Capítol 4

Equacions diferencials ordinàries de 1er. ordre.

4.1 Resum teòric i exemples.

4.1.1 Definicions bàsiques

Tipus d'equacions diferencials

Una *equació diferencial* és una equació que conté una funció i les seves derivades. Si la funció depèn d'una única variable independent x es diu que és *ordinària* (edo), en contrast amb les equacions diferencials de funcions de vàries variables, les quals contenen derivades parcials i s'anomenen *equacions en derivades parcials (*edp*)*. L'*ordre* d'una equació diferencial ordinària és el màxim ordre de derivada que intervé en l'equació.

Exemple 4.1 *Per a les equacions diferencials següents, identifiqueu el tipus i l'ordre.*

$(a)\ \ y'' - 5y' + \sin x = 0 \qquad\qquad (b)\ \ y' = x^2$

$(c)\ \ y''' - y'' \cdot \sin x + y' \cdot \cos x + y = e^x \qquad\qquad (d)\ \ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = xy$

Les equacions (a), (b) i (c) són equacions diferencials ordinàries ja que la funció y depèn només de la variable x. L'ordre de l'equació (a) és 2, de l'equació (b) és 1 i de la (c) és 3. L'equació (d) és una equació en derivades parcials, la funció incògnita f depèn de les variables x i y.

Solucions

S'anomena *solució o integral d'una edo* a qualsevol família de funcions de la forma $y = \varphi(x)$ que satisfaci l'equació. Normalment aquesta solució depèn d'una o més constants i es diu *solució general de l'equació.* Quan fixem certs valors de la funció solució - condicions inicials - queden determinats els valors de les constants obtenint una *solució particular.*

Exemple 4.2 *Verifiqueu que l'equació* $y' = -y + x + 1$ *té com a solució general la funció* $y(x) = x + Ke^{-x}$*. Determineu una solució particular que verifiqui* $y(1) = 3$.

Calculem la derivada de la funció i substituint la funció i la seva derivada a l'equació, obtenim:

$$y'(x) = 1 - Ke^{-x}$$

$$1 - Ke^{-x} = -x - Ke^{-x} + x + 1 = 1 - Ke^{-x}.$$

Ja que $y(x)$ compleix l'equació, $y(x)$ és solució.

Si fixem que $y(1) = 3$, resulta la relació

$$1 + K\,e^{-1} = 3$$

d'on s'obté

$$K = 2\,e$$

La solució particular que verifica la condició indicada és

$$y(x) = x + 2e^{1-x}$$

Problema de Cauchy

El *problema de Cauchy* o *de valors inicials* consisteix en determinar una solució particular $y(x)$ definida sobre l'interval $[a, b]$ a partir de la condició $y(a) = y_0$. És a dir:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

on $x \in [a, b]$, $y(x), y_0 \in R$ i $f : [a, b] \times R \longrightarrow R$ és una funció "prou regular"per assegurar l'existència i unicitat de la solució.

Exemple 4.3 *Determineu la solució del problema de valor inicial definit per:*

$$\begin{cases} y' = -y + x + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Hem vist a l'Exemple 2 que la solució general és $y(x) = x + Ke^{-x}$. Imposant la condició $y(0) = 1$ i procedint de forma similar a l'exemple anterior s'obté

$$y(x) = x + e^{-x}$$

4.1.2 Resolució numèrica d'equacions diferencials de 1er. ordre

En els llibres adequats podem trobar tot un seguit de tècniques per a la resolució exacta de diferents tipus d'equacions diferencials: equacions lineals, de variables separables, homogènies, exactes, etc. De forma anàloga a com passa en el cas del problema d'integració, la resolució exacta pot ser inviable per diferents motius, i haurem d'intentar determinar una solució numèrica aproximada. En aquest capítol ens referirem a la resolució numèrica del problema de Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(a) = y_0 \end{cases} \qquad a \leq x \leq b$$

Inicialment dividim l'interval $[a, b]$ mitjançant $N + 1$ punts equidistants que anomenarem *punts de la xarxa.*

$$x_i = a + ih \quad \text{on} \ \ h = \frac{b-a}{N} \ \ , \ \ i = 0, 1, ..., N$$

L'objectiu de la resolució numèrica és cercar, aproximadament, els valors de la funció solució en els punts de la xarxa. Representarem per $y(x_i)$ el valor exacte de la funció solució en el punt x_i, i per ω_i el valor aproximat donat pel mètode numèric, és a dir

$$y(x_i) \simeq \omega_i$$

El valor inicial ω_0 ve donat per la condició inicial, és a dir, $\omega_0 = y(x_0) = y(a) = y_0$. Com podrem veure en els apartats següents, els diferents mètodes numèrics ens permeten calcular de forma recurrent les aproximacions restants $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N$. La diferència $e_i = |y(x_i) - \omega_i|$ s'anomena *error de truncament al pas i-èsim.*

Exemple 4.4 *Donat el següent problema de valor inicial, sobre l'interval* $[0,1]$

$$\begin{cases} y' = -y + x + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

determineu la solució aproximada que resulta d'aplicar la relació de recurrència

$$\omega_{i+1} = 0.9\,\omega_i + 0.1\,x_i + 0.1$$

emprant una xarxa d'11 punts. Calculeu els errors de truncament.

En primer lloc, determinem els punts de la xarxa. Per això, calculem el pas h sabent que $N = 10$.

$$h = \frac{1-0}{10} = 0.1$$

Per tant, els punts de la xarxa seran:

$$x_i = 0 + ih = 0 + i0.1 = 0.1i$$

Calculem ara el valor aproximat a partir de la fórmula recurrent:

$$\begin{aligned}
\omega_0 &= y(x_0) = y(0) = 1 \\
\omega_1 &= 0.9\omega_0 + 0.1x_0 + 0.1 = 0.9 \cdot 1 + 0.1 \cdot 0 + 0.1 = 1 \\
\omega_2 &= 0.9\omega_1 + 0.1x_1 + 0.1 = 0.9 \cdot 1 + 0.1 \cdot 0.1 + 0.1 = 1.01 \\
\omega_3 &= 0.9\omega_2 + 0.1x_2 + 0.1 = 0.9 \cdot 1.01 + 0.1 \cdot 0.2 + 0.1 = 1.029 \\
& \ldots \\
\omega_{10} &= 0.9\omega_9 + 0.1x_9 + 0.1 = 0.9 \cdot 1.2874205 + 0.1 \cdot 0.9 + 0.1 = 1.3486784
\end{aligned}$$

Per calcular els errors de truncament en cada pas, hem de calcular el valor de la funció solució en cada punt de la xarxa i fer-ne la diferència. La funció solució exacta l'hem calculada en l'Exemple 3 i és

$$y(x) = x + e^{-x}$$

En general, aquests resultats s'escriuen en una taula com la següent:

i	x_i	ω_i	$y(x_i)$	$e_i = \lvert y(x_i) - \omega_i \rvert$
0	0	1	1	0
1	0.1	1.0	1.0048374	0.0048374
2	0.2	1.01	1.0187308	0.0087308
3	0.3	1.029	1.0408182	0.0118182
4	0.4	1.0561	1.0703201	0.0142201
5	0.5	1.09049	1.1065307	0.0160407
6	0.6	1.131441	1.1488116	0.0173706
7	0.7	1.1782969	1.1965853	0.0182884
8	0.8	1.2304672	1.2493290	0.0188618
9	0.9	1.2874205	1.3065697	0.0191492
10	1	1.3486785	1.3678794	0.0192009

Amb això, veiem que obtenim uns valors aproximats de la funció solució, en uns punts determinats, però no tenim la funció solució. Com hem vist en el capítol d'interpolació, podem trobar el polinomi interpolador d'aquests $N+1$ punts, que serà la solució aproximada de l'equació. En aquest cas, el polinomi interpolador és:

$$\begin{aligned} p(x) &= -0.0014x^{10} + 0.0065x^9 - 0.0130x^8 + 0.0143x^7 - 0.0082x^6 \\ &\quad -0.0064x^5 + 0.0501x^4 - 0.1947x^3 + 0.5550x^2 - 0.0536x + 1 \end{aligned}$$

Gràficament, podem observar que l'error que cometem a l'agafar $p(x)$ com a solució de l'equació diferencial és petit. Dibuixem la funció solució $y(x) = x + e^{-x}$ i alguns punts del polinomi perquè es vegi millor l'error comès.

4.1.3 Mètodes de Taylor.

Aquests mètodes es basen en aproximar la funció $y(x)$ en l'interval $[x_i, x_{i+1}]$ amb $i = 0, 1, ..., N-1$ pel desenvolupament de Taylor fins a ordre k al voltant d'x_i.

Mètode d'Euler.

Es tracta d'aproximar la solució pel desenvolupament de Taylor d'ordre 1. Geomètricament, correspon a aproximar la solució per la recta tangent.

L'algorisme del mètode d'Euler ve donat per:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \omega_0 = y(a) & \\ \omega_{i+1} = \omega_i + hf(x_i, \omega_i), & \qquad i = 0 \div N-1 \end{array}}$$

Exemple 4.5 *Resoleu pel mètode d'Euler amb N=10, el problema de valors inicials*

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = -y + x + 1 \\ y(0) = 1 \end{array} \right. \qquad 0 \leq x \leq 1$$

En primer lloc, busquem els punts de la xarxa

$$\begin{aligned} h &= \frac{1-0}{10} = 0.1 \\ x_i &= 0 + ih = 0.1i \end{aligned}$$

Després, identifiquem la funció $f(x, y)$ aïllant y':

$$f(x, y) = -y + x + 1$$

i busquem la relació de recurrència que ha de complir el mètode d'Euler substituint h i $f(x, y)$ pels seus valors corresponents:

$$\omega_{i+1} = \omega_i + h(-\omega_i + x_i + 1) = \omega_i - 0.1\omega_i + 0.1x_i + 0.1 = 0.9\omega_i + 0.1x_i + 0.1$$

Per últim, es tracta de calcular el valor aproximat de la funció solució en els punts de la xarxa com hem fet en l'Exemple 4.

Ens adonem que la fórmula de recurrència que hem trobat és la mateixa que la que teníem en l'exemple anterior, per tant, la solució aproximada és

x_i	ω_i
0	1
0.1	1.0
0.2	1.01
0.3	1.029
0.4	1.0561
0.5	1.09049
0.6	1.131441
0.7	1.1782969
0.8	1.2304672
0.9	1.2874205
1	1.3486785

Mètode de Taylor d'ordre 2.

En aquest cas, s'aproxima la solució a partir del desenvolupament fins a ordre 2. Geomètricament, equival a considerar aproximacions per paràboles.

L'algorisme del mètode de Taylor d'ordre 2 ve donat per:

$$\boxed{\begin{array}{l} \omega_0 = y(a) \\ \omega_{i+1} = \omega_i + hf(x_i,\omega_i) \;+ \dfrac{h^2}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_i,\omega_i) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_i,\omega_i) f(x_i,\omega_i)\right), \\ \qquad\qquad i = 0 \div N-1 \end{array}}$$

Per a ordres més grans, el càlcul de les derivades es complica força i no són recomanables.

Exemple 4.6 *Resoleu pel mètode de Taylor d'ordre 2 amb N=10, el problema de valors inicials*

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = -y + x + 1 \\ y(0) = 1 \end{array} \right. \qquad 0 \le x \le 1$$

i calculeu els errors de truncament a cada pas.

Com en el cas anterior, determinem els punts de la xarxa i identifiquem la funció $f(x,y)$ aïllant y'.

$$\begin{aligned} h &= \frac{1-0}{10} = 0.1 \\ x_i &= ih = 0.1i \\ f(x,y) &= -y+x+1 \end{aligned}$$

Per buscar la relació de recurrència que es compleix en aquest cas, abans hem de fer els càlculs de les derivades parcials que apareixen en l'algorisme.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -1$$

Substituint a la fórmula s'obté:

$$\begin{aligned} \omega_{i+1} &= \omega_i + 0.1(-\omega_i + x_i + 1) + \frac{(0.1)^2}{2}(1 - 1(-\omega_i + x_i + 1)) = \\ &= \omega_i - 0.1\omega_i + 0.1x_i + 0.1 + 0.005 + 0.005\omega_i - 0.005x_i - 0.005 = \\ &= 0.905\omega_i + 0.095x_i + 0.1. \end{aligned}$$

Un cop trobada la fórmula recurrent es tracta de calcular els valors aproximats de la funció solució. En aquest cas, com que coneixem la solució exacta buscarem també els errors de truncament a cada pas.

i	x_i	ω_i	$y(x_i)$	e_i
0	0	1	1	0
1	0.1	1.005	1.0048374	0.0001626
2	0.2	1.019025	1.0187308	0.0002942
3	0.3	1.0412176	1.0408182	0.0003994
4	0.4	1.0708019	1.0703201	0.0004818
5	0.5	1.1070757	1.1065307	0.0005450
6	0.6	1.1494035	1.1488116	0.0005919
7	0.7	1.1972102	1.1965853	0.0006249
8	0.8	1.2499753	1.249329	0.0006462
9	0.9	1.3072276	1.3065697	0.0006579
10	1	1.3685410	1.3678794	0.0006616

Ens adonem que aquest mètode dóna menys error que el mètode d'Euler.

4.1.4 Mètodes de Runge-Kutta.

Els mètodes de Runge-Kutta venen definits per algorismes de la forma

$$\begin{cases} \omega_0 = y(a) \\ \omega_{i+1} = \omega_i + h \sum_{j=1}^{k} c_j \cdot k_j^i \qquad i = 0 \div N-1 \end{cases}$$

on $k \in N$ prefixat, c_j constants i k_j^i funcions definides per la fórmula recurrent

$$\begin{cases} k_1^i = f(x_i, \omega_i) \\ k_j^i = f\left(x_i + a_j h, \omega_i + h \sum_{m=1}^{j-1} b_{jm} \cdot k_m^i\right) \qquad j = 2 \div k \end{cases}$$

amb a_j, b_{jm} constants a determinar.

En destacarem dos mètodes:

Mètode de Runge-Kutta d'ordre 2 (RK-2).

En aquest cas, d'algorismes n'hi ha infinits ja que el sistema d'equacions que s'obté a l'imposar que el mètode tingui ordre 2 és indeterminat.

Per $a_2 = b_{21} = 1$ i $c_1 = c_2 = 0.5$, l'algorisme és:

$$\boxed{\begin{array}{l} \omega_0 = y(a) \\ \omega_{i+1} = \omega_i + \frac{h}{2}\left(f(x_i, \omega_i) + f(x_i + h, \omega_i + hf(x_i, \omega_i))\right) \quad i = 0 \div N-1 \end{array}}$$

que coincideix amb el què es coneix com *mètode d'Euler modificat.*

Exemple 4.7 *Resoleu pel mètode de Runge-Kutta d'ordre 2 amb N=10, el problema de valors inicials*

$$\begin{cases} y' = -y + x + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad 0 \le x \le 1$$

i calculeu els errors de truncament a cada pas.

Com en el cas anterior, determinem els punts de la xarxa i identifiquem la funció $f(x, y)$ aïllant y'.

$$\begin{aligned} h &= \frac{1-0}{10} = 0.1 \\ x_i &= ih = 0.1i \\ f(x, y) &= -y + x + 1 \end{aligned}$$

Per buscar la relació de recurrència que es compleix en aquest cas substituim a la fórmula cada expressió

$$\begin{aligned}
\omega_{i+1} &= \omega_i + \frac{h}{2}\left(f\left(x_i,\omega_i\right) + f\ \left(x_i + h, \omega_i + hf\left(x_i,\omega_i\right)\right)\right) = \\
&= \omega_i + \frac{0.1}{2}\left(\left(-\omega_i + x_i + 1\right) + f\left(x_i + 0.1, \omega_i + 0.1(-\omega_i + x_i + 1)\right)\right) = \\
&= \omega_i + \frac{0.1}{2}\left(\left(-\omega_i + x_i + 1\right) - \left(\omega_i + 0.1(-\omega_i + x_i + 1)\right) + (x_i + 0.1) + 1\right) = \\
&= \omega_i + \frac{0.1}{2}\left(-1.9\omega_i + 1.9x_i + 2\right) = \\
&= \omega_i - 0.095\omega_i + 0.095x_i + 0.1 = \\
&= 0.905\omega_i + 0.095x_i + 0.1.
\end{aligned}$$

Trobada la fórmula recurrent es tracta de calcular els valors aproximats de la funció solució. Ens adonem que obtenim la mateixa fórmula recurrent que en l'exemple del mètode de Taylor d'ordre 2 i, per tant, la taula de resultats coincideix.

Mètode de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK-4).

L'algorisme del mètode RK-4 és:

$$\boxed{\begin{array}{l}
\omega_0 = y(a) \\
\omega_{i+1} = \omega_i + \dfrac{h}{6}\left(k_1^i + 2k_2^i + 2k_3^i + k_4^i\right) \qquad i = 0 \div N-1 \\
\text{on} \left\{\begin{array}{l}
k_1^i = f\left(x_i,\omega_i\right) \\
k_2^i = f\left(x_i + \frac{h}{2}, \omega_i + \frac{h}{2}k_1^i\right) \\
k_3^i = f\left(x_i + \frac{h}{2}, \omega_i + \frac{h}{2}k_2^i\right) \\
k_4^i = f\ \left(x_i + h, \omega_i + hk_3^i\right)
\end{array}\right.
\end{array}}$$

Exemple 4.8 *Resoleu pel mètode de Runge-Kutta d'ordre 4 amb N=10, el problema de valors inicials*

$$\left\{\begin{array}{l} y' = -y + x + 1 \\ y(0) = 1 \end{array}\right. \qquad 0 \le x \le 1$$

i calculeu els errors de truncament a cada pas.

Determinem els punts de la xarxa i la funció $f(x,y)$, que són igual que en els exemples anteriors. Per calcular la fórmula de recurrència hem de començar determinant els valors de k_j^i.

$$\begin{aligned}
k_1^i &= -\omega_i + x_i + 1 \\
k_2^i &= f\left(x_i + 0.05,\ \omega_i + 0.05\left(-\omega_i + x_i + 1\right)\right) = \\
&= -0.95\omega_i + 0.95x_i + 1 \\
k_3^i &= f\left(x_i + 0.05,\ \omega_i + 0.05\left(-0.95\omega_i + 0.95x_i + 1\right)\right) = \\
&= -0.9525\omega_i + 0.9525x_i + 1 \\
k_4^i &= f\left(x_i + 0.05,\ \omega_i + 0.05\left(-0.9525\omega_i + 0.9525x_i + 1\right)\right) = \\
&= -0.90475\omega_i + 0.90475x_i + 1
\end{aligned}$$

Substituim els valors en la recurrència i obtenim:

$$\omega_{i+1} = 0.9048375\omega_i + 0.0951625x_i + 0.1$$

Seguint el mateix procediment que en els exemples anteriors, la taula amb els valors aproximats de la funció solució i amb l'error de truncament a cada pas és:

i	x_i	ω_i	$y(x_i)$	e_i
0	0	1	1	0
1	0.1	1.0048375	1.0048374	0.0000001
2	0.2	1.0187309	1.0187308	0.0000001
3	0.3	1.0408184	1.0408182	0.0000002
4	0.4	1.0703203	1.0703201	0.0000002
5	0.5	1.1065309	1.1065307	0.0000002
6	0.6	1.1488120	1.1488116	0.0000004
7	0.7	1.1965857	1.1965853	0.0000004
8	0.8	1.2493294	1.2493290	0.0000004
9	0.9	1.3065701	1.3065697	0.0000004
10	1	1.3678799	1.3678794	0.0000005

4.2 Problemes resolts.

Problema 4.1 *Trobeu l'algorisme del mètode d'Euler a partir d'una aproximació de l'àrea que queda per sota de la funció $f(x, y)$ en l'interval $[a, b]$, considerant la suma de les àrees per l'esquerra en cada subinterval.*

Considerem el problema de valors inicials

$$y' = f(x, y), \qquad y(a) = y_o \qquad \text{amb} \quad a \leq x \leq b$$

i els punts de la xarxa

$$x_i = a + ih \qquad \text{on } h = \frac{b-a}{N}$$

Aplicant el teorema fonamental del càlcul i la regla de Barrow al primer membre de la igualtat obtenim:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y)\ dx \ = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x)\ dx \ = \ y(x_{i+1}) - y(x_i)$$

Considerant l'àrea dels rectangles d'altura la part esquerra de la funció en l'interval i base h, per cada subinterval obtenim:

$$(x_{i+1} - x_i) \cdot f\left(x_i, y_i\right) = h \cdot f\left(x_i, y_i\right)$$

Igualant els dos membres de l'equació tenim:

$$\begin{aligned} y(x_{i+1}) - y(x_i) &= h \cdot f\left(x_i, y_i\right) \\ y(x_{i+1}) &= y(x_i) + h \cdot f\left(x_i, y_i\right) \end{aligned}$$

i al considerar les successives aproximacions del valor exacte s'obté la fórmula del mètode d'Euler

$$\omega_{i+1} = \omega_i + h \cdot f\left(x_i, \omega_i\right)$$

Problema 4.2 *Useu el mètode d'Euler per aproximar la solució del problema de valor inicial:*

$$\begin{cases} y' = -xy + \dfrac{4x}{y} & 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

amb $h = 0.25$.

Calculeu l'error de truncament a cada pas sabent que $y^2(x) = 4 + Ce^{-x^2}$ és solució general de l'equació.

En primer lloc, busquem els punts de la xarxa (en aquest cas, ja ens donen el pas).

$$x_i = 0 + i\,0.25 = 0.25\,i$$

Després, identifiquem la funció $f\,(x, y)$ aïllant y'.

$$f(x, y) = -xy + \frac{4x}{y}$$

i busquem la relació de recurrència que ha de complir el mètode.

$$\begin{aligned}
\omega_{i+1} &= \omega_i + h\left(-x_i\omega_i + \frac{4x_i}{\omega_i}\right) = \frac{\omega_i^2 - h\,x_i\omega_i^2 + 4\,h\,x_i}{\omega_i} = \\
&= \frac{\omega_i^2 - 0.25\,\cdot 0.25\,i\,\omega_i^2 + 4\cdot\,0.25\cdot 0.25\,i}{\omega_i} = \\
&= \frac{\omega_i^2 - 0.0625\,i\,\omega_i^2 + 0.25\,i}{\omega_i} = \\
&= \frac{\omega_i^2(1 - 0.0625\,i) + 0.25\,i}{\omega_i}
\end{aligned}$$

Per últim, calculem els iterats -valors successius- a partir de la fórmula de recurrència:

$$\begin{aligned}
\omega_0 &= 1 \\
\omega_1 &= \frac{\omega_0^2(1 - 0.0625\,\cdot 0) + 0.25\cdot 0}{\omega_0} = 1 \\
\omega_2 &= \frac{\omega_1^2(1 - 0.0625\,\cdot 1) + 0.25\cdot 1}{\omega_1} = 1.1875 \\
\omega_3 &= \frac{\omega_2^2(1 - 0.0625\,\cdot 2) + 0.25\cdot 2}{\omega_2} = 1.4601151 \\
\omega_4 &= \frac{\omega_3^2(1 - 0.0625\,\cdot 3) + 0.25\cdot 3}{\omega_3} = 1.7000017
\end{aligned}$$

Per trobar la funció solució aproximada podem calcular el polinomi interpolador que passa per aquests punts.

$$p(x) = -0.16489281x^4 - 0.84476639x^3 + 2.2057154x^2 - 0.4960540x + 1$$

La solució general de l'equació diferencial és:

$$y^2\,(x) = 4 + e^{-x^2}C_1$$

i imposant la condició inicial obtenim:

$$\begin{aligned} 1 &= 4 + C_1 \\ C_1 &= -3 \end{aligned}$$

Per tant, la solució exacta és:

$$y^2(x) = 4 - 3e^{-x^2}.$$

En el gràfic següent podem observar la diferència entre la solució exacta (la gràfica superior) i la solució aproximada (gràfica inferior).

A part, construïm la taula de valors per veure quin és l'error de truncament a cada pas.

i	x_i	ω_i	$y(x_i)$	e_i
0	0	1	1	0
1	0.25	1	1.0870882	0.0870882
2	0.5	1.1875	1.2898053	0.1023053
3	0.75	1.4601151	1.5134898	0.0533747
4	1	1.7000017	1.7018701	0.0018684

Problema 4.3 *Useu el mètode d'Euler per aproximar la solució del problema de valor inicial:*

$$\begin{cases} y' + y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad 0 \leq x \leq 1$$

en 6 punts.

Aquesta equació diferencial és lineal homogènia i la seva solució general es troba seguint els passos següents:

- reescrivim l'equació aïllant y' :

$$y' = -y$$

- agrupem les variables a cada banda de la igualtat i integrem:

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} &= -1 \\ \int \frac{y'}{y}\, dy &= \int -1\, dx \\ \ln y &= -x + C \end{aligned}$$

- aïllem la funció solució i trobem:

$$y = K\, e^{-x}$$

- la solució particular s'obté imposant la condició inicial i determinant K:

$$\begin{aligned} 1 &= K\, e^{-0} = K \\ y(x) &= e^{-x}. \end{aligned}$$

Apliquem el mètode d'Euler en 6 punts que trobarem per $N = 5$. Per tant, busquem el pas, h, els punts de la xarxa, x_i i la funció $f(x, y)$ aïllant la derivada de l'equació.

$$\begin{aligned} h &= \frac{1-0}{5} = 0.2 \\ x_i &= 0 + i \cdot 0.2 = 0.2\, i \\ f(x, y) &= -y \end{aligned}$$

Busquem ara la relació de recurrència que s'ha de complir:

$$\omega_{i+1} = \omega_i + h\, f(x_i, \omega_i) = \omega_i + 0.2\,(-\omega_i) = 0.8\omega_i$$

En aquest cas, veiem que no hi intervenen els punts de la xarxa. Ara només queda calcular els iterats corresponents.

$$\begin{array}{ll} x_0 = 0 & \omega_0 = 1 \\ x_1 = 0.2 & \omega_1 = 0.8\omega_0 = 0.8 \\ x_2 = 0.4 & \omega_2 = 0.8\omega_1 = 0.64 \\ x_3 = 0.6 & \omega_3 = 0.8\omega_2 = 0.512 \\ x_4 = 0.8 & \omega_4 = 0.8\omega_3 = 0.4096 \\ x_5 = 1 & \omega_5 = 0.8\omega_4 = 0.32768 \end{array}$$

La solució aproximada la trobem calculant el polinomi interpolador en els punts (x_i, ω_i) que és:

$$p(x) = -0.0083x^5 + 0.0583x^4 - 0.2283x^3 + 0.6217x^2 - 1.1156x + 1$$

Gràficament veiem l'error que cometem: la funció inferior és la solució exacta i la que queda per sobre és el polinomi interpolador en els punts trobats numèricament.

Problema 4.4 *Utilitzeu el mètode RK-2 per aproximar la solució del problema de valor inicial:*

$$\begin{cases} y' + y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 1$$

en 6 punts i calculeu l'error de truncament a cada pas.

En aquest cas, pel problema anterior tenim els valors de:

$$\begin{aligned} h &= 0.2 \\ x_i &= 0.2\, i \\ f(x,y) &= -y \end{aligned}$$

i, per tant, només ens cal buscar la relació de recurrència per aplicar el mètode RK-2.

$$\begin{aligned} \omega_{i+1} &= \omega_i + \frac{h}{2}(f\,(x_i,\omega_i) + f\,(x_i+h, \omega_i + h\,f\,(x_i,\omega_i))) = \\ &= \omega_i + \frac{h}{2}(-\omega_i + (-\omega_i - h(-\omega_i))) = \\ &= \omega_i + 0.1(-2\omega_i + 0.2\omega_i) = 0.82\,\omega_i \end{aligned}$$

Calculem, doncs, els iterats corresponents i l'error de truncament a cada pas.

x_i	ω_i	$y(x_i) = e^{-x_i}$	e_i
0	1	1	0
0.2	0.82	0.8187307531	0.0012692469
0.4	0.6724	0.6703200460	0.0020799540
0.6	0.551368	0.5488116361	0.0025563639
0.8	0.45212176	0.4493289641	0.0027927959
1	0.3707398432	0.3678794412	0.0028604020

Problema 4.5 *Donat el problema de valor inicial*

$$\left\{ \begin{array}{l} xy' = 2y + x^3 e^x \\ y(1) = 0 \end{array} \right. \qquad 1 \leq x \leq 2$$

(a) Comproveu que la funció $y(x) = x^2(e^x + K)$ és solució de l'equació diferencial i trobeu la solució particular que compleixi la condició inicial.

(b) Feu servir el mètode RK-4 amb $h = 0.2$ per aproximar la solució i compareu-la amb els valors reals de $y(x)$ calculant l'error de truncament a cada pas.

(c) Useu els valors obtinguts en l'apartat anterior i interpolació lineal per trobar el valor aproximat de $y(1.5)$ i $y(1.95)$. Compareu-los amb el valor exacte de la solució.

a) Per comprovar que $y(x) = x^2(e^x + K)$ és solució de l'equació hem de substituir la funció i la seva derivada en l'equació i veure que es compleix la igualtat.

Derivem la funció

$$y' = 2x\,(e^x + K) + x^2 e^x$$

i substituim a cada membre de la igualtat:

$$\begin{aligned} xy' &= x(2x(e^x + K) + x^2 e^x) = 2x^2 e^x + 2Kx^2 + x^3 e^x \\ 2y + x^3 e^x &= 2(x^2(e^x + K)) + x^3 e^x = 2x^2 e^x + 2x^2 K + x^3 e^x \end{aligned}$$

Com podem veure, els dos resultats coincideixen i, per tant, $y(x) = x^2(e^x + K)$ és solució.

Per trobar la solució particular busquem el valor que ha de prendre K imposant la condició inicial.

$$\begin{aligned} 0 &= y(1) = 1^2(e^1 + K) = e + K \\ K &= -e \end{aligned}$$

Per tant, la solució particular és:

$$y(x) = x^2(e^x - e)$$

b) Identifiquem els punts de la xarxa i la funció $f(x, y)$.

$$\begin{aligned} x_i &= 1 + i \cdot h = 1 + 0.2\, i \\ f(x, y) &= \frac{2y}{x} + x^2 e^x \end{aligned}$$

Apliquem el mètode RK-4 i, per tant, hem de calcular en cada pas els valors de k_j^i i la fórmula de recurrència.

$$\omega_{i+1} = \omega_i + \frac{h}{6}\left(k_1^i + 2k_2^i + 2k_3^i + k_4^i\right) \qquad i = 0 \div N - 1$$

$$\begin{array}{l} k_1^i = f\left(x_i, \omega_i\right) \\ k_2^i = f\left(x_i + \frac{h}{2}, \omega_i + \frac{h}{2} k_1^i\right) \\ k_3^i = f\left(x_i + \frac{h}{2}, \omega_i + \frac{h}{2} k_2^i\right) \\ k_4^i = f\left(x_i + h, \omega_i + h k_3^i\right) \end{array}$$

Les fórmules de recurrència es compliquen força degut a la forma de la funció inicial, per això farem els càlculs numèricament per a cada pas aplicant la definició. Els valors per a cada pas són:

x_i	k_j^i	ω_i	$y(x_i)$	e_i
1		0	0	0
1.2	$k_1^0 = 2.718281828$ $k_2^0 = 4.129273949$ $k_3^0 = 4.385817971$ $k_4^0 = 6.242907693$	0.8663791122	0.8666425368	0.0002634246
1.4	$k_1^1 = 6.224933556$ $k_2^1 = 8.491684397$ $k_3^1 = 8.840415295$ $k_4^1 = 11.71170932$	2.619740521	2.620359552	0.000619031
1.6	$k_1^2 = 11.69067839$ $k_2^2 = 15.13554489$ $k_3^2 = 15.59486042$ $k_4^2 = 19.85315377$	5.719895282	5.720961526	0.001066244
1.8	$k_1^3 = 19.82963211$ $k_2^3 = 24.88189442$ $k_3^3 = 25.47627822$ $k_4^3 = 31.61769215$	10.7920176	10.79362466	0.00160706
2	$k_1^4 = 31.59198845$ $k_2^4 = 38.82156994$ $k_3^4 = 39.58257851$ $k_4^4 = 48.2647577$	18.68085237	18.68309708	0.00224471

c) Per trobar el valor aproximat de $y(1.5)$ calculem el polinomi interpolador que passa pels punts $(1.4, 2.619740521)$ i $(1.6, 5.719895282)$ i busquem la imatge del punt 1.5 per aquest polinomi.

El polinomi interpolador de grau 1 que passa per aquests punts és:

$$p(x) = 15.50077381\, x - 19.08134281$$

i el valor aproximat de la funció solució en el punt 1.5 és:

$$p(1.5) = 4.16981791$$

El valor exacte de la funció solució en aquest punt és:

$$y(1.5) = (1.5)^2(e^{1.5} - e) = 3.967616295$$

Per tant, l'error comès serà:

$$|\, y(1.5) - p(1.5)\, | = 0.202151615$$

Fem el mateix pel punt 1.95.

El polinomi interpolador de grau 1 que passa pels punts $(1.8, 10.7920176)$ i $(2, 18.68085237)$ és:

$$q(x) = 39.44417385\, x - 60.200749533$$

El valor aproximat de la funció és:

$$q(1.95) = 16.70864368$$

mentre que el valor exacte és:

$$y(1.95) = (1.95)^2(e^{1.95} - e) = 16.39031788$$

i, per tant, l'error comès és:

$$|\, y(1.95) - q(1.95)\,| = 0.31832580$$

Problema 4.6 *Trobeu l'algorisme del mètode d'Euler modificat a partir d'una aproximació de l'àrea que queda per sota de la funció $f(x, y)$ en l'interval $[a, b]$, considerant la solució pel mètode del trapezi en cada subinterval.*

Considerem el problema de valors inicials

$$y' = f(x, y), \qquad y(a) = y_o \qquad \text{amb} \quad a \leq x \leq b$$

i els punts de la xarxa

$$x_i = a + ih \qquad \text{on } h = \frac{b - a}{N}$$

Aplicant el teorema fonamental del càlcul i la regla de Barrow al primer membre de la igualtat obtenim:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y)\ dx \ = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x)\ dx \ = \ y(x_{i+1}) - y(x_i)$$

Aplicant el mètode del trapezi a cada subinterval $[x_i, x_{i+1}]$ obtenim:

$$(x_{i+1} - x_i) \cdot \frac{f\,(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})}{2}$$

i tenint en compte que

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h \\ y_i &= \omega_i \quad \text{valor aproximat} \\ y_{i+1} &= \omega_i + h\, f\,(x_i, \omega_i) \ \ \text{aproximació trobada pel mètode d'Euler} \end{aligned}$$

trobem:

$$\begin{aligned}
\omega_{i+1}-\omega_i &= \frac{x_{i+1}-x_i}{2}\,(\,f(x_i,\omega_i)+f\,(x_i+h,\omega_i+h\,f\,(x_i,\omega_i))\\
\omega_{i+1} &= \omega_i+\frac{h}{2}\,(\,f(x_i,\omega_i)+f\,(x_i+h,\omega_i+h\,f\,(x_i,\omega_i))
\end{aligned}$$

Problema 4.7 *Donat el problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y'+2xy=e^{-x^2} \\ y(0)=1 \end{cases} \qquad 0\le x\le 2$$

(a) Comproveu que $y(x)=e^{-x^2}(x+K)$ és solució de l'equació diferencial i trobeu la solució particular que compleixi la condició inicial.

(b) Usant el mètode de Taylor d'ordre 2, trobeu els valors aproximats de la funció solució en 9 punts i calculeu-ne l'error de truncament a cada pas.

(c) Feu el mateix pel mètode RK-4.

a) Per comprovar que $y(x)=e^{-x^2}(x+K)$ és solució de l'equació hem de substituir la funció i la seva derivada en l'equació i veure que es compleix la igualtat.

Derivem la funció

$$y'=-2x\,e^{-x^2}(x+K)+e^{-x^2}$$

i substituim a cada membre de la igualtat:

$$y'+2xy=-2xe^{-x^2}(x+K)+e^{-x^2}+2xe^{-x^2}(x+K)=e^{-x^2}$$

Com podem veure, la igualtat es compleix i, per tant, $y(x)=e^{-x^2}(x+K)$ és solució.

Per trobar la solució particular busquem el valor que ha de prendre K imposant la condició inicial.

$$\begin{aligned}
1 &= y(0)=e^0(0+K)=K\\
K &= 1
\end{aligned}$$

Per tant, la solució particular és:

$$y(x)=e^{-x^2}(x+1)$$

b) Primerament identifiquem el pas, els punts de la xarxa i la funció $f(x,y)$.

$$\begin{aligned} h &= \frac{2-0}{8} = 0.25 \\ x_i &= 0 + i\,h = 0.25\,i \\ f(x,y) &= e^{-x^2} - 2xy \end{aligned}$$

Per aplicar el mètode de Taylor d'ordre 2 hem de calcular les derivades parcials de la funció f

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2xe^{-x^2} - 2y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2x$$

i substituir-les a la fórmula de recurrència

$$\begin{aligned} \omega_{i+1} &= \omega_i + 0.25(\,e^{-x_i^2} - 2x_i\omega_i) + \frac{(0.25)^2}{2}(-2x_ie^{-x_i^2} - 2\omega_i - 2x_i(e^{-x_i^2} - 2x_i\omega_i)) \\ &= \omega_i + 0.25e^{-x_i^2} - 0.5x_i\omega_i - 0.0625x_ie^{-x_i^2} - 0.0625\omega_i \\ &\qquad -0.0625x_ie^{-x_i^2} + 0.125x_i^2\omega_i \\ &= \omega_i(0.9375 - 0.5x_i + 0.125x_i^2) + 0.25e^{-x_i^2}(1 - 0.5x_i) \end{aligned}$$

Aplicant aquesta fórmula recurrent obtenim els següents valors:

x_i	ω_i	$y(x_i)$	e_i
0	1	1	0
0.25	1.1875	1.174266329	0.013233671
0.5	1.179617702	1.168201175	0.011416527
0.75	0.9938753699	0.9971199432	0.0032445733
1	0.7179653238	0.7357588824	0.0177935586
1.25	0.4498404246	0.4716256212	0.0217851966
1.5	0.2480856581	0.2634980615	0.0154124034
1.75	0.1228776037	0.1286192115	0.0057416078
2	0.05618051484	0.05494691667	0.00123359817

c) Aplicant el mètode de RK-4 obtenim els següents valors per a cada punt:

$$\begin{array}{ll} x_0 = 0 & \omega_0 = 1 \\ & y(x_0) = 1 \\ & e_0 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} x_1 = 0.25 & k_1^0 = 1 & \omega_1 = 1.174245038 \\ & k_2^0 = 0.7032464370 & y(x_1) = 1.174266329 \\ & k_3^0 = 0.7125199858 & e_1 = 0.000021291 \\ & k_4^0 = 0.3503480642 & \end{array}$$

$$
\begin{array}{lll}
x_2 = 0.5 & k_1^1 = 0.3522905438 & \omega_2 = 1.168147115 \\
 & k_2^1 = -0.0448959607 & y(x_2) = 1.168201175 \\
 & k_3^1 = -0.0076597259 & e_2 = 0.000054060 \\
 & k_4^1 = -0.3935293239 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
x_3 = 0.75 & k_1^2 = -0.3893463319 & \omega_3 = 0.9970229233 \\
 & k_2^2 = -0.7227146838 & y(x_3) = 0.9971199432 \\
 & k_3^2 = -0.6706258788 & e_3 = 0.0000970199 \\
 & k_4^2 = -0.9309531433 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
x_4 = 1 & k_1^3 = -0.9257515603 & \omega_4 = 0.7356668011 \\
 & k_2^3 = -1.077238774 & y(x_4) = 0.7357588824 \\
 & k_3^3 = -1.044100946 & e_4 = 0.0000920813 \\
 & k_4^3 = -1.104115933 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
x_5 = 1.25 & k_1^4 = -1.103454161 & \omega_5 = 0.4716749832 \\
 & k_2^4 = -1.062840868 & y(x_5) = 0.4716256212 \\
 & k_3^4 = -1.074263356 & e_5 = 0.0000493620 \\
 & k_4^4 = -0.9581410178 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
x_6 = 1.5 & k_1^5 = -0.9695760708 & \omega_6 = 0.2638303625 \\
 & k_2^5 = -0.8128370109 & y(x_6) = 0.2634980615 \\
 & k_3^5 = -0.8667160625 & e_6 = 0.0003323010 \\
 & k_4^5 = -0.6595886782 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
x_7 = 1.75 & k_1^6 = -0.6860918630 & \omega_7 = 0.1292453866 \\
 & k_2^6 = -0.5074071761 & y(x_7) = 0.1286192115 \\
 & k_3^6 = -0.5799978301 & e_7 = 0.0006261751 \\
 & k_4^6 = -0.3691375452 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
x_8 = 2 & k_1^7 = -0.4055882308 & \omega_8 = 0.05571609309 \\
 & k_2^7 = -0.2648215002 & y(x_8) = 0.05494691667 \\
 & k_3^7 = -0.3308059052 & e_8 = 0.00076917642 \\
 & k_4^7 = -0.1678600023 &
\end{array}
$$

4.3 Problemes resolts amb Maple.

Resolució exacta d'una equació diferencial.

L'ordre **dsolve** del Maple V permet resoldre equacions diferencials de manera exacta. La seva sintaxi és:

dsolve $(\{$*equació*, *cond. inicial*$\}$, *variable*$)$;

En aquest apartat, veurem les diferents opcions a partir d'exercicis.

Problema 4.8 *Resoleu l'equació diferencial*

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x}$$

Volem resoldre l'equació anterior respecte de la variable $y(x)$. Escrivim la corresponent ordre de Maple i obtenim la solució.

> **dsolve** (**diff**$(y(x), x) = (y/x)\hat{\ }2 + y/x,\ y(x))$;

$$\frac{1}{y(x)} = \frac{1}{x}(-\ln x + C_1)$$

Problema 4.9 *Resoleu l'equació diferencial anterior amb la condició inicial* $y(1) = 1$.

En aquest cas, hem d'afegir la condició inicial a l'equació escrivint

> **dsolve** ({**diff**$(y(x), x) = (y/x)\hat{\ }2 + y/x,\ \ y(1) = 1\},\ y(x))$;

$$y(x) = \frac{-x}{ln(x) - 1}$$

Resolució numèrica d'una equació diferencial amb dsolve.

La mateixa ordre **dsolve**, afegint unes opcions, ens permet trobar els punts solució de manera numèrica utilitzant els diferents mètodes que hem vist en aquest capítol. La sintaxi de l'ordre, en aquest cas, és la següent:

dsolve ({*equacions*, *condició inicial*}, *variable*,
type = *numeric*, **method** = *classical* [*mètodes*], *opcions*);

En els *mètodes* podem posar-hi:

(a) el mètode Runge Kutta d'ordre 2 (RK-2) $rk2$
(b) el mètode Runge Kutta d'ordre 4 (RK-4) $rk4$

Per defecte, agafa el mètode d'Euler modificat.

En les *opcions* podem demanar com volem que surtin els resultats, per a quin valor volem començar o bé quin és el pas del mètode. Aquests opcions les veurem en els següents exemples.

Problema 4.10 *Resoleu l'exercici anterior*

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x}, \quad y(1) = 1$$

pel mètode RK-2 amb pas $h = 0.1$ *i sabent que* $x \in [1, 1.2]$.

En aquest cas, volem resoldre el problema numèricament i presentarem els resultats en forma de matriu. L'ordre de Maple serà:

$>$ $sol1 :=$ **dsolve** $(\{$**diff**$(y(x), x) = (y/x)\hat{}2 + y/x,\ y(1) = 1\}, y(x),$ **type** $=$ $numeric,$ **method** $= classical[rk2],$ **value** $=$ **array**$([1., 1.1, 1.2]))$;

$$sol1 := \begin{bmatrix} [x, & y(x)] \\ \begin{bmatrix} 1. & 1. \\ 1.1 & 1.215880763 \\ 1.2 & 1.467555754 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Problema 4.11 *El mateix pel mètode RK-4.*

L'ordre és la mateixa i només ens cal especificar el mètode pel qual ho resolem:

$>$ $sol :=$ **dsolve** $(\{$**diff**$(y(x), x) = (y/x)\hat{}2 + y/x,\ y(1) = 1\}, y(x),$ **type** $=$ $numeric,$ **method** $= classical[rk4],$ **value** $=$ **array**$([1., 1.1, 1.2]))$;

$$sol := \begin{bmatrix} [x, & y(x)] \\ \begin{bmatrix} 1. & 1. \\ 1.1 & 1.215886346 \\ 1.2 & 1.467569567 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Resolució numèrica d'una e.d.o. fent un petit programa.

Això mateix ho podem obtenir si fem un petit programa amb Maple, indicant l'equació i la fórmula de recurrència corresponent per a cada mètode.

Els passos que seguirem són:

1. Definim la funció $f(x, y)$

```
> f:= (x,y)->(y/x)^2+(y/x);
```

$$f := (x, y) \to \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x}$$

2. introduïm el pas del mètode, l'interval on es mou la variable independent i el número d'iterats (N).

> a:=1.; b:=1.2; h:=0.1; N:=2;

$$\begin{aligned} a &:= 1. \\ b &:= 1.2 \\ h &:= .1 \\ N &:= 2 \end{aligned}$$

3. definim les condicions inicials:

> x[0]:=a; w[0]:=1.;

$$\begin{aligned} x_0 &:= 1. \\ w_0 &:= 1. \end{aligned}$$

4. fem un petit programa per a obtenir els punts solució amb cadascun dels mètodes tractats:

4.1. Pel mètode d'Euler.

> **for** i **from** 0 **to** N-1 **do**
>
> x[i+1]:=x[i]+h;
>
> w[i+1]:=w[i]+h*f(x[i],w[i]);
>
> **od;**

$$\begin{aligned} x_1 &:= 1.1 \\ w_1 &:= 1.2 \\ x_2 &:= 1.2 \\ w_2 &:= 1.428099174 \end{aligned}$$

4.2. Pel mètode de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK-4).

> **for** i **from** 0 **to** N-1 **do**
>
> k1[i]:= f(x[i], w[i]);
>
> k2[i]:= f(x[i] + h/2, w[i] + h/2 * k1[i]);
>
> k3[i]:= f(x[i] + h/2, w[i] + h/2 * k2[i]);
>
> k4[i]:= f(x[i] + h, w[i] + h * k3[i]);

w[i+1]:= w[i] + h/6 * (k1[i] + 2 * k2[i] + 2 * k3[i] + k4[i]);

x[i+1]:= x[i] + h;

od;

$$
\begin{aligned}
k1_0 &:= 2. \\
k2_0 &:= 2.145124717 \\
k3_0 &:= 2.166562739 \\
k4_0 &:= 2.329400322 \\
w_1 &:= 1.215879587 \\
x_1 &:= 1.1 \\
k1_1 &:= 2.327132823 \\
k2_1 &:= 2.500510419 \\
k3_1 &:= 2.525570800 \\
k4_1 &:= 2.721132115 \\
w_2 &:= 1.467553377 \\
x_2 &:= 1.2
\end{aligned}
$$

4.3. Pel mètode de Taylor d'ordre 2.

> **for** i **from** 0 **to** N-1 **do**

w[i+1]:= w[i] + h*f(x[i],w[i]) +h ^2/2*(**D**[1](f)(x[i], w[i]) + **D**[2](f)(x[i], w[i])*f(x[i], w[i]));

x[i+1]:= x[i] + h;

od;

$$
\begin{aligned}
w_1 &:= 1.215 \\
x_1 &:= 1.1 \\
w_2 &:= 1.465252781 \\
x_2 &:= 1.2
\end{aligned}
$$

4.4. Pel mètode de Runge-Kutta d'ordre 2 (RK-2) calculant l'error de truncament a cada pas.

> **for** i **from** 0 **to** N-1 **do**

w[i+1]:= w[i] + h/2 * (f(x[i],w[i]) + f(x[i]+h,w[i]+h*f(x[i],w[i])));

x[i+1]:= x[i] + h;

y[i+1]:= x[i+1] / (1- **ln** (x[i+1]));

er[i+1]:=**abs**(w[i+1]-y[i+1]);
od;

$$\begin{aligned} w_1 &: = 1.214049587 \\ x_1 &: = 1.1 \\ y_1 &: = 1.215886346 \\ er_1 &: = .001836759 \\ w_2 &: = 1.463053085 \\ x_2 &: = 1.2 \\ y_2 &: = 1.467569568 \\ er_2 &: = .004546483 \end{aligned}$$

Problema 4.12 *Resoleu l'equació diferencial*

$$\left\{ \begin{array}{l} (1+x)y' + (1+2x)y = (1+x)^2 \\ y(1) = 0 \end{array} \right. , \quad 1 \le x \le 2$$

(a) *de manera exacta amb l'ordre **dsolve** del Maple.*

(b) *Feu un petit programa que aproximi la solució pel mètode RK-2 amb un pas $h = 0.25$.*

(c) *Comproveu la solució d'aquest programa amb la que ens dóna el Maple directament.*

a) Directament escrivim la comanda **dsolve**.

> **dsolve** ({(1+x)***diff**(y(x),x)+(1+2*x)*y=(1+x) ^2, y(1)=0}, y(x));

$$y(x) = \frac{1}{2} - \frac{e^{-2x+2}}{2} + \frac{x}{2} - \frac{x\,e^{-2x+2}}{2}$$

b) El petit programa serà:

> f:=(x,y)->((1+x) ^2-(1+2*x)*y)/(1+x);

$$f := (x,y) \to \frac{(1+x)^2 - (1+2x)y}{(1+x)}$$

> a:=1.; b:=2.; h:=0.25; N:=(b-a)/h;

$$\begin{aligned} a &: = 1. \\ b &: = 2. \\ h &: = .25 \\ N &: = 4.000000000 \end{aligned}$$

```
> x[0]:=a; y[0]:=0;
    for i from 0 to N-1 do
        y[i+1]:= y[i] + h/2 * (f(x[i],y[i]) + f(x[i]+h, y[i]+h*f(x[i],y[i])));
        x[i+1]:= x[i] + h;
    od;
```

$$
\begin{aligned}
x_0 &: = 1. \\
y_0 &: = 0 \\
y_1 &: = .4340277778 \\
x_1 &: = 1.25 \\
y_2 &: = .7778356482 \\
x_2 &: = 1.50 \\
y_3 &: = 1.055215962 \\
x_3 &: = 1.75 \\
y_4 &: = 1.284993687 \\
x_4 &: = 2.00
\end{aligned}
$$

c) Resolent pel mètode RK-2 el problema anterior amb l'ordre de Maple corresponent tenim:

> **dsolve**({(1+x)***diff**(y(x),x)+(1+2*x)*y(x)=(1+x) ^2, y(1)=0} ,y(x), **type**=numeric, **method**=classical[rk2], **value**=**array**([1.,1.25,1.5,1.75,2.]));

$$
\left[\begin{array}{c}
[x, \qquad y(x)] \\
\left[\begin{array}{ll}
1. & 0 \\
1.25 & .4426503780 \\
1.5 & .7901469946 \\
1.75 & 1.068192176 \\
2. & 1.296993557
\end{array}\right]
\end{array}\right]
$$

Observem que hi ha un cert error entre els resultats del programa i els que ens dóna el Maple directament degut a la precisió en els càlculs.

4.4 Problemes proposats.

1. Resoleu numèricament pel mètode d'Euler i pel mètode RK-4 el problema de valor inicial

$$y' + y + xy^2 = 0, \quad y(0) = 1$$

per $0 \le x \le 1$ i amb un pas $h = 0.25$.

2. Determineu la fórmula de recurrència que hem d'aplicar per resoldre pel mètode RK-2 i Taylor d'ordre 2, amb pas $h = 0.1$, el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' - 2y \tan x = 2 \tan x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

3. Donat el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x^2(y' + y^2) = 1 - xy \\ y(1) = -1 \end{cases} \qquad 1 \le x \le 2$$

amb solució exacta $y(x) = \dfrac{-1}{x}$.

(a) Useu el mètode de Euler amb $h = 0.05$ per aproximar la solució i compareu-la amb els valors reals de la solució. Calculeu l'error de truncament en cada pas.

(b) Feu interpolació lineal per aproximar els valors de $y(1.052)$ i $y(1.978)$ i compareu-los amb els valors reals.

(c) Repetiu els apartats $a)$ i $b)$ fent servir el mètode RK-4 amb $h = 0.05$.

4. Donat el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x\,y\,y' + y^2 = 2\,x \\ y(0) = 2 \end{cases} \qquad 0 \le x \le 2$$

(a) Useu el mètode d'Euler per aproximar la solució en els punts de la xarxa donats per $h = 0.4$.

(b) Feu el mateix amb el mètode RK-4.

5. Donat el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' + 2y = 1 \\ y(0) = \frac{5}{2} \end{cases} \qquad 0 \le x \le 1$$

(a) Useu el mètode d'Euler amb $h = 0.25$ per aproximar la solució del problema.

(b) Utilitzant els valors obtinguts en l'apartat anterior i interpolació lineal, doneu el valor aproximat de la solució en el punt 0.6.

6. Feu servir el mètode de Taylor d'ordre 2 amb $N = 6$ punts per aproximar la solució del problema de valor inicial

$$\left\{\begin{array}{l} y' = x^2 \\ y(0) = 0 \end{array}\right. \qquad 0 \leq x \leq 2$$

compareu els resultats amb la solució exacta i calculeu-ne l'error de truncament en cada pas.

7. Repetiu l'exercici anterior usant el mètode RK-4.

8. Donat el problema de valor inicial

$$\left\{\begin{array}{l} y' + y\cos x = \sin x \cdot \cos x \\ y(0) = 0 \end{array}\right. \qquad 0 \leq x \leq 1$$

comproveu que la funció

$$y(x) = C\, e^{-\sin x} + \sin x - 1$$

és solució de l'equació i busqueu la solució particular que compleix la condició inicial.

9. Resoleu l'equació diferencial

$$\left\{\begin{array}{l} y' = \sin x + e^{-x} \\ y(0) = 0 \end{array}\right. , \quad 0 \leq x \leq 1$$

(a) de manera exacta amb l'ordre **dsolve** del Maple.

(b) Feu un petit programa que aproximi la solució pel mètode RK-2 amb un pas $h = 0.5$.

(c) Comproveu la solució d'aquest programa amb la que ens dóna el Maple directament.

10. Donada l'equació diferencial

$$\left\{\begin{array}{l} xy' = 3y \\ y(0) = 0 \end{array}\right. , \quad 0 \leq x \leq 1$$

(a) Resoleu exactament l'equació anterior amb l'ordre **dsolve** del Maple

(b) Feu un petit programa que aproximi la solució pel mètode RK-4 amb un pas $h = 0.1$.

(c) Comproveu la solució d'aquest programa amb la que ens dóna el Maple directament.

11. Resoleu l'equació diferencial

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = 4 \cdot x \cdot y^{1/2} \\ y(0) = 1 \end{array} \right. , \quad 0 \leq x \leq 1$$

(a) de manera exacta amb l'ordre **dsolve** del Maple.

(b) Feu un petit programa que aproximi la solució pel mètode d'Euler amb un pas $h = 0.1$.

(c) Feu un petit programa que doni la solució aproximada pel mètode de Taylor d'ordre 2 amb un pas $h = 0.25$.

12. Resoleu les equacions diferencials següents:

(a) Pel mètode d'Euler amb $h = 0.5$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \cdot \ln x \cdot y' = -(x + y) \\ y(0) = 1 \end{array} \right. , \quad 0 \leq x \leq 2$$

(b) Pel mètode de Taylor d'ordre 2 amb $h = 0.2$

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2\, y' = y - x\, y \\ y(-1) = -1 \end{array} \right. , \quad -1 \leq x \leq 0$$

(c) Pel mètode de Runge-Kutta d'ordre 2 amb $h = 0.1$

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = \dfrac{y - x}{y + x} \\ y(0) = 1 \end{array} \right. , \quad 0 \leq x \leq 0.5$$

(d) Pel mètode de Runge-Kutta d'ordre 4 amb $h = 0.2$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x^2 + 4)\, y' = 2\, x - 8\, x\, y \\ y(0) = -1 \end{array} \right. , \quad 0 \leq x \leq 1$$