en fibres de les barres carregades i també inicia l'estudi de barres sotmeses a torsió.

En el XIX, Navier estableix els criteris bàsics de la resistència de materials tal i com avui la coneixem. Clapeyron, Castiglione i Mohr analitzen l'hiperestaticitat i la manera de resoldre-la a partir de la compatibilitat de deformació, de les tensions internes i dels mètodes energètics.

En el segle XX, Timoshenko i Salguero han recopilat i desenvolupat tots els coneixements de l'estàtica i la resistència de materials en llibres que s'han convertit en referent ineludible. Més modernament, autors com Torroja, Vázquez, Argüelles, Calavera, ... han editat llibres d'aplicació d'aquests conceptes a estructures d'acer, formigó, fusta o alumini.

A mitjans del segle XX es posa en pràctica un mètode de càlcul de les forces internes en estructures hiperestàtiques conegut amb el nom de càlcul matricial d'estructures i que permet reduir el problema estructural a un sistema d'equacions lineals. L'inconvenient és que els sistemes a resoldre acostumen a ser de moltes incògnites (6 equacions per cada nus de l'estructura, el que vol dir que per resoldre una biga biencastrada cal un sistema de 12 equacions amb 12 incògnites) i no va tenir gaire incidència fins a l'aparició de l'ordinador. Avui, tots els programes informàtics de càlcul d'estructures fan servir aquest mètode per la seva velocitat, versatilitat i exactitud.

III.2. TIPULOGIA ESTRUCTURAL

El mètode de càlcul que es proposa en aquests apunts permet calcular els esforços en qualsevol estructura plana amb isostatisme intern i extern. Aquesta definició tant curta implica una certa complexitat operativa per determinar si una estructura és o no isostàtica. Una definició més pragmàtica és la que defineix una estructura isostàtica externa com aquella que no guarda l'equilibri si reduïm un grau de llibertat a una de les coaccions i una estructura isostàtica interna com aquella en que reduint un grau de llibertat a una de les unions entre barres es transforma en un mecanisme.

En general, les estructures més normals amb aquestes característiques són les encavallades amb sinus triangulars, els pòrtics amb dos recolzaments, un dels quals serà articulat i l'altre lliscant, amb nusos de dues barres o, com a molt de tres barres quant una d'elles és un voladís.

D'altre banda aquest mètode no permet el càlcul de les deformacions de l'estructura. Aquest tema queda fora de l'abast d'aquests apunts.

III.3. MÈTODE DE CàLCUL

El mètode per calcular els esforços en una estructura de barres de les definides en l'apartat anterior consisteix bàsicament en seccionar en dos parts una estructura ja en equilibri i determinar que passa en el punt límit d'una de les dues parts (és indiferent quina de les dues). Operativament, suposarem que l'interacció d'un tros de l'estructura sobre l'altre permet l'equilibri total i parcial de cada part. El plantejament és el següent: si el punt per on es secciona l'estructura està originalment en equilibri (això és que no te cap moviment ni gir) es que la part d'estructura que no considerem actuava com un encastament, generant forces i moments. Per tant es pot calcular l'equilibri de forces i moments a qualsevol de les parts i determinar el valor i sentit d'aquestes forces que anomenarem esforços.

Per que el mètode funcioni cal tenir en compte els següents aspectes:

- L'estructura ha d'estar en equilibri, el que vol dir que hem calculat els valors de les reaccions i que els recolzaments suporten aquestes càrregues.
- Si l'estructura te nusos interns articulats (suposició que farem en el cas d'estructures triangulars, com les encavallades) la secció de l'estructura no tallarà més de tres barres amb esforços desconeguts. Considerarem que els esforços que afecten aquests tipus d'estructures són exclusivament axials

Si l'estructura te nusos interns encastats (suposició que farem en els pòrtics d'acer no triangulats i en els de formigó armat) la secció només pot tallar una sola barra. Considerarem que els esforços són els axials, els tallants i els moments flectors. En aquests apunts es tractaran només les estructures de nusos interns encastats.

- Farem tantes seccions com sigui necessari per tal de determinar els esforços en tots els elements de l'estructura i en tots els seus punts. Per això resultarà operatiu determinar les funcions esforç de manera que la variable sigui la distància al llarg de l'eix longitudinal de cada barra des d'un origen qualsevol al punt on s'analitzen els esforços.
Aquestes funcions seran úniques en tant es mantinguin les mateixes condicions locals d'equilibri. En aquest sentit convé determinar quins són els punts on aquestes condicions varien perquè seran els límits de les funcions. Aquests límits que anomenarem punts de discontinuïtat estan situats en els canvis de direcció de les barres, en els recolzaments, en les càrregues puntuals, en els principis i finals de les càrregues repartides, i en tots aquells altres elements que modifiquin les equacions d'equilibri locals de la secció que s'analitza.
- Dibuixarem cada una de les funcions directament sobre un esquema de l'estructura de manera que l'eix de la barra actuarà com a eix x de la gràfica i un de perpendicular actuarà com a eix y de valors de l'esforç.

Discretitzar l'estructura vol dir traduir les seves característiques reals a un esquema teòric fàcilment manipulable. En aquest curs farem referència a la discretització habitual en els mètodes de càlcul matricial, cosa que ens ajudarà a utilitzar mitjans informàtics per el seu càlcul.

Els únics elements estructurals reconeixibles en el mètode són els *nusos*, els *suports* i les *barres*:

- Un nus és tot punt de l'espai en el que poden coincidir barres i suports. La intersecció de qualsevol element estructural generarà un nus.
- Un suport és tot punt d'unió entre l'estructura i un altre punt que permet el seu equilibri estàtic.
- Una barra és tot element estructural lineal que uneix dos nusos. Totes les barres de l'estructura han de ser rectes.

El procés de discretització d'una estructura comença per la seva definició formal a partir del projecte original. Això és:

- Determinar els nusos que tindrà l'estructura, estudiant les interseccions entre les barres.
- Determinar els suports de l'estructura i analitzar quins són els graus de llibertat que permet cada un d'ells. (Saber si són encastaments, articulacions, suports lliscants, suports elàstics, ...)
- Determinar quines són les barres de l'estructura, definir les seves característiques de secció (tipus de perfil metàl·lic (IPN, IPE, ...), dimensions de la secció de formigó o altres materials, ...), definir els graus de llibertat de les unions amb els nusos (saber si la unió és rígida o articulada).
- Determinar les càrregues que corresponen a cada barra a partir de la norma vigent (NBE-AE-88) en funció de la hipòtesi de càlcul que s'analitza a partir de la normativa de cada tipus de material (si és d'acer la NBE-EA-95, si és de formigó la NBE-EH-91, tal i com s'ha vist en el capítol anterior)

El següent pas consisteix en preparar un esquema que contindrà els elements bàsics de l'estructura (dibuix dels nusos, suports i barres) numerant-los de la següent manera:

- Els nusos es començaran a numerar des de l'1 fins a n de manera que la diferència entre els números de nus inicial i final sigui el més petit possible. Per exemple, una barra identificada pel nus inicial 3 i final 7, té una diferència de 4. La mateixa barra numerada 3 i 15, té una diferència de 12. La primera numeració permet una velocitat més ràpida del programa que la segona. D'altra banda, també és útil generar una numeració de manera que els eixos locals de les barres tinguin una mateixa orientació. Això facilita enormement l'interpretació dels resultats escrits i gràfics.

- Els suports es poden numerar de qualsevol manera, sempre començant per l'1 i en ordre ascendent.
- Les barres també es poden numerar de qualsevol manera, però resulta útil per la facilitat de dimensionat posterior de l'estructura, seguir un ordre que tingui en compte les característiques de material, geometria i posició de les barres. Per exemple, numerar els pilars com a elements continus des de la planta inferior a la planta superior, o bé numerar ordenadament les barres de la mateixa secció o material, ...

En la discretització de l'estructura farem servir una referència global i moltes referències locals quant aquestes siguin necessàries (aquestes darreres les definirem més tard). Totes dues tindran característiques cartesianes comunes (seran ortogonals i levògires) que permetran referir-nos a unes o altres amb una transformació cartesiana.

En l'esquema es dibuixarà la referència global que estarà situada en la part inferior esquerra de l'estructura de manera que qualsevol nus tingui coordenades positives. Es bo col·locar l'origen en un punt que faciliti el valor de les coordenades dels nusos, així com el càlcul dels moments de les forces que actuen sobre l'estructura. Al costat de cada nus es dibuixarà un parèntesi amb les seves coordenades respecte aquests eixos generals.

També es dibuixaran els eixos locals de cada barra que queden definits a partir dels números de nus inicial i final, de la següent manera:

- L'eix x local passa pels centres de gravetat de les seccions que defineixen la barra. La direcció positiva coincideix amb el sentit ascendent de la numeració $i-j$.
- L'eix y queda definit girant l'eix x 90° en sentit antihorari.
- Aquests eixos determinen els sentits de les accions i dels esforços sobre les barres.

Les càrregues es dibuixaran sobre els elements afectats indicant, si escau, les distàncies als nusos més propers, la situació de la resultant i el seu valor.

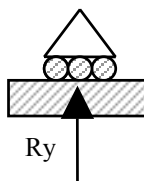
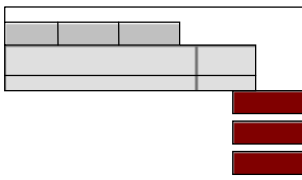
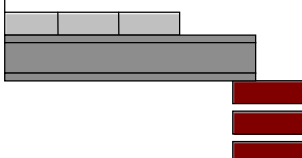
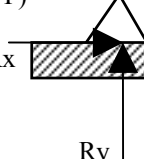
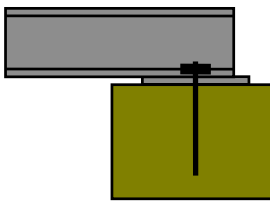
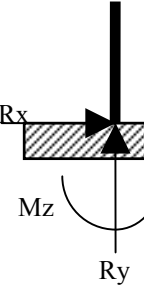
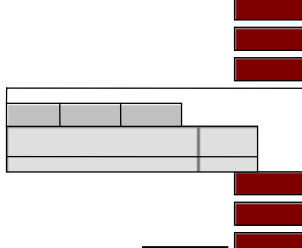
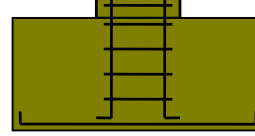
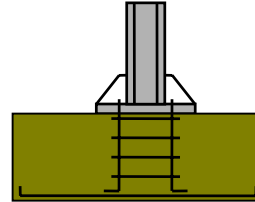
III.4. SUPORTS DE L'ESTRUCTURA

La discretització de l'estructura és fonamental en la fiabilitat dels resultats del procés d'anàlisi. Un dels punts més compromesos consisteix en determinar el grau de llibertat dels suports i dels nusos interns. Si els graus de llibertat considerats no coincideixen amb la solució constructiva real, els resultats no es correspondran amb el comportament de l'estructura.

Una estructura sense suports sotmesa a diverses accions es converteix en un mòbil. Per que aquesta sigui estàticament estable cal aturar els seus moviments. Tenint en compte que els elements estructurals que calcularem estan situats en el pla, qualsevol moviment es pot descomposar segons les components de desplaçament X , desplaçament Y i gir Z .

En conseqüència, l'estructura romandrà estable en el moment en que anul·li el grau de llibertat segons X , Y i Z . Una estructura pot tenir tants suports com el disenyador vulgui i cada suport pot anular els graus de llibertat que siguin necessaris. Això dona diferents tipus d'estructura segons els graus de llibertat coartats i si aquests ho estan de forma única o plural.

En funció dels graus de llibertat que coacciona podem tenir els següents tipus de suport:

Tipus de suport	Coacció	Esquema	Element constructiu
Suport lliscant X	Moviment Y	<p>Pot ser substituït per una força en la direcció de la coacció (Y)</p>  <p>Ry</p>	<p>Recolzaments simples amb baix coeficient de fregament.</p> <p>Recolzaments de sostres de formigó en la darrera planta</p>  <p>Recolzaments de sostres d'acer en la darrera planta</p> 
Articulació	Moviment X i moviment Y	<p>Pot ser substituït per dues forces en la direcció de les coaccions (X i Y)</p>  <p>Rx</p> <p>Ry</p>	<p>Recolzaments simples amb alt coeficient de fregament</p> <p>Recolzament de biga metàl·lica sobre pilar amb xapa cargolada</p> 
Encastament	Moviment X, moviment Y i gir	<p>Pot ser substituït per dues forces (X i Y) i un moment flector (Z) en la direcció de les coaccions</p>  <p>Rx</p> <p>Mz</p> <p>Ry</p>	<p>Recolzaments simples en les primeres plantes i unions monolítiques.</p> <p>Sostres de formigó o acer en les primeres plantes</p>  <p>Unió monolítica amb armadura passant en elements de formigó (Unió pilar-fonament)</p>  <p>Unió amb platina i cartelles cargolades entre acer i formigó (Unió pilar-fonament)</p> 

Taula 4. Esquemes dels suports més habituals en construcció civil

Aquests són els més habituals en construcció, tot i que el nombre de tipus total seria el de les possibles variacions de les diferents coaccions. Per exemple el suport que coacciona una direcció i el gir i que anomenarem passador, és un element típic de la mecànica de màquines.

III.5. EQUILIBRI DE L'ESTRUCTURA.

Una estructura isostàtica estarà en equilibri en el moment en que compleixi les tres equacions d'equilibri de Newton i que són:

$$\sum F_x = 0; \sum F_y = 0; \sum M_o = 0$$

El criteri de signes que adoptarem és el següent: les forces seran positives si tenen la direcció positiva dels eixos generals de l'estructura; els moment de les càrregues seran positius si provoquen un gir contrari a les busques del rellotge.

En el procés de càlcul, les càrregues exteriors són conegudes, mentre que les forces de reacció en els suports són desconegudes. Per determinar el valor de les càrregues cal substituir el recolzament real per les seves reaccions, d'acord amb la taula 4. Així, si el nombre de reaccions és de 3 estarem davant una estructura isostàtica externa. Si el nombre és superior estarem davant d'una estructura hiperestàtica. D'altra banda cal entendre que les reaccions calculades representen l'equilibri de l'estructura sempre que els fonaments siguin capaços de suportar-les.

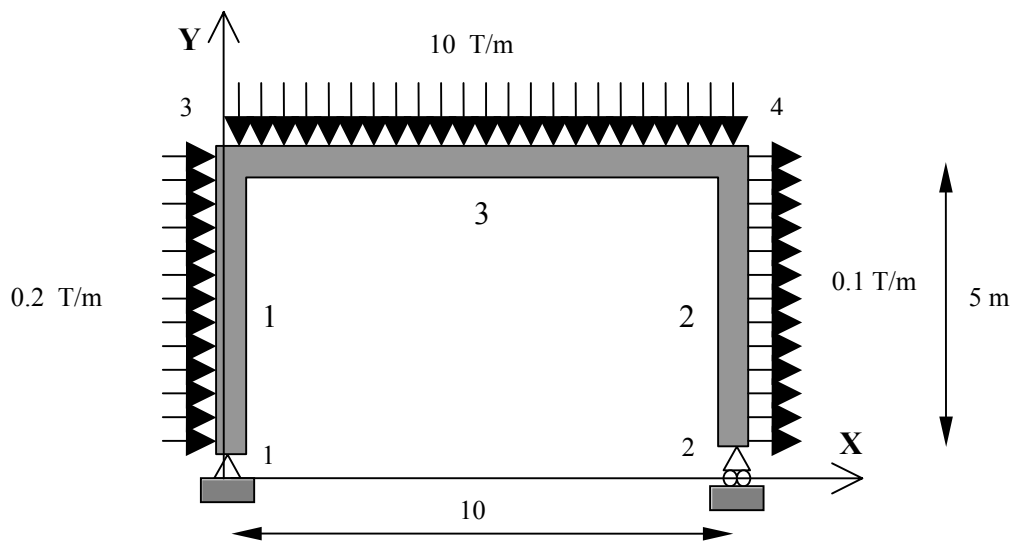


Figura 5. Estructura d'exemple

Exemple: Determinar el valor de les reaccions en els suports de l'estructura de la figura 5.

Procés de resolució:

1. Substituir els recolzaments per les reaccions desconegudes
2. Determinar les resultants de les accions externes
3. Aplicar les equacions d'equilibri (1)

1. Substituirem l'articulació del nus 1 per dues forces segons X i Y que anomenarem R_{x1} i R_{y1} i el suport lliscant del nus 2 per una reacció segons la direcció de coacció Y que anomenarem R_{y2}

2. Determinarem les resultants de les accions que anomenarem R_{q1} , R_{q2} i R_{q3} el valor de les quals s'obté multiplicant el valor de la càrrega lineal per la longitud de càrrega, i estarà situada en el seu centre de gravetat:

$$R_{q1} = Q * l = 0.2t / ml * 5ml = 1t$$

$$R_{q2} = Q * l = 0.1t / ml * 5ml = 0.5t$$

$$R_{q3} = Q * l = 10 / ml * 10ml = 100t$$

El resultat d'aquests apartats dona lloc a l'esquema de la figura 6

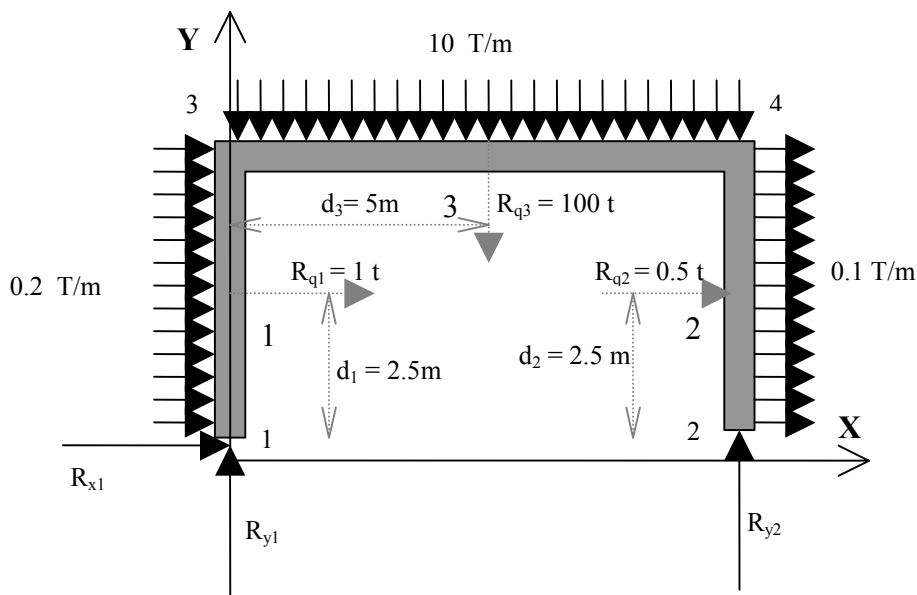


Figura 6. Esquema de resultants i reaccions

3. Aplicació de les equacions d'equilibri (1):

$$\sum F_x = 0; R_{q1} + R_{q2} + R_{x1} = 0; 0.5 + 1 + R_{x1} = 0; R_{x1} = -1.5t$$

$$\sum F_y = 0; R_{q3} + R_{y1} + R_{y2} = 0; -100 + R_{y1} + R_{y2} = 0; R_{y1} + R_{y2} = 100t$$

$$\sum M_1 = 0; -(R_{q1} * d_1) - (R_{q2} * d_2) - (R_{q3} * d_3) + (+R_{y2} * d_4) = 0;$$

$$-(0.5 * 2.5) - (1 * 2.5) - (100 * 5) + (R_{y2} * 10) = 0; R_{y2} = 50.375t$$

El signe negatiu en un resultat indica que la direcció escollida per a la força no és correcta i, en conseqüència, actua en sentit contrari.

De la segona equació:

$$R_{y1} = 100t - R_{y2} = 49.625t$$

III.6. Càlcul de les funcions esforç.

III.6.1. Avaluació de les funcions esforç

Per avaluar els esforços en tots els punts de l'estructura seguirem l'esquema de l'apartat 3.3.1. Partirem de la discretització d'una estructura en equilibri en la que haurem d'especificar el nombre de punts de discontinuïtat per identificar les seccions necessàries per analitzar l'estructura. Són punts de discontinuïtat aquells que defineixen canvis en les condicions d'equilibri d'una part de l'estructura, d'entre els que podem destacar:

- Forma de l'estructura:
 - Inicis i finals de barres
 - Suports
 - Canvis de direcció en les barres
- Tipus de càrrega
 - Càrregues puntuals (forces o moments)
 - Principis i finals de càrregues repartides

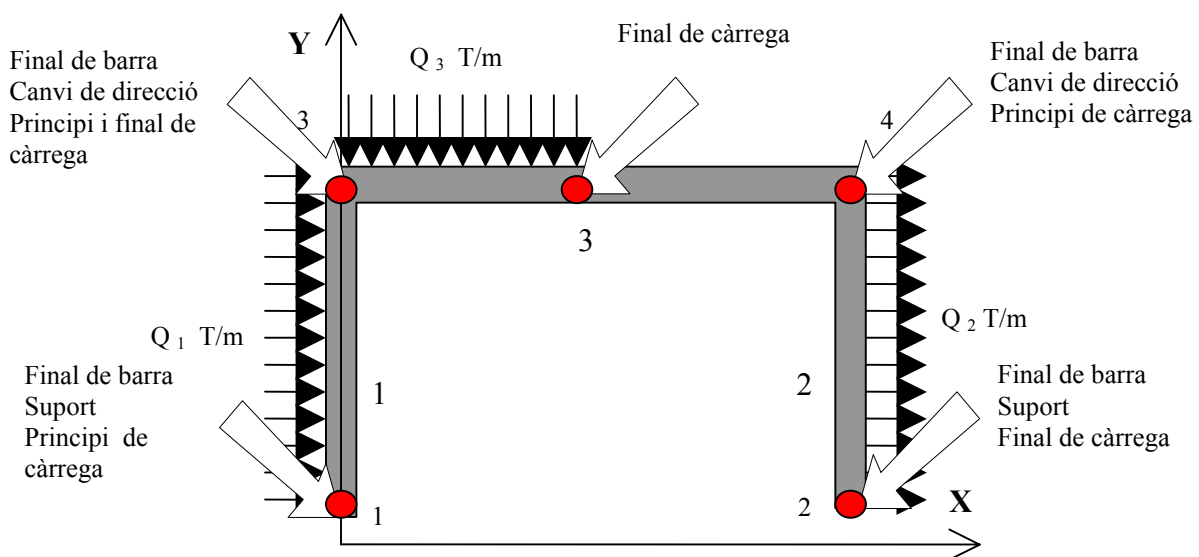


Figura 7. Punts de discontinuïtat en una estructura

En conseqüència, en l'estructura de la figura 7 haurem de definir un total de 4 seccions per tal d'establir totes les funcions esforç independents que ens permetran determinar els punts més desfavorables de l'estructura.

D'altre banda també definirem uns eixos locals per a cada una de les barres als quals referirem els esforços de l'estructura i l'equilibri de cada una de les parts en les que subdividirem l'estructura. Cada eix quedarà definit per la numeració i - j dels nusos de la barra tal i com hem definit en l'apartat 3.3.2.2. (Veure figura 8)

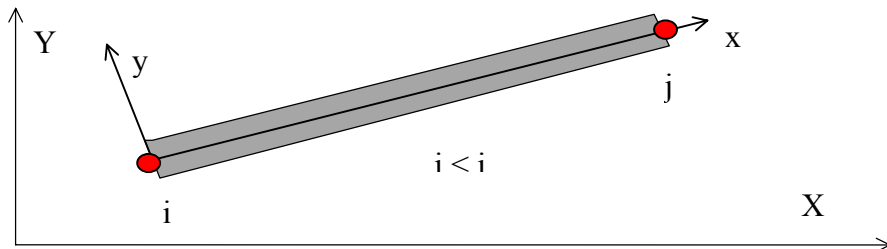


Figura 8. Eixos locals d'una barra i - j

A partir d'aquest moment tallarem l'estructura per una de les seccions (en general seguirem un ordre ascendent) i aïllarem una de les dues parts de l'estructura.

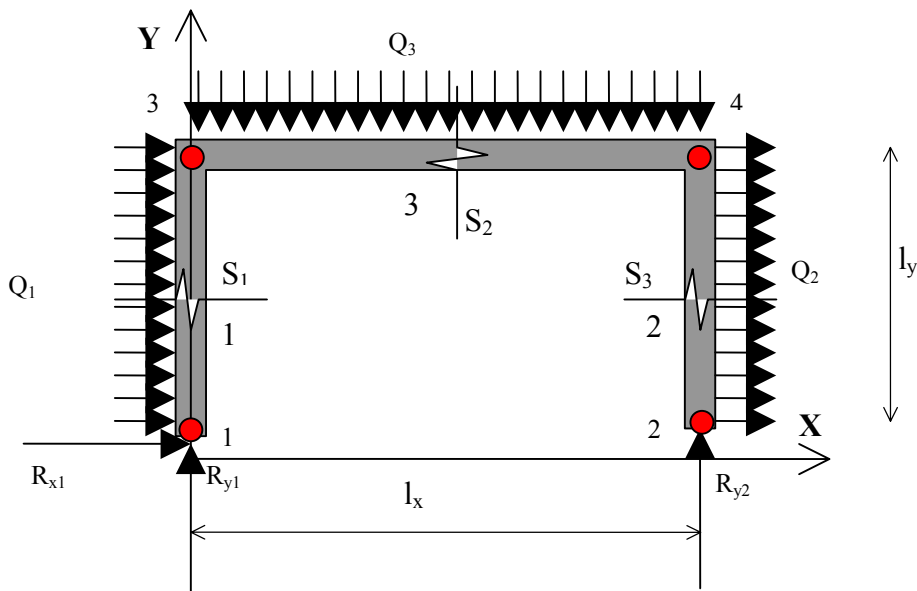


Figura 9. Seccions d'anàlisi d'una estructura genèrica

Suposant una estructura genèrica com la de la figura 9, veiem que calen un total de tres seccions per analitzar-la. Un cop tallada i aïllada ja una part, tindrem els següents elements (veure figura 10):

- La part d'estructura amb la porció de càrrega proporcional a la longitud de la barra seccionada, de la qual en calcularem el valor de la resultant i la seva posició.
- Les reaccions que equilibren l'estructura (les calculades en el punt 3 de l'apartat 3.5)
- Els eixos locals de la barra (x,y) de referència actuals.
- Els esforços axil (A), tallant (T) i moment flector (M) que representen l'immobilització o equilibri que generava la part d'estructura que hem anul·lat.

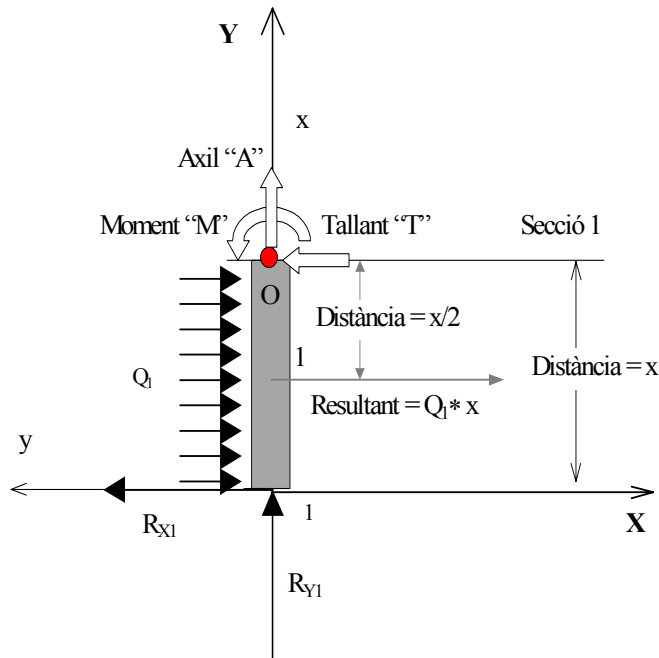


Figura 10. Secció 1 de l'estructura genèrica

Com sigui que l'estructura ha d'estar en equilibri, juntament amb cada una de les parts, podem aplicar les equacions d'equilibri a aquest tros en particular, seccionat a una distància qualsevol "x".

Per tant:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0; R_{Y1} + A = 0; A = -R_{Y1} \\ \sum F_y = 0; -Q_1 * x + R_{X1} + T = 0; T = Q_1 * x - R_{X1} \\ \sum M_o = 0; Q_{X1} * x * \frac{x}{2} - R_{X1} * x + M = 0; M = -Q_1 * \frac{x^2}{2} + R_{X1} * x \end{aligned}$$

Des del punt de vista matemàtic, totes les funcions esforç són sempre polinòmiques reals i, per tant, vàlides per a qualsevol valor del domini real. Des d'un punt de vista físic, les funcions esforç només tenen significat dins de l'àmbit de longitud de barra comprès entre els punts de discontinuïtat.

Les funcions esforç s'han de calcular per a cada secció, tenint en compte que cada una d'elles pot correspondre a barres i intervals diferents.

Un cop avaluades es dibuixen en una gràfica cartesiana en la qual les abscisses corresponen a la longitud de barra i les ordenades al valor de l'esforç que estem analitzant, és a dir el valor de A, T o M.

Pel que fa al criteri de signes cal esmentar que la representació gràfica de les funcions està relacionada amb l'efecte que una força interna genera en la barra. En aquest sentit, per visualitzar-lo utilitzarem el següent mètode:

Un cop determinat el signe correcte de la força o moment sobre el tram d'estructura analitzat, plantejarem un altre tall molt pròxim paral·lel a l'anterior i dins del propi tram de l'estructura i aïllarem la llesca de barra resultant. Plantejarem un equilibri sobre la llesca i determinarem la direcció de la força o moment que permet el nou equilibri. Pel que fa a l'axil, considerarem que un esforç A és positiu si genera un allargament de la llesca; negatiu si l'escurça. Un esforç

tallant T serà positiu si genera una distorsió angular que fa girar la llesca en sentit antihorari; serà negatiu el que la faci girar en sentit horari. Un esforç moment M serà positiu quan generi una tracció en la part inferior de la llesca i una compressió en la superior; serà negatiu quan les traccions i compressions siguin contràries a les del signe positiu. Per determinar quines són les parts superiors i inferiors utilitzarem els eixos locals de les barres.

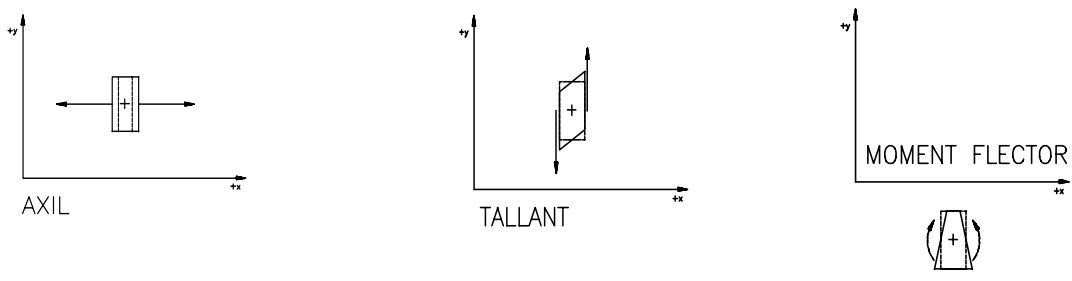


Figura 11. Criteri de signes dels esforços

Per exemple, les equacions anteriors es representarien:

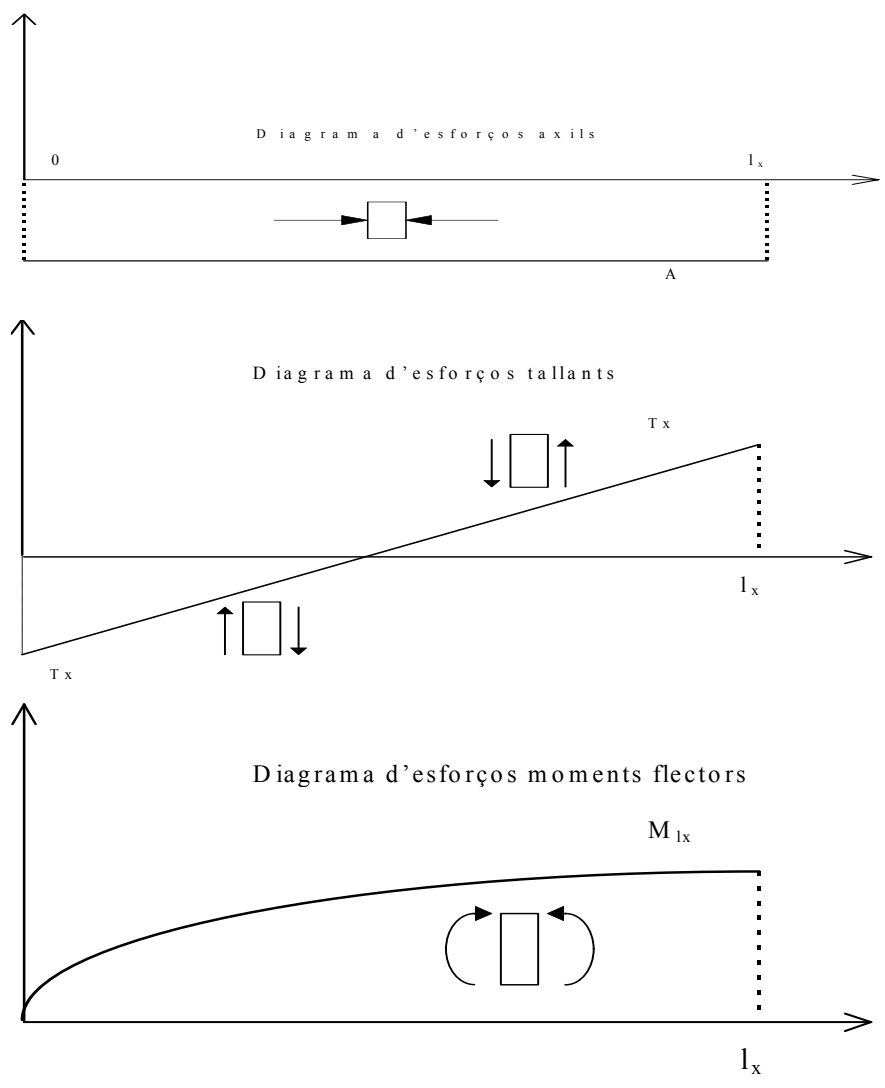


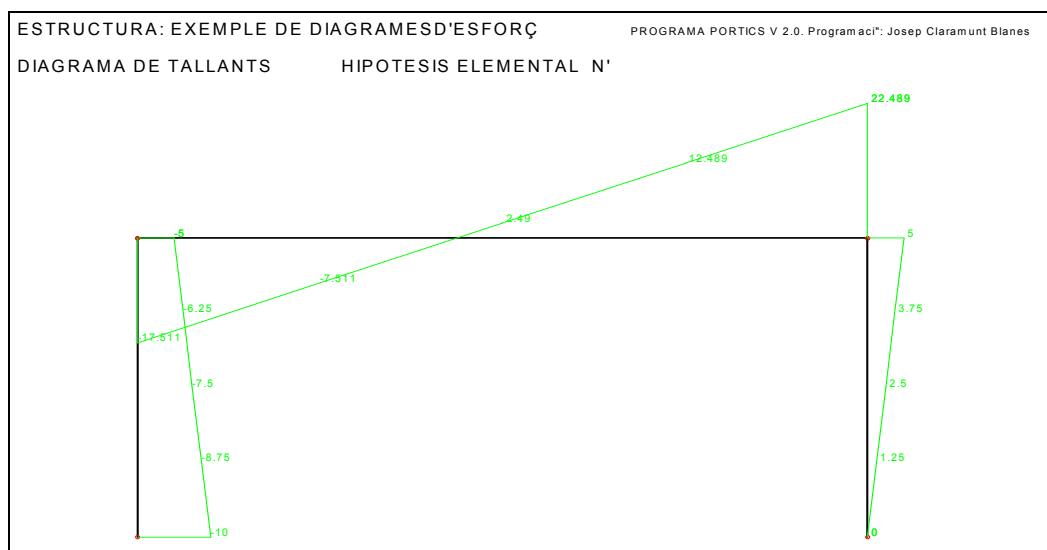
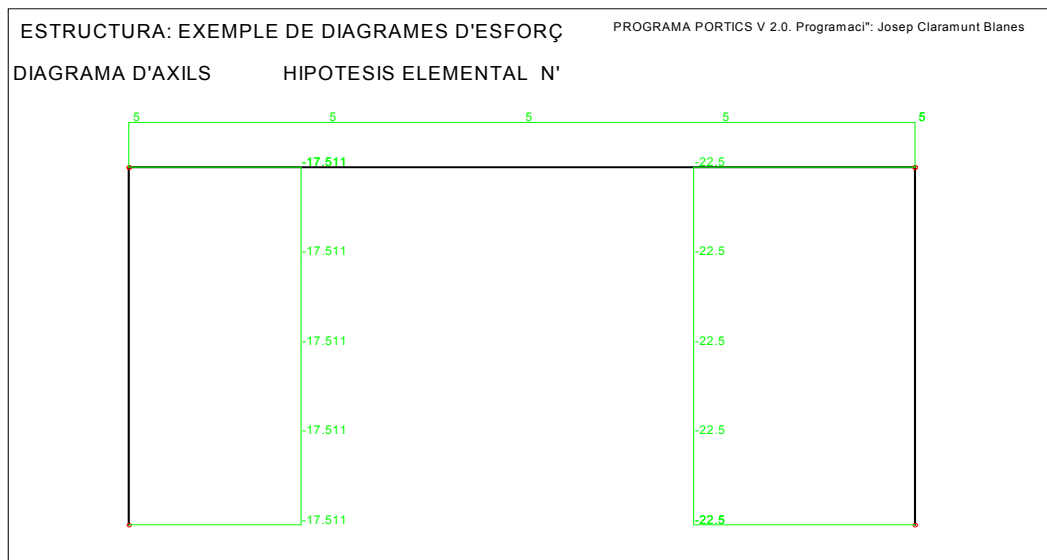
Figura 12. Gràfiques de les funcions esforç

No obstant això, les gràfiques que hem dibuixat responen poc a idees físiques i, d'altre banda, en una estructura de moltes barres, disposar d'una sèrie de gràfiques molt gran (tres per a cada barra) representaria un seriós problema de comprensió del comportament real de l'estructura. És per això que aquests diagrames s'han de "desmatematitzar" i s'han "d'enginyematitzar" una mica més.

En primer lloc, els diagrames es dibuixaran directament sobre les barres de l'estructura, fent coincidir l'eix x sobre el local x de la barra, en posició i sentit.

En segon lloc, i aquesta és una qüestió força debatuda, els diagrames de moments es dibuixaran amb el criteri de signes invers (és a dir com si el positiu estigués en el negatiu i a l'inrevés). Això es fa perquè el diagrama de moments flectors s'assembla força a la deformació de l'estructura i, per tant, ens donarà idea del comportament estructural. També es dibuixa així perquè si l'estructura fora de formigó armat, la situació del diagrama de moments coincideix amb la posició de l'armat de tracció.

Així, els diagrames d'esforços d'una estructura adquireixen l'aspecte de la figura 13



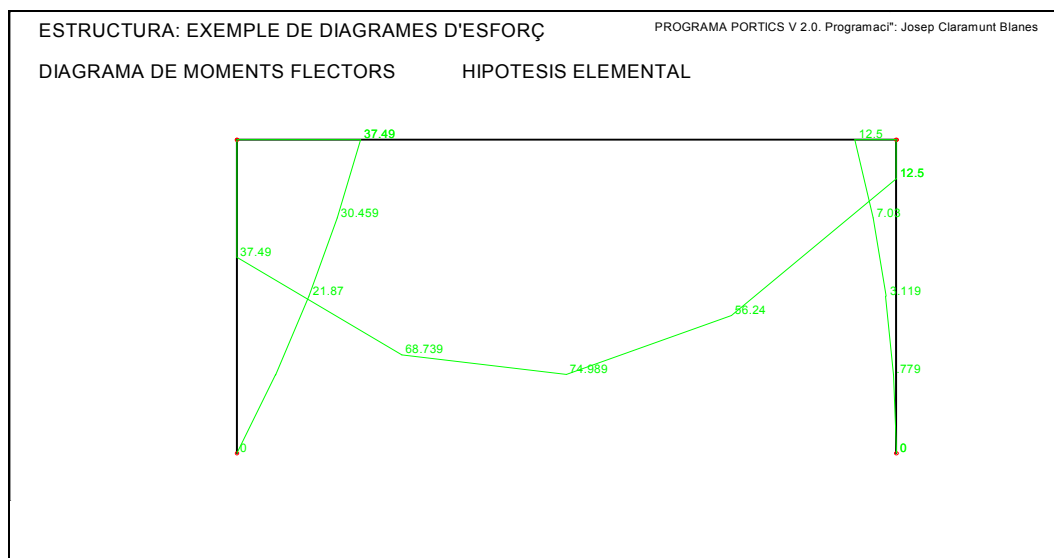


Figura 13. Diagrames d'esforços d'una estructura

Per dibuixar correctament les funcions cal tenir en compte quins són els elements imprescindibles de cada funció.

Si la funció és constant, amb el seu propi valor ja hem dibuixat el diagrama. Si la funció és lineal (una recta), definint l'esforç en dos punts n'hi ha prou. En general escollim els límits de l'interval on la funció te sentit físic. Si la funció és quadràtica (una paràbola) caldrà definir on està i quin és el valor màxim, quins punts tenen esforç 0 (punts on la funció talla a l'eix abscisses) i també els punts límits de l'interval físic. No és corrent trobar funcions de tercer o major grau.

III.6.2. ESTRATÈGIES

En el mètode de les seccions es poden obtenir els mateixos resultats utilitzant diferents camins. Entre d'altres coses, quan talles l'estructura en dos parts, és indiferent amb quina et quedés; quan calcules els moments, és indiferent el punt de referència que utilitzes; el mètode per dibuixar els diagrames és indiferent, ...

Per això convé sempre utilitzar aquella manera que implica un menor nombre d'operacions de forma que es simplifiqui el procés.

En aquest sentit definirem unes estratègies que ens ajudaran a resoldre més fàcilment l'anàlisi de l'estructura. Algunes d'elles són:

- En relació a quina de les dues parts de l'estructura cal analitzar, sempre ens referirem a la que tingui menor nombre de càrregues.

Això implica, de vegades, que haguem d'utilitzar uns eixos locals addicionals que seran la referència de les equacions esforç en aquesta zona.

- Sempre utilitzarem com a punt de referència per calcular els moments de les forces aquell que anul·li el major nombre possible de forces i, en especial, incògnites. Quan s'analitzen els esforços aquest punt coincideix amb el punt de tall de l'estructura.
- Quan ens referim a càrregues repartides locals es fan menys operacions si col·loquem uns eixos locals addicionals en l'inici de la càrrega, tenint en compte que les equacions tindran els límits d'interval referits a ells.

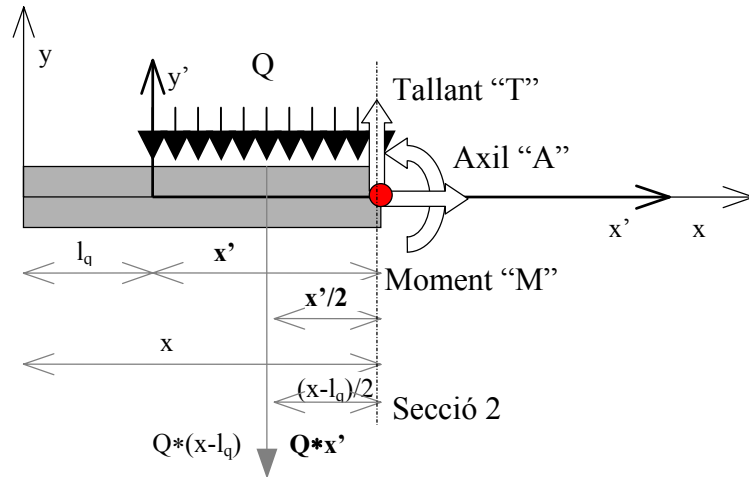


Figura 14. Estratègia per a una càrrega local

En la figura 14 tenim una biga de longitud l_t amb una càrrega local que actua entre l_q i l_t . Es suposa que estem calculant la secció 2 corresponent als esforços en l'interval d'actuació de la càrrega local. S'han dibuixat els valors de la distància al punt O i el valor de la resultant parcial de la càrrega local segons els eixos $x-y$ i $x'-y'$. En aquestes condicions, les funcions esforç serien:

Segons $x-y$:

$$\sum F_x = 0; A = 0$$

$$\sum F_y = 0; T - Q*(x - l_q) = 0; T = Q*x - Q*l_q$$

$$\sum M_o = 0; M + Q*(x - l_q)*\frac{(x - l_q)}{2}; M = -\frac{Q}{2}*x^2 + Q*l_q*x + \frac{l_q^2}{2}$$

L'interval vàlid de la funció referida als eixos $x-y$ és entre l_q i l_t

Segons $x'-y'$:

$$\sum F_x = 0; A = 0$$

$$\sum F_y = 0; T - Q*x' = 0; T = Q*x'$$

$$\sum M_o = 0; M + Q*x'*\frac{x'}{2}; M = \frac{Q}{2}*x'^2$$

L'interval vàlid de la funció, referida als eixos $x'-y'$ és entre 0 i (l_t-l_q)

Com es pot veure les equacions referides als nous eixos locals són més simples i fàcils de dibuixar que les dels eixos originals.

D’altre banda, en totes les estructures existeixen una sèrie de relacions, que no demostrarem, però que serveixen per comprovar si el procés és correcte o ens estem equivocant. Algunes d’elles són:

- En tots els nusos ha d’existir equilibri de forces i moments. Suposant una estructura com la de la figura 13 i si no existeixen forces puntuals directament aplicades al nus, l’enunciat implica que el valor de l’axil al final del pilar ha de ser el mateix que el del tallant al principi de la biga. El valor del tallant al final del pilar ha de ser el mateix que l’axil del principi de la biga. El valor del moment flector al final del pilar ha de ser igual al moment flector en l’inici de la biga.
- Entre les funcions esforç tallant i moment flector existeix la següent relació:

$$T = \pm \frac{\partial M}{\partial x}$$

Per tant podem fàcilment controlar si les funcions esforç són correctes. Aquesta relació també implica que quant la funció tallant te valor 0, la funció moment flector esdevé un màxim o un mínim.

El signe de la funció depèn del criteri de signes adoptat.

III.7. CONCLUSIONS

Tot el procés d’anàlisi, tant el que aquí es presenta com en qualsevol altre, està destinat a determinar el comportament de l’estructura i, el que més ens interessa, saber quins són els punts més desfavorables de l’estructura. A priori és difícil definir quin és aquest punt, donat que les pitjors condicions no depenen només del valor de l’esforç sinó que també depenen del material i de les característiques resistents de la barra. És per això que, un cop dibuixats els diagrames, elaborem una taula de resultats o conclusions en la que figuraran, per a cada barra, els valors màxims de cada esforç juntament amb els que li són concomitants. És habitual que una mateixa barra tingui valors diferents axials, tallants i moments i aquests no siguin màxims en una mateixa secció. Per tant apuntarem el valor de l’esforç axil màxim juntament amb el tallant i moment flector en aquesta mateixa secció; també apuntarem el valor del tallant màxim juntament amb l’axil i moment flector d’aquesta secció, i també indicarem el valor del moment flector màxim juntament amb l’axil i el tallant de la mateixa secció. En la mateixa taula resulta interessant identificar el número de la barra i la distància al origen de la secció més desfavorable. Un exemple de taula podria ser la següent:

BARRA	X	Axil	Moment flector	Tallant
1	0.00	10	1.5	25
1	5.25	10	4.5	1.5
2	0	100	1	1
2	10	5	22.5	0
2	12	5	10.2	51

III.8. EXEMPLE

Calcular els diagrames d'esforços de l'estructura de la figura 5 de la què ja es coneix l'estat d'equilibri.

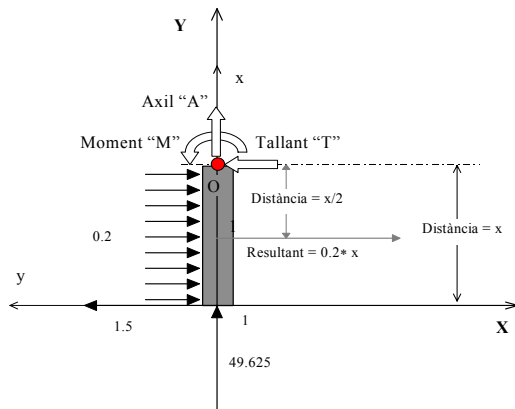
Procés de resolució:

1. Determinar els punts de discontinuïtat i les seccions que cal fer per analitzar completament l'estructura
2. Calcular les funcions esforç de cada una de les seccions
3. Dibuixar les funcions sobre un esquema de l'estructura seguint els eixos locals de les barres

1. Els punts de discontinuïtat es corresponen exactament amb els definits en la figura 9, per la qual cosa caldran un total de tres seccions per resoldre l'estructura.

2. Càlcul de les funcions esforç per a cada secció:

2.1 Secció S₁:

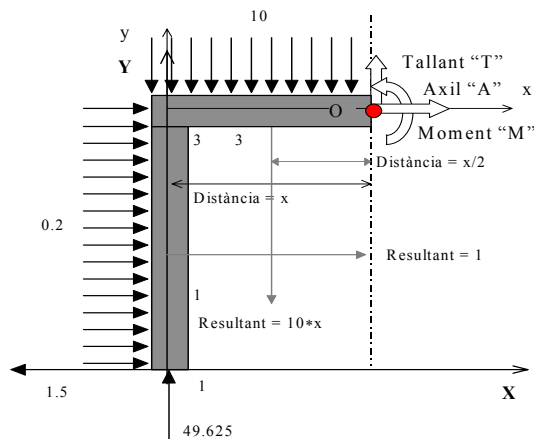


$$\sum F_x = 0; A(x) + 49.625 = 0; A(x) = -49.625$$

$$\sum F_y = 0; T(x) + 1.5 - 0.2 * x = 0; T(x) = 0.2 * x - 1.5$$

$$\sum M_o = 0; M(x) - 1.5 * x + 0.2 * x * \frac{x}{2} = 0; M(x) = -0.1 * x^2 + 1.5 * x$$

2.2 Secció S₂:

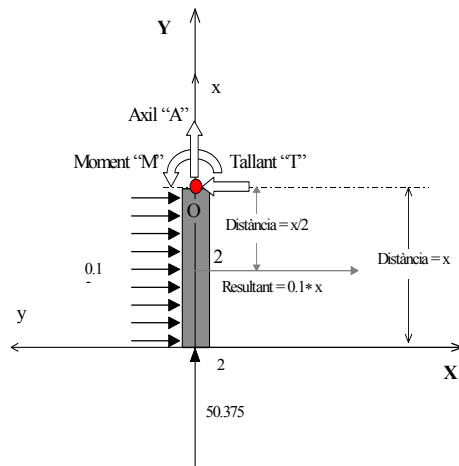


$$\sum F_x = 0; A(x) - 1.5 + 1 = 0; A(x) = 0.5$$

$$\sum F_y = 0; T(x) + 49.625 - 10 * x = 0; T(x) = 10 * x - 49.625$$

$$\sum M_o = 0; M(x) - 1.5 * 5 - 49.625 * x + 1 * 2.5 + 10 * x * \frac{x}{2} = 0; M(x) = 5 + 49.625 * x - 5 * x^2$$

2.3 Secció S₃



$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0; A(x) + 50.375 = 0; A(x) = -50.375 \\ \sum F_y &= 0; T(x) - 0.1 \cdot x = 0; T(x) = 0.1 \cdot x \\ \sum M_o &= 0; M(x) + 0.1 \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 0; M(x) = -0.05 \cdot x^2 \end{aligned}$$

3. dibuix de les funcions sobre un esquema de l'estructura

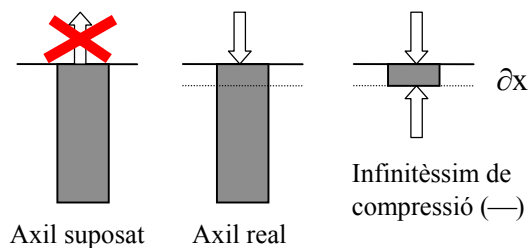
3.1 Diagrama d'esforços axials

Les funcions axil de les tres seccions són, respectivament:

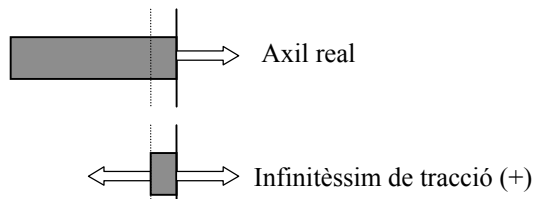
$$\begin{aligned} A(x) &= -49.625 \\ A(x) &= 0.5 \\ A(x) &= -50.375 \end{aligned}$$

Totes tres funcions són constants i es poden representar per una recta paral·lela a l'eix d'ordenades, però situada a una distància proporcional al valor de la funció. Totes les funcions són representatives dintre de l'interval que representa la seva longitud. Es a dir, que el valor de la funció només te sentit físic dins de l'interval de valors de longitud de cada una de les barres. Fora d'aquests intervals, la funció només te sentit matemàtic.

En la secció 1 i 3, els signes de la funció són negatius. Això vol dir que la direcció real de l'axil és contrària a la nostra hipòtesi inicial; és a dir, que no te la direcció de l'eix x positiu, sinó que te la direcció contrària. Per determinar el signe de l'esforç (que no és necessàriament el mateix que el de la força), delimitem un diferencial o llesca elemental i verifiquem, mitjançant l'equilibri de forces, l'efecte que li produeixen. Un cop obtingut aquest efecte el podem comparar amb el criteri de signes de la figura 11 per determinar si aquest és positiu o negatiu i, per tant, si s'ha de dibuixar per la part positiva o negativa dels eixos locals de la barra. Així, per l'axil dels pilars obtenim:

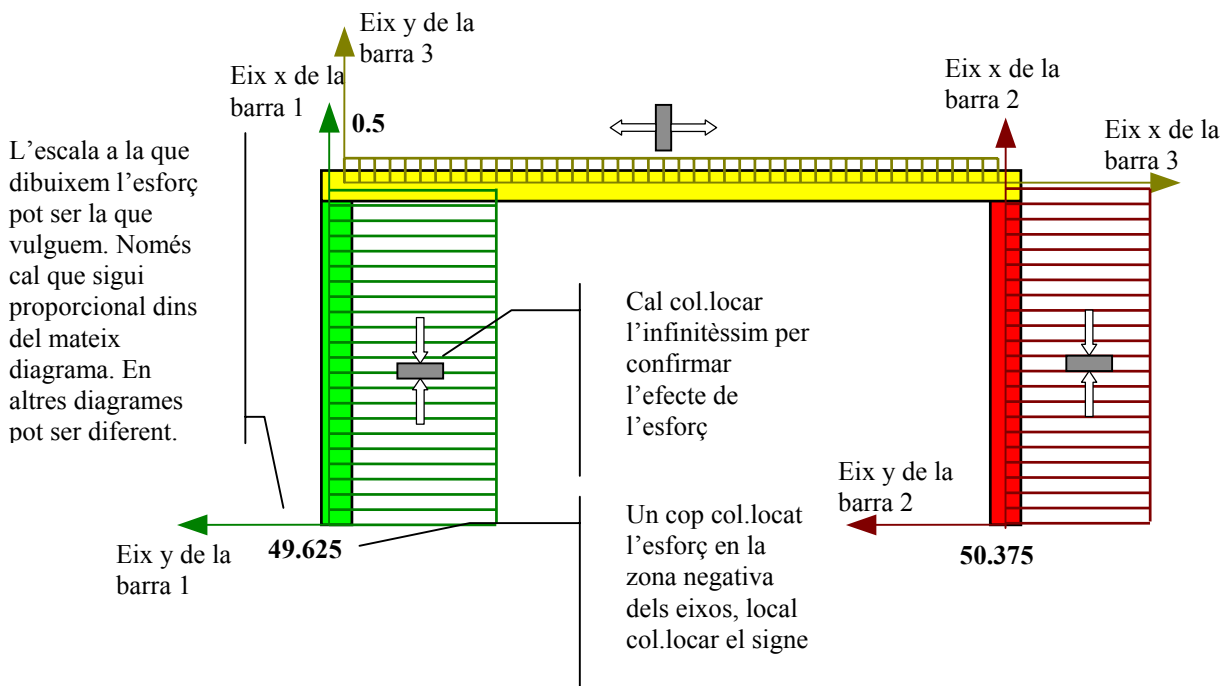


En el cas de la biga, l'axil és positiu i, per tant, coincideix amb el sentit suposat de l'axil. Així, el signe de l'esforç serà:



I el diagrama d'esforços axials, segon ∂x s eixos locals de les barres resulta:

NOTA: per facilitar la comprensió s han dibuixat les barres, els eixos locals i els esforços en diferents color. També s'han desplaçat els eixos de la seva posició teòrica per evitar que es superposin. Les unitats són tones (t) per les forces i tones * metre (tm) pels moments



3.2 Diagrama d'esforços tallants

Les funcions esforç tallant per a cada secció són, respectivament:

$$T(x) = 0.2 * x - 1.5$$

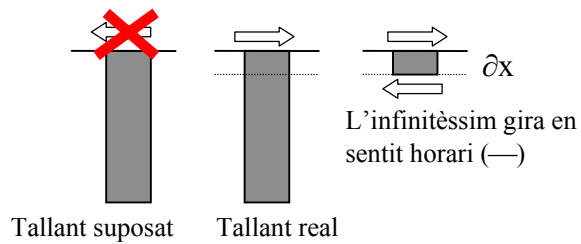
$$T(x) = 10 * x - 49.625$$

$$T(x) = 0.1 * x$$

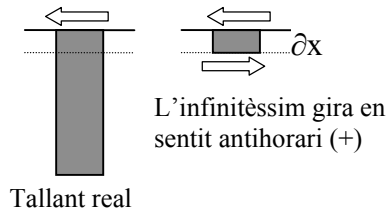
Totes tres funcions són lineals i es poden representar per una recta que quedarà definida a partir de dos punts. En general estudiarem els punts extrems de la funció (els extrems amb sentit físic). Tabulant els resultats obtenim:

Secció	Funció	x inicial	x final	Tallant inicial	Tallant final
1	$T(x) = 0.2 * x - 1.5$	0	5	-1.5	-0.5
2	$T(x) = 10 * x - 49.625$	0	10	-49.625	50.375
3	$t(x) = 0.1 * x$	0	5	0	0.5

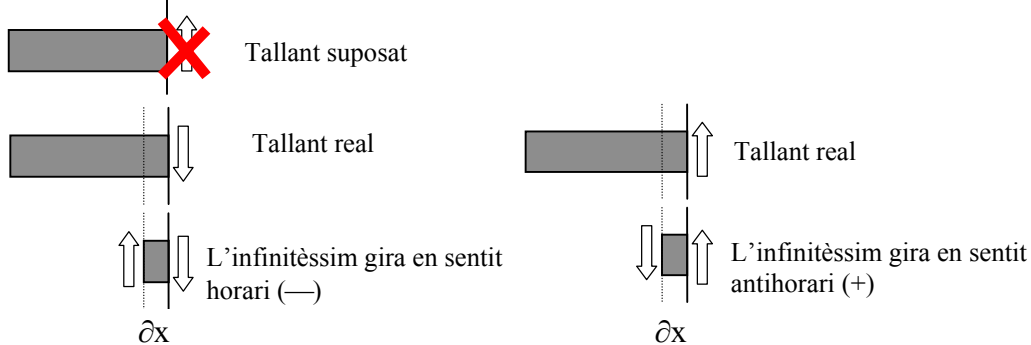
Un cop obtinguts els valors de les forces constatem que algunes d'elles tenen signe negatiu. De la mateixa forma que amb l'axil, modificarem la direcció de les forces abans de determinar el signe de l'esforç. En la secció 1, totes les seccions tenen tallant negatiu. Per tant el signe de l'esforç serà:



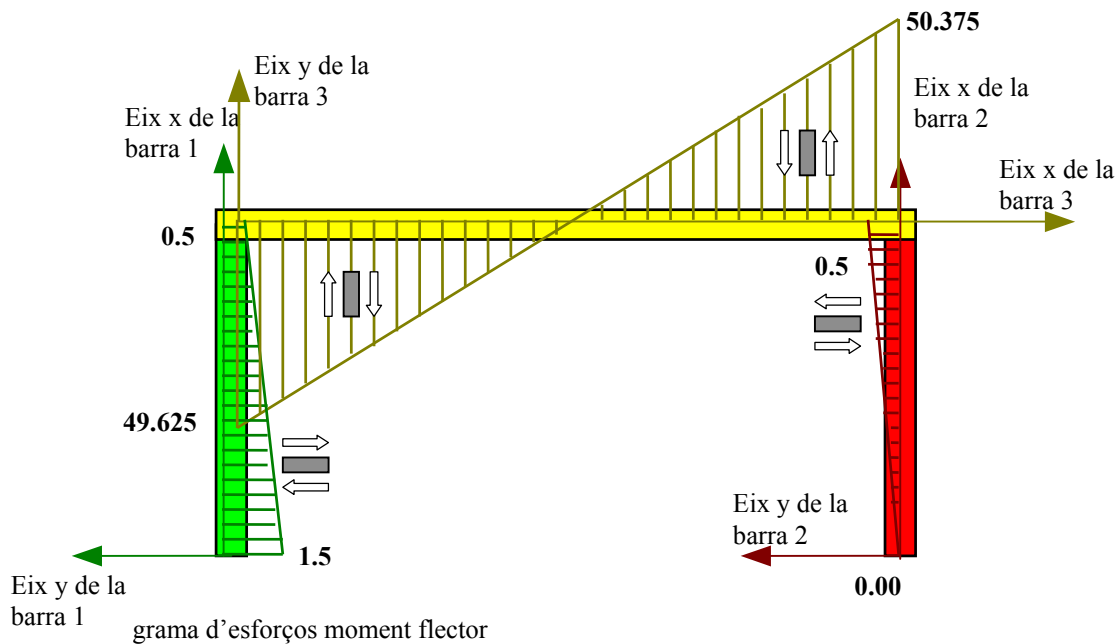
En la secció 3, el valor del tallant sempre és positiu, el que ens indica que la direcció suposada del tallant és real. Així, el signe de l'esforç serà:



En la secció 2, el valor de la força tallant canvia de signe. En la zona inicial de la barra la direcció del tallant no coincideix amb la que suposem i en la par final si. Els signes dels esforços seran:



Un cop definit els valors i els signes dibuixarem el diagrama sobre els eixos locals de cada barra:



Les funcions esforç moment flector per a cada secció són, respectivament:

$$M(x) = -0.1 * x^2 + 1.5 * x$$

$$M(x) = -5 * x^2 + 49.625 * x + 5$$

$$M(x) = -0.05 * x^2$$

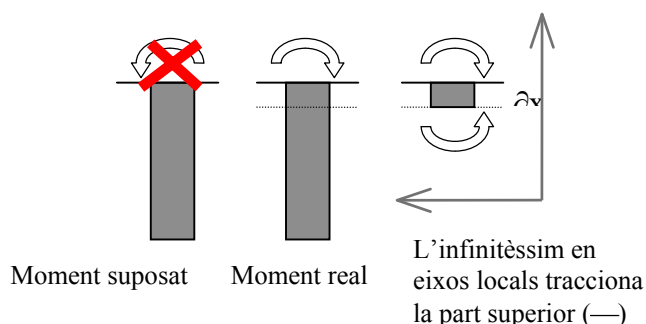
Totes tres funcions són quadràtiques i es poden representar per una paràbola que quedarà definida a partir dels seus punts més característics que són:

- Valor màxim o mínim i coordenada on es produeix
- Coordenades on la funció te valor 0
- Valor de la funció en els extrems de l'interval físic

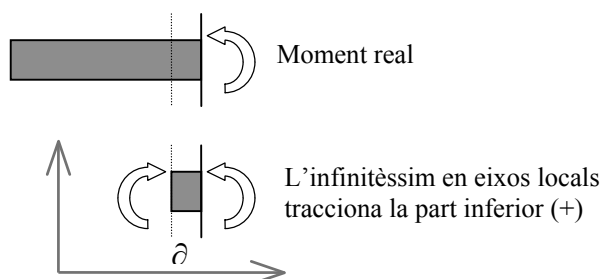
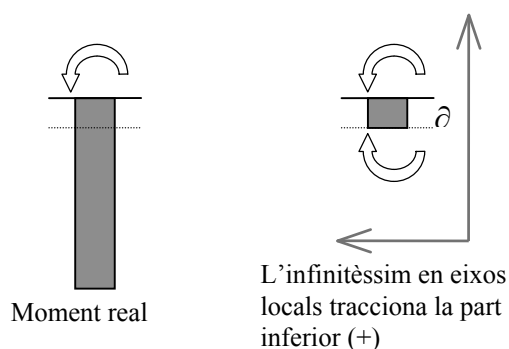
Per a cada funció definirem aquests valors que queden reflexats en la següent taula:

Funció	Màxim o mínim		Funció=0		Límits físics	
	Mx_m (mt)	x_m (m)	x_1 (m)	x_2 (m)	Mx_1 (mt)	Mx_2 (mt)
$M(x) = -0.1 * x^2 + 1.5 * x$	5.625	7.5	0	15	0	5
$M(x) = -5 * x^2 + 49.625 * x + 5$	128.13	4.9625	-0.01	10.025	5	1.25
$M(x) = -0.05 * x^2$	0	0	0	0	0	-1.25

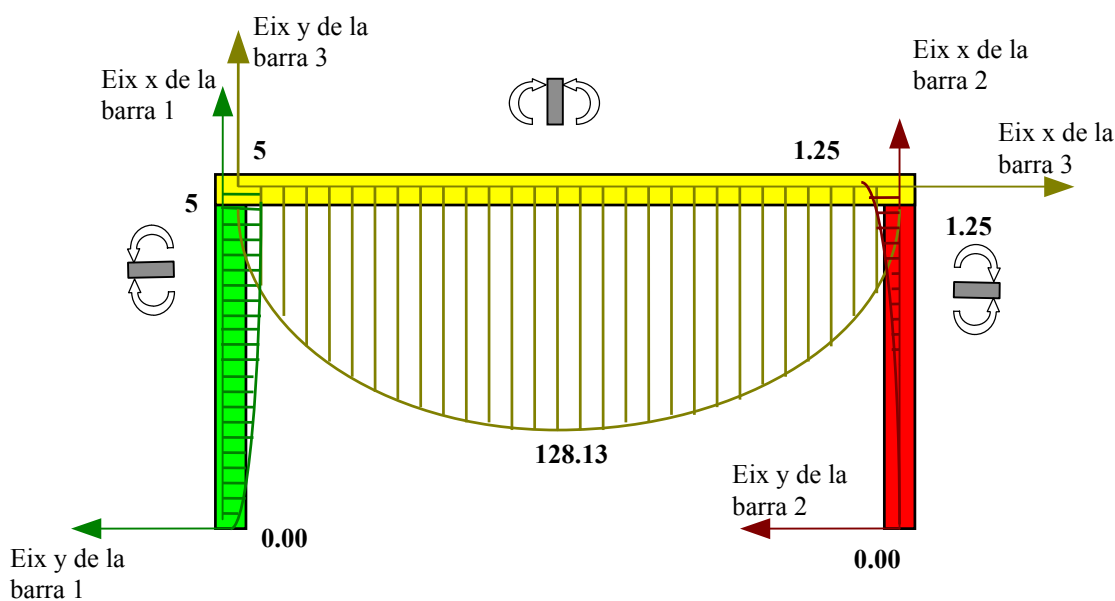
Un cop obtinguts els valors de les forces constatem que algunes d'elles tenen signe negatiu. De la mateixa forma que amb l'axil i el tallant, modificarem la direcció de les forces abans de determinar el signe de l'esforç. En la secció 3 tots els punts tenen moment negatiu. Per tant el signe de l'esforç serà:



En la secció 1 i 2, tots els valors són positius i per tant el signe de l'esforç serà:



Un cop obtinguts els valors i determinats els signes podem dibuixar el diagrama, tenint en compte que en el diagrama de moments flectors la part positiva es dibuixa en la negativa, i la negativa en la positiva. El diagrama serà:



Finalment analitzem els diagrames i definim quins són els punts més desfavorables. En negreta s'han ressaltat els valors de referència que poden produir els efectes més desfavorables. La taula de resultats seria:

SECCIÓ	X	Axil	Moment flector	Tallant
1	0.00	49.625	0.0	1.5
1	5.00	49.625	5.0	0.5
2	4.96	0.5	128.13	0
2	10	0.5	1.25	50.375
3	5	50.375	1.25	0.5

IV. COMPROVACIÓ DELS ESTATS LÍMITS

IV.1. CONCEPTE DE TENSIÓ I RELACIÓ ENTRE ESFORÇOS I TENSIONS.

Definim esforç com la resultant de les càrregues exteriors en una secció d'una estructura (i per tant una força (unitats en tones, Kp, N, ...)) i està associada al centre de gravetat de la secció.

La tensió és el concepte de resultant de les forces intermoleculares que en desplaçar-se (per deformació) generen un desequilibri. La resultant d'aquestes forces està associada a una unitat de superfície (i per tant unitats de força/superfície, com T/m², Kp/cm², N/mm², etc)

Després de tota deformació, o bé l'estructura aconseguirà una posició d'equilibri o bé es trenca. Si es dona el primer cas es perquè la resultant de les tensions està en equilibri amb els esforços.

IV.2. CONCEPTE DE TENSIÓ NORMAL I TENSIÓ TANGENCIAL.

Donat que el nostre càlcul està referit al pla x-y, un sòlid rígid pot patir forces en sentit x, y i moments. En canvi, una partícula (sense massa ni volum) només pot patir forces en sentit x-y, però no moment, donat que no té sentit físic.

El primer cas el podem referir a una secció sòlida i rígida que pot patir axil (forces segons x), tallants (forces segons y) i moments flectors.

El segon cas el podem referir a una partícula de la secció que només es pot desplaçar segons els eixos i, per tant, pot patir només forces segon x o y.

En conseqüència, queda molt clar que l'esforç axil generarà tensions segons l'eix local x i el tallant generarà tensions segons y. A la primera se l'anomena tensió normal, donat que l'eix x d'un element estructural és perpendicular a la seva secció. A la segona se l'anomena tensió tangencial, donat que l'eix y d'un element estructural és paral·lel o tangent a la secció.

No queda tant clar que passa amb el moment flector. No obstant això, l'alumne pot recordar les lliçons de formigó armat on se li feia entendre que la flexió provoca compressions i traccions en les fibres oposades de les seccions i, en conseqüència, tensions normals.

IV.3. TENSIÓ NORMAL PROVOCADA PER L'ESFORÇ AXIL.

Es planteja el problema d'un assaig per compressió una proveta de qualsevol material i es mostra l'estat d'equilibri previ i posterior a l'aplicació de la càrrega.

Es fa constància que en seccions prou allunyades dels punts d'aplicació de les càrregues, les línies de deformació són paral·leles. Per tant que totes les partícules tenen el mateix canvi de posició i la mateixa tensió.

Si la proveta arriba a l'equilibri, és per que la suma de totes les tensions del material igualen a la càrrega exterior o axil. Podem aplicar, de forma genèrica, la següent equació:

$$\int_A \sigma dA = F_{axil}$$

Com hem dit que experimentalment el valor de σ és constant, pot sortir fora del signe integral, per la qual cosa,

$$\sigma \int_A dA = F_{axil}$$

I ens és fàcil determinar quin tensió es genera a partir del valor de l'axil, donat que l'integral del dA aplicat a tota l'àrea és l'àrea total.

$$\sigma = \frac{F_{axil}}{A}$$

IV.4. TENSIÓ NORMAL PROVOCADA PEL MOMENT FLECTOR.

Cal explicar que en condicions normals, la deformació per flexió genera elements semblants a talls de formatge, amb les seccions rectes abans i després de l'aplicació de la càrrega.

Aquesta deformació ens indica que:

Apareixen tensions de tracció i de compressió en les cares oposades.

Les tensions són proporcionals a la seva distància a la fibra neutra que coincideix amb el centre de gravetat de la secció.

Les tensions màximes de tracció i compressió no tenen per què tenir el mateix valor (exemple de biga en T)

Es pot demostrar que la tensió que genera el moment flector es pot calcular amb la següent equació:

$$\sigma_x = \frac{M_x * y}{I_x}$$

on:

M_x és el moment flector en la direcció considerada

y és la distància des del centre de gravetat fins el punt on vull determinar la tensió

I_x és el moment d'inèrcia de la secció en la direcció considerada

El diagrama tensional és una línia recta que talla la secció en el cdg i és màxim en els extrems.

Analitzant la fórmula veiem, tenint en compte que I_x és una constant de la secció, que la tensió és linealment proporcional a la distància al centre de gravetat (y) i, per tant, màxima quant més gran és y . El valor més gran que pot assolir y en seccions simètriques respecte de l'eix local x és $h/2$ (h =alçada o cantell de la secció).

En conseqüència, per obtenir la tensió màxima d'una secció (i per tant el valor comparatiu amb el màxim del material abans de trencar-se) puc substituir y per $h/2$, de forma que la fórmula anterior queda:

$$\sigma_{xmax} = \frac{M_x}{W_x}$$

on :

$$W_x = \frac{I_x}{h / 2}$$

IV.5. TENSIÓ TANGENCIAL TALLANT

PROVOCADA PEL

La càrrega aplicada perpendicularment a un element estructural provoca sempre un esforç de caràcter tallant. La deformació per tallant és molt petita i gairebé mai es té en compte en els

càlculs. No obstant això és una deformació que transforma una llesca rectangular d'element en un romb.

Es pot demostrar que la tensió tallant es pot calcular amb la fórmula:

$$\tau_x = \frac{T * S_x}{I_x * e}$$

on τ_x és la tensió tangencial en una fibra situada a distància y del cdg.
 T és l'esforç tallant de la secció
 S_x és el moment estàtic de la part de perfil entre la fibra on es vol determinar la tensió i la fibra més allunyada del punt en direcció contrària al cdg.
 I_x és el moment d'inèrcia de la secció segons la direcció considerada
 e és el gruix de la secció en la fibra on es vol trobar la tensió.

El diagrama tensional correspon a una paràbola amb màxim en el cdg i nul en els extrems.

En la norma NBE-EA-95 també s'exposa una fórmula aproximada que dona resultats del costat de la seguretat. La fórmula només serveix per a perfils amb simetria vertical, d'ànimes massisses (IPN, IPE, HEB,...). La fórmula és:

$$\tau_x = \frac{T}{A_{ef}}$$

On:

A_{ef} és l'àrea efectiva a tallant, que és l'àrea de les ànimes verticals del perfil, descomptant les parts corbes o arrodonides.

En els prontuaris estan tabulats tots els valors que acabem de definir (tant els que fan referència a axil, moment flector i tallant) per a cada un dels perfils metàl·lics comercials.

IV.6. TENSÍO TOTAL EN UNA SECCIÓ.

En una biga biarticulada sotmesa a una càrrega vertical es dona la particularitat que la secció de moment màxim coincideix amb la secció de tallant 0 (secció M_{max}) i també que la secció de tallant màxim coincideix amb la secció de moment flector 0 (secció T_{max}).

En aquestes condicions, la tensió en la secció M_{max} és perfectament normal (perpendicular al tall), mentre que en la secció T_{max} és perfectament tangencial (paral·lela al tall).

Aquest cas, tot i que molt habitual, no és únic. En estructures hiperestàtiques i especialment en voladissos, els esforços moment flector i tallant coexisteixen en la mateixa secció en els seus valors màxims.

En aquest tipus de secció, en el cdg es produeix un màxim en la tensió tangencial, mentre que la tensió normal és 0. En una fibra extrema, al contrari, es produeix un màxim de la tensió normal i un 0 en la tangencial. En la resta de les seccions, apareix tensió normal i tangencial diferent de 0, i per tant, per determinar el valor de la tensió màxima (o principal), cal compondre-les i calcular la resultant.

En els perfils metàl·lics en forma de **I** o **U**, existeix un punt especialment perillós on la tensió resultant acostuma a ser superior als màxims normal i tangencial de la secció. Aquest punt correspon a la unió entre ala i ànima. Concretament, i donat que en aquesta zona tots els perfils tenen un arrodoniment, es considera el punt situat immediatament sota l'ala, amb el gruix nominal de l'ànima.

D'altre banda, i considerant que la norma estableix valors diferents per les tensions normal i tangencial, la composició de tensions s'ha de fer segons la fórmula:

$$\sigma_l = \sqrt{\sigma_x + 3 \cdot \tau_x}$$

Els valors límits de les tensions pels diferents tipus d'acer són, segons la NBE-EA-95:

Tipus d'acer	Resistència (Kp/cm ²)
A-37	2400
A-42	2600
A-52	3600

Les tensions tangencials màximes es calculen a partir de la normal amb la fórmula:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma}{\sqrt{3}}$$

IV.7. PANDEIG

El fenomen del pandeig només es produeix en aquells elements estructurals sotmesos a compressió simple o composta i està directament lligat al concepte d'**esveltesa**.

Les variables que intervenen en el fenomen, augmentant o disminuint l'esveltesa i en conseqüència el pandeig, són les següents:

- Longitud de l'element estructural. (Augment)
- Graus de llibertat. (Augment)
- Gruix. (Disminueix)

La norma NBE-EA-95 defineix el grau d'esveltesa en una direcció X a partir de l'expressió:

$$\lambda_x = \frac{l_p}{i_{min}}$$

on : l_p és la longitud de pandeig
 i_{\min} és el radi de gir més petit de la secció.

el valor i està tabulat en els prontuaris.

La longitud de pandeig és una longitud fictícia que te en compte els lligams extrems de l'element estructural. La definició seria: longitud de pandeig d'una barra A és la longitud d'un altre barra B que, biarticulada, te el mateix pandeig que la A.

El valor de l_p es troba multiplicant la longitud real per un coeficient α definit segons la taula a partir dels lligams en principi i final de barra:

	Encastament	Articulació	Lliure
Encastament	0,5	0,7	2
Articulació	0,7	1	-
Lliure	2	-	-

Els valors de l'esveltesa estan limitats a:

$\lambda < 25$ No cal calcular el pandeig.

$\lambda > 200$ L'element estructural no pot ser principal (només secundari).

$\lambda > 250$ Només pot ser un tirant a tracció.

Pels valors intermitjos, la norma defineix un coeficient ω o coeficient de pandeig que majora la càrrega axil per simular l'efecte del pandeig.

El coeficient de pandeig està tabulat en els apunts de càlcul d'estructures (Taules).

IV.8. ESTATS LÍMITS.

En estructura metàl·lica cal superar els següents estats límits:

- E.L. servei de deformació
- E.L. servei de vibració
- **E.L. últim de trencament**
- **E.L. últim de pandeig**
- E.L. últim de fatiga.

Només estudiarem els estats límits ressaltats en negreta.

Superar l'e.l. últim de **trencament** vol dir que l'estructura carregada amb les forces exteriors (norma NBE-AE-88) aplicant les hipòtesis de càlcul i els corresponents coeficients de seguretat (norma NBE.EA-95), en cap punt dels elements estructurals la tensió és superior al límit elàstic del material.

$$\sigma_e \leq \sigma_{max}$$

El valor de σ_e s'obté de sumant les accions de les tensions a partir dels esforços actuants, explicats en els apartats 3, 4, 5 i 6.

L'estat límit últim de **pandeig** es supera, quan, amb els esforços calculats per superar l'estat límit anterior, la tensió de pandeig és inferior al límit elàstic del material. La formulació que dona la norma NBE-EA-95 és diferent a la que es feia servir en la MV-103-1972. (és pràcticament la única cosa que canvia)

$$\sigma_p = \frac{N}{A} * \omega + \frac{M_{x_{0,4l}}}{W_x}$$

on	N	és l'axil de càlcul
	A	és l'àrea transversal del perfil metàl·lic
	ω	és el coeficient de pandeig
	$M_{x_{0,4l}}$	és el moment que produeix uns efectes concomitants més forts en una zona central de 0,4 de la longitud del perfil
	W_x	és el mòdul resistent de la secció en les direccions X o Y.

4.9 EXEMPLES

4.9.1 Càlcul de tensions

Suposem un perfil IPE-160 sotmès a un esforç tallant de 8 T i un moment flector de 2 mT. Calcular la tensió normal màxima, la tensió tangencial màxima i la tensió composta (total) màxima. Dibuixar els diagrames tensionals.

1- La tensió tangencial màxima es calcula aplicant l'equació:

$$\tau_x = \frac{T * S_x}{I_x * e}$$

on

$$\begin{aligned} T &= 8000 \text{ Kp} \\ S_x &= 61.9 \text{ cm}^3 \\ I_x &= 869 \text{ cm}^4 \\ e &= 0,5 \text{ cm} \end{aligned}$$

Aplicant els valors (el resultat s'obté en Kp/cm²):

$$\tau_{max} = \frac{8000 * 61.9}{869 * 0,5} = 1139,70$$

2- La tensió normal màxima s'obté aplicant l'equació:

$$\sigma_x = \frac{M_x * y}{I_x}$$

o bé, si només ens interessa el valor màxim:

$$\sigma_{x \text{ max}} = \frac{M_x}{W_x}$$

on

$$\begin{aligned} M_x &= 2 \text{ mT} = 200.000 \text{ cmKp} \\ W_x &= 109 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Aplicant valors (unitats en Kp/cm²)

$$\sigma_{max} = \frac{200.000}{109} = 1834$$

3- La tensió normal total (composició vectorial de les tensions) s'obté amb la fórmula:

$$\sigma_t = \sqrt{\sigma_x + 3 * \tau_x}$$

on les tensions σ_x i τ_x són les produïdes en el punt més desfavorable, que com hem comentat es produeix en el punt d'unió entre ala i ànima.

aplicant:

$$\sigma_x = \frac{M_x * y}{I_x}$$

on

$$y = (h/2) - e_1 = 8 - 0,74 = 7,26 \text{ cm, s'obté, en Kp/cm}^2:$$

$$\sigma_{max} = \frac{200.000 * 7,26}{869} = 1670$$

i aplicant:

$$\tau_x = \frac{T * S_x}{I_x * e}$$

on S_x el moment estàtic de l'ala respecte del centre de gravetat, en cm^3 :

$$S_x = \int A * \partial x = 8,2 * 0,74 * 7,63 = 46,29$$

La tensió tangencial resulta, en Kp/cm^2 :

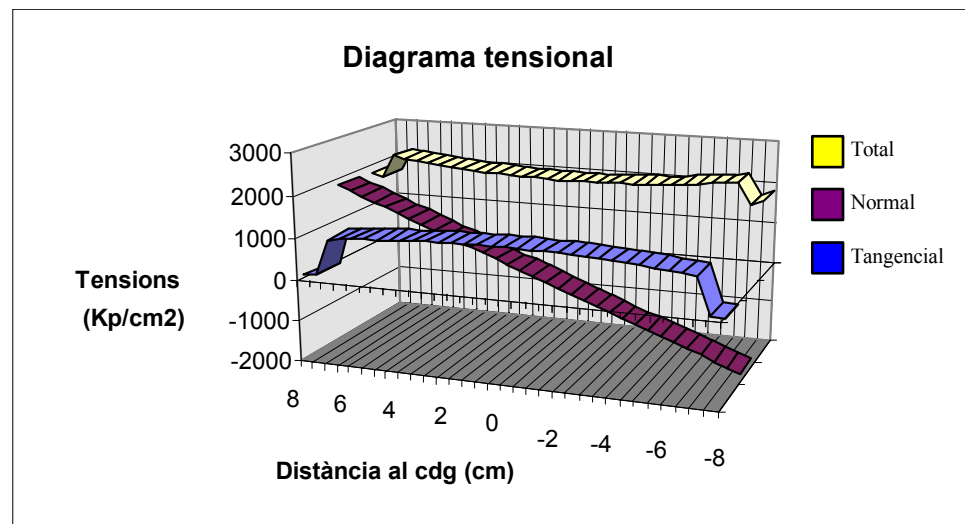
$$\tau_{max} = \frac{8000 * 46,29}{869 * 0,5} = 852,3$$

La tensió composta serà (en Kp/cm^2)

$$\sigma_l = \sqrt{1670^2 + (3 * 852^2)} = 2228$$

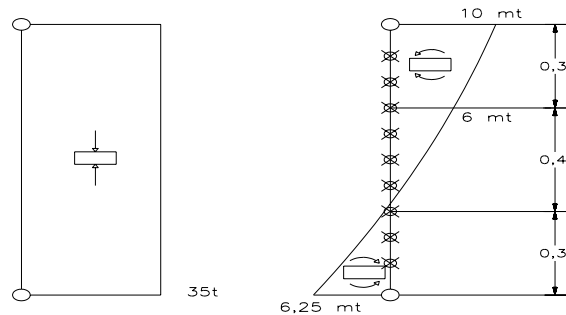
En tots els casos, la tensió normal i tangencial màximes i principal estan per sota del límit elàstic del material que és $2600 Kp/cm^2$

Si les funcions σ_x, τ_x , i σ_l les dibuixem per qualsevol valor de la distància al centre de gravetat obtenim els diagrames tensionals, on es pot veure com, de vegades, la tensió principal és més desfavorable en el punt d'unió entre ala i ànima.



4.9.2 Càlcul de la tensió de pandeig

Un pilar metàl·lic HEB-200 bi-articulat te els següents diagrames d'esforços normals (axil i moment flector).



Calcular la seva tensió de pandeig.

Per determinar la tensió de pandeig aplicarem la fórmula:

$$\sigma_p = \frac{N}{A} * \omega + \frac{Mx_{0,4l}}{W_x}$$

on tots els valors són coneguts excepte el coeficient de pandeig ω . Aquest coeficient el determinarem de la taula dels apunts (o de la norma NBE-EA-95) a partir del valor de l'esveltesa del pilar λ , a partir de la fórmula:

$$\lambda_x = \frac{l_p}{i_{min}}$$

on l_p és la longitud real pel coeficient α , que en aquest cas és de 1. Per tant $l_p = 500$ cm.

El radi de gir mínim (i_{min}) està tabulat en el prouari i és de 5,07 cm

Per tant, aplicant els valors:

$$\lambda = \frac{500}{5,07} = 98,6$$

Aquest valor es situa entre el 20 i el 200, mínim i màxim respectivament, per la qual cosa cal calcular el pilar a pandeig.

El coeficient de pandeig corresponent a aquesta esveltesa és: $\omega = 1,96$

L'esforç axil màxim és de 35 t i el moment flector més desfavorable en la zona central de 0,4 l és de 6 mt. Per tant, tenint en compte les unitats de Kp i cm:

$$\sigma_p = \frac{35.000}{78,1} * 1,96 + \frac{600.000}{570} = 878,36 + 1.052,63 = 1931$$

que és inferior a 2600 Kp/cm², límit elàstic màxim del material.

4.9 EXEMPLES

4.9.1 Càlcul de tensions

Suposem un perfil IPE-160 sotmès a un esforç tallant de 8 T i un moment flector de 2 mT. Calcular la tensió normal màxima, la tensió tangencial màxima i la tensió composta (total) màxima. Dibuixar els diagrames tensionals.

1- La tensió tangencial màxima es calcula aplicant l'equació:

$$\tau_x = \frac{T * S_x}{I_x * e}$$

on

$$\begin{aligned} T &= 8000 \text{ Kp} \\ S_x &= 61.9 \text{ cm}^3 \\ I_x &= 869 \text{ cm}^4 \\ e &= 0,5 \text{ cm} \end{aligned}$$

Aplicant els valors (el resultat s'obté en Kp/cm²):

$$\tau_{max} = \frac{8000 * 61.9}{869 * 0,5} = 1139,70$$

2- La tensió normal màxima s'obté aplicant l'equació:

$$\sigma_x = \frac{M_x * y}{I_x}$$

o bé, si només ens interessa el valor màxim:

$$\sigma_{x \text{ max}} = \frac{M_x}{W_x}$$

on

$$\begin{aligned} M_x &= 2 \text{ mT} = 200.000 \text{ cmKp} \\ W_x &= 109 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Aplicant valors (unitats en Kp/cm²)

$$\sigma_{max} = \frac{200.000}{109} = 1834$$

3- La tensió normal total (composició vectorial de les tensions) s'obté amb la fórmula:

$$\sigma_t = \sqrt{\sigma_x + 3 * \tau_x}$$

on les tensions σ_x i τ_x són les produïdes en el punt més desfavorable, que com hem comentat es produeix en el punt d'unió entre ala i ànima.

aplicant:

$$\sigma_x = \frac{M_x * y}{I_x}$$

on

$$y = (h/2) - e_1 = 8 - 0,74 = 7,26 \text{ cm, s'obté, en Kp/cm}^2:$$

$$\sigma_{max} = \frac{200.000 * 7,26}{869} = 1670$$

i aplicant:

$$\tau_x = \frac{T * S_x}{I_x * e}$$

on S_x el moment estàtic de l'ala respecte del centre de gravetat, en cm^3 :

$$S_x = \int A * \partial x = 8,2 * 0,74 * 7,63 = 46,29$$

La tensió tangencial resulta, en Kp/cm^2 :

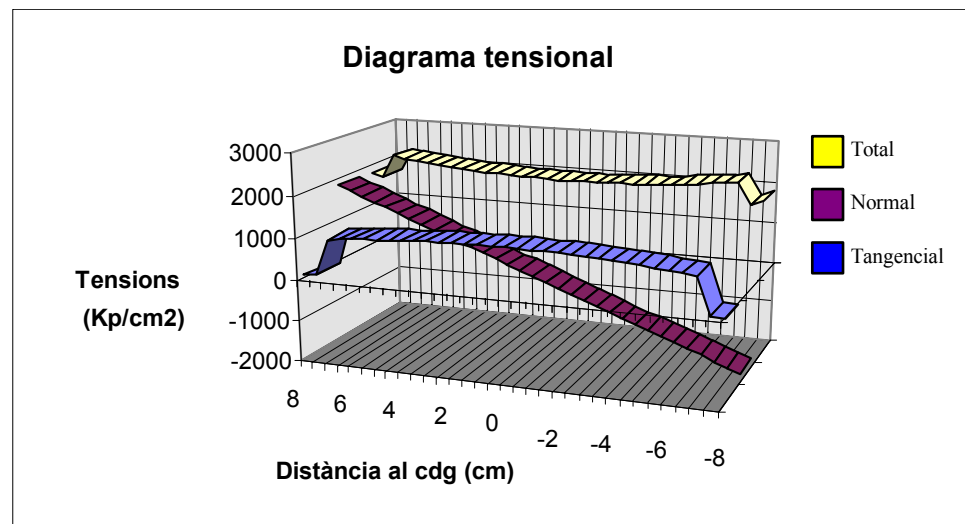
$$\tau_{max} = \frac{8000 * 46,29}{869 * 0,5} = 852,3$$

La tensió composta serà (en Kp/cm^2)

$$\sigma_l = \sqrt{1670^2 + (3 * 852^2)} = 2228$$

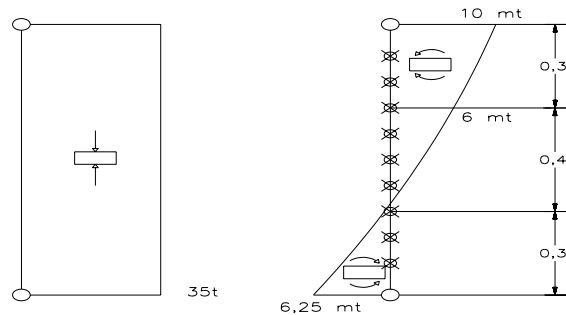
En tots els casos, la tensió normal i tangencial màximes i principal estan per sota del límit elàstic del material que és $2600 Kp/cm^2$

Si les funcions σ_x, τ_x , i σ_l les dibuixem per qualsevol valor de la distància al centre de gravetat obtenim els diagrames tensionals, on es pot veure com, de vegades, la tensió principal és més desfavorable en el punt d'unió entre ala i ànima.



4.9.2 Càlcul de la tensió de pandeig

Un pilar metàl·lic HEB-200 bi-articulat te els següents diagrames d'esforços normals (axil i moment flector).



Calcular la seva tensió de pandeig.

Per determinar la tensió de pandeig aplicarem la fórmula:

$$\sigma_p = \frac{N}{A} * \omega + \frac{Mx_{0,41}}{W_x}$$

on tots els valors són coneguts excepte el coeficient de pandeig ω . Aquest coeficient el determinarem de la taula dels apunts (o de la norma NBE-EA-95) a partir del valor de l'esveltesa del pilar λ , a partir de la fórmula:

$$\lambda_x = \frac{l_p}{i_{min}}$$

on l_p és la longitud real pel coeficient α , que en aquest cas és de 1. Per tant $l_p = 500$ cm.

El radi de gir mínim (i_{min}) està tabulat en el prouari i és de 5,07 cm

Per tant, aplicant els valors:

$$\lambda = \frac{500}{5,07} = 98,6$$

Aquest valor es situa entre el 20 i el 200, mínim i màxim respectivament, per la qual cosa cal calcular el pilar a pandeig.

El coeficient de pandeig corresponent a aquesta esveltesa és: $\omega = 1,96$

L'esforç axil màxim és de 35 t i el moment flector més desfavorable en la zona central de 0,4 l és de 6 mt. Per tant, tenint en compte les unitats de Kp i cm:

$$\sigma_p = \frac{35.000}{78,1} * 1,96 + \frac{600.000}{570} = 878,36 + 1.052,63 = 1931$$

que és inferior a 2600 Kp/cm², límit elàstic màxim del material.