Capítol 7

Valors i vectors propis.

7.1 Resum teòric i exemples.

7.1.1 Definicions bàsiques i propietats.

Valors i vectors propis.

Sigui A una matriu quadrada d'ordre n.

Direm que $\overrightarrow{v}$ és un *vector propi de valor propi* λ *associat a* A si $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ i $A\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{v}$.

Això és equivalent a cadascun dels apartats següents:

$$\begin{array}{ll} (a) & A\overrightarrow{v} - \lambda\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \\ (b) & (A - \lambda Id)\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \\ (c) & \overrightarrow{v} \in Ker\,(A - \lambda Id) \\ (d) & \det\,(A - \lambda Id) = 0 \end{array}$$

El determinant de $A - \lambda Id$ és un polinomi de grau n en la variable λ i s'anomena *polinomi característic de la matriu* A.

Es diuen *valors propis de la matriu* A a les arrels del polinomi característic.

El conjunt de tots els valors propis d'una matriu A s'anomena *espectre de la matriu* A i es denota per $\sigma(A)$.

El valor propi de mòdul màxim es coneix com *radi espectral de la matriu.*

$$\rho(A) = \max\{\, |\mu| \ \ /\mu \text{ és un valor propi d'}A\}$$

Exemple 7.1 *Trobeu els valors propis de la matriu*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1r. Calculem el polinomi característic, és a dir, el determinant de $A - \lambda\, Id$.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} &= (2-\lambda)^3 - 1 - (2-\lambda) - (2-\lambda) = \\ &= 8 - 12\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3 - 1 - 2 + \lambda - 2 + \lambda = \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 10\lambda + 3 \end{aligned}$$

2n. Busquem les arrels del polinomi anterior, és a dir, resolem l'equació:

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 10\lambda + 3 = 0$$

les solucions de la qual són

$$\lambda_1 = 3, \ \ \lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \ \ \text{ i } \ \lambda_3 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Per tant, l'espectre de la matriu A és:

$$\sigma(A) = \left\{ \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \ \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \ 3 \right\}$$

El radi espectral de la matriu A, en aquest cas, és:

$$\rho(A) = 3$$

Càlcul de vectors propis.

Per a cada valor propi λ_i de la matriu A existeix, com a mínim, un vector $\overrightarrow{v}$, de manera que

$$A\overrightarrow{v} = \lambda_i \overrightarrow{v}$$

és a dir, existeix, com a mínim, un vector propi. Per trobar-lo, com hem vist en les equivalències, calcularem el nucli de l'aplicació $(A - \lambda_i\, Id)$.

Exemple 7.2 *Per a la matriu de l'exemple anterior, trobeu els vectors propis corresponents a cada valor propi.*

Per $\lambda = 3$, calculem $Ker\,(A - 3\,Id)$

$$\begin{pmatrix} 2-3 & 1 & -1 \\ 1 & 2-3 & 0 \\ -1 & 1 & 2-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

per això hem de resoldre el sistema:

$$\left.\begin{array}{lcl} -x+y-z & = & 0 \\ x-y & = & 0 \\ -x+y-z & = & 0 \end{array}\right\}$$

d'on obtenim la solució

$$\begin{array}{rcl} z & = & 0 \\ x & = & y \end{array}$$

i, per tant, el vector del nucli serà:

$$(x, y, z) = (y, y, 0) = y(1, 1, 0)$$

Així, doncs, un vector propi de valor propi 3 és:

$$\overrightarrow{v_1} = (1, 1, 0)^T$$

Seguint el mateix procés per als altres dos valors propis s'obté que:

$$\overrightarrow{v_2} = \left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2},\ 1,\ \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \right)^T = (-\sqrt{5}-1,\ 2, -\sqrt{5}-1)^T$$

és un vector propi de valor propi $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, i

$$\overrightarrow{v_3} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2},\ 1,\ \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^T = (\sqrt{5}-1,\ 2,\ \sqrt{5}-1)^T$$

és un vector propi de valor propi $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Matrius semblants.

Dues matrius A i B direm que són *semblants* si existeix una matriu P no singular ($\det(P) \neq 0$) tal que $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

Exemple 7.3 *Matrius semblants.*

Les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \; i \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

són semblants, ja que existeix una matriu P, formada pels vectors propis,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{5}-1 & -\sqrt{5}-1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & \sqrt{5}-1 & -\sqrt{5}-1 \end{pmatrix}$$

que compleix la condició $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

Propietats.

1. A i B són matrius semblants $\Rightarrow \sigma(A) = \sigma(B)$
2. Si A i B són matrius semblants, aleshores:
   (a) $\overrightarrow{v}$ és vector propi d'A $\Rightarrow \overrightarrow{v'} = P^{-1}\overrightarrow{v}$ és vector propi de B.
   (b) $\overrightarrow{v'}$ és vector propi de $B \Rightarrow \overrightarrow{v} = P\overrightarrow{v'}$ és vector propi d'A
3. A és invertible ($\det(A) \neq 0$) $\Longleftrightarrow$ 0 no és valor propi d'A
4. $\lambda \neq 0$ és un valor propi d'A de vector propi $\overrightarrow{v} \Rightarrow \dfrac{1}{\lambda}$ és valor propi d'A^{-1} de vector propi $\overrightarrow{v}$.
5. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ valors propis d'$A \Rightarrow \begin{cases} tr\,(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n \\ \det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n \end{cases}$
6. Tota matriu simètrica a coeficients reals és diagonalitzable i els seus valors propis són reals.

7.1.2 Càlcul numèric de valors i vectors propis.

Hem vist, per definició, que per trobar els valors i vectors propis d'una matriu busquem:

a) el polinomi característic: càlcul d'un determinant.

b) les arrels del polinomi característic: resolució d'una equació polinòmica.

c) per cada valor propi, el nucli de l'aplicació $A-\lambda\, Id$: resolució d'un sistema d'equacions.

Aquest procés, en teoria, molt senzill; a la pràctica, si l'ordre de la matriu és superior a 3 ó 4, ens porta força problemes degut:

1. a la complicació dels càlculs en el cas del determinant.

2. a que per equacions de grau superior a 2, no sempre podem trobar una solució directament i, per tant, hauríem d'aplicar qualssevol dels mètodes que hem vist en el capítol 5.

3. a que per a la resolució dels sistemes d'equacions, com hem vist en el capítol 6, a vegades, també necessitem mètodes numèrics per a poder trobar la solució.

Per a tot això, ens trobem en la necessitat de buscar algun mètode numèric que ens permeti calcular els valors i vectors propis d'una matriu sense utilitzar el polinomi característic. Aquí veurem el mètode de la potència que ens dóna el valor propi de mòdul màxim i un vector propi associat.

Localització de valors propis: teorema de Gersghorin.

Aquest resultat ens permet trobar unes fites pels valors propis.

Teorema 7.1 *Sigui* $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ *una matriu i*

$$K_i = \left\{ \mu \in \mathcal{C} \Big/ \mid \mu - a_{ii} \mid \le \sum_{j\neq i} \mid a_{ij} \mid \right\}$$

Aleshores, es té

$$\sigma(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} K_i$$

Com a conseqüència del teorema tenim una fita pel radi espectral.

$$\rho(A) \leq \max_i \sum_{j=1}^{n} |\, a_{ij}\, |$$

Exemple 7.4 *Trobeu una fita del radi espectral, aplicant el teorema de Gersghorin, de la matriu*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

i compareu-la amb els valors propis trobats en l'exemple 1.

En primer lloc, calcularem els cercles K_i per a cada fila de la matriu A.

$$\begin{aligned} K_1 &= \{\mu\,,\ |\,\mu - 2\,| \leq 2\} = \{\mu,\ \ -2 \leq\ \mu - 2 \leq 2\} = \{\mu\,,\, 0 \leq \mu \leq 4\} \\ K_2 &= \{\mu\,,\ |\,\mu - 2\,| \leq 1\} = \{\mu\,,\ \ -1 \leq\ \mu - 2 \leq 1\} = \{\mu\,,\, 1 \leq \mu \leq 3\} \\ K_3 &= \{\mu\,,\ |\,\mu - 2\,| \leq 2\} = \{\mu\,,\ \ -2 \leq\ \mu - 2 \leq 2\} = \{\mu\,,\, 0 \leq \mu \leq 4\} \end{aligned}$$

Fent la unió dels tres cercles tenim que

$$\sigma(A) \subset \{\mu\,,\, 0 \leq \mu \leq 4\}$$

i, per tant, podem afitar el radi espectral així

$$\rho(A) \leq 4$$

En l'exemple 1 veiem que $\rho(A) = 3$, per tant, és certa la fita anterior i a més els valors propis que hem trobat estan compresos entre 0 i 4.

$$0 \leq \lambda_3 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq \lambda_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \leq \lambda_1 = 3 \leq 4$$

7.1.3 Mètode de la potència.

Aquest mètode ens permet determinar el valor propi de mòdul màxim i un vector propi associat.

Suposarem que la matriu A és diagonalitzable amb valors propis $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots\ ,\ \lambda_n$ i vectors propis associats $\overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2},\ \ldots\ ,\ \overrightarrow{v_n}$ i que el valor propi de mòdul màxim és únic $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$.

L'algorisme del mètode de la potència, donat un vector inicial normalitzat $x^{(0)} \neq \overrightarrow{0}$, és:

$$\boxed{\begin{array}{ll} y^{(k+1)} = A\,x^{(k)} & \\ x^{(k+1)} = \dfrac{y^{(k+1)}}{\|\; y^{(k+1)} \;\|} & \text{per a} \;\; k \geq 0 \end{array}}$$

Aleshores, si el mètode és convergent s'obté:

$$\begin{array}{l} (a) \; \|\; y^{(k)} \;\| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} |\, \lambda_1 \,| \\ (b) \;\; x^{(k)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \overrightarrow{v_1} \end{array}$$

Exemple 7.5 *Trobeu, aplicant el mètode de la potència, el valor propi de mòdul màxim de la matriu*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

agafant com a vector inicial $x^{(0)} = (0,0,1)^T$.

Agafem el vector inicial normalitzat en norma infinit.

$$x^{(0)} = (0,0,1)^T$$

i anem calculant iterats segons l'algorisme

$$\begin{aligned} y^{(1)} &= A\,x^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ x^{(1)} &= \frac{y^{(1)}}{\|\, y^{(1)} \,\|} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ y^{(2)} &= A\,x^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.0 \\ -.5 \\ 2.5 \end{pmatrix} \\ x^{(2)} &= \frac{y^{(2)}}{\|\, y^{(2)} \,\|} = \frac{1}{2.5} \begin{pmatrix} -2.0 \\ -.5 \\ 2.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.8 \\ -0.2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & \ldots \end{aligned}$$

Seguint aquest procés obtenim els següents resultats que escrivim en forma de taula.

k	$y^{(k)}$	$\parallel y^{(k)} \parallel$	$x^{(k)}$
1	$(-1, 0, 2)^T$	2	$(-0.5, 0, 1)^T$
2	$(-2, -0.5, 2.5)^T$	2.5	$(-0.8, -0.2, 1)^T$
3	$(-2.8, -1.2, 2.6)^T$	2.8	$(-0.99999, -0.42857, 0.92856)^T$
4	$(-3.3572, -1.8571, 2.4285)^T$	3.3572	$(-1, -0.553170, 0.72338)^T$
5	$(-3.2766, -2.1063, 1.8936)^T$	3.2766	$(-0.99999, -0.64282, 0.57791)^T$
...	...	...	...
29	$(-3.0062, -2.9799, 0.042578)^T$	3.0062	$(-0.99999, -0.99126, 0.014164)^T$
30	$(-3.0055, -2.9825, 0.037068)^T$	3.0055	$(-0.99999, -0.99234, 0.012333)^T$
31	$(-3.0046, -2.9847, 0.032316)^T$	3.0046	$(-0.99999, -0.99337, 0.010755)^T$
		$\downarrow$	$\downarrow$
		$\lvert\lambda\rvert = 3$	$\overrightarrow{v} = (-1, -1, 0)^T$

Per tant, observem que el mòdul del valor propi dominant és 3 i un vector propi associat és $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Observacions.

- Com hem vist el mètode de la potència ens dóna el mòdul del valor propi però no el signe d'aquest. Per determinar el signe compararem dos iterats consecutius: si els dos vectors tenen el mateix signe, el valor propi és positiu; mentre que si tenen signes contraris, el valor propi és negatiu.

  En efecte, si $x^{(k)}$ tendeix cap al vector propi i λ_k és una aproximació del valor propi, tenim:

  $$x^{(k+1)} = \frac{A\,x^{(k)}}{\parallel A\,x^{(k)} \parallel} = \frac{1}{\parallel A\,x^{(k)} \parallel} \lambda_k\, x^{(k)}$$

  i com que $\parallel A\,x^{(k)} \parallel > 0$, el signe de λ_k és l'única diferència entre dos iterats consecutius.

Exemple 7.6 *Determineu el signe del valor propi dominant de l'exemple anterior.*

Observem el vector $x^{(30)} = \begin{pmatrix} -0.99999 \\ -0.99234 \\ 0.012333 \end{pmatrix}$ i el vector $x^{(31)} = \begin{pmatrix} -0.99999 \\ -0.99337 \\ 0.010755 \end{pmatrix}$, com que el signe dels dos vectors coincideix, podem assegurar que el valor propi dominant és positiu. Per tant, $\lambda = 3$.

- A l'hora de descriure el mètode hem suposat que el valor propi de mòdul màxim és únic. En cas de que tingui multiplicitat, el mètode també funciona, però no ens dóna la multiplicitat del valor propi i el vector resultant és una combinació lineal dels vectors propis corresponents.

- Per la propietat 6, sabem que tota matriu simètrica a coeficients reals té tots els valors propis reals. En aquest cas, el mètode funciona correctament excepte en el supòsit de dos valors propis oposats $\lambda_1 = -\lambda_2$.

  Malgrat tot, el mètode ens permet trobar els valors propis i els vectors propis corresponents amb unes petites modificacions. Ara, els successius iterats tendiran alternativament a dos valors diferents α i β. Els valors propis s'obtenen aplicant $|\lambda| = \pm\sqrt{|\alpha \cdot \beta|}$. Els vectors que surten alternativament no són els vectors propis finals, per obtenir-los hem de sumar i restar els vectors iterats. Es a dir,

$$\left.\begin{array}{l} \| y^{(k)} \| \to |\alpha| \ , \ x^{(k)} \to \overrightarrow{u} \\ \| y^{(k+1)} \| \to |\beta| \ , \ x^{(k+1)} \to \overrightarrow{v} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ll} \lambda_1 = +\sqrt{|\alpha \cdot \beta|}, & \overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \\ \lambda_2 = -\sqrt{|\alpha \cdot \beta|}, & \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} \end{array}$$

7.1.4 Mètode de la potència inversa.

Es basa en el següent resultat:

$$\begin{aligned} \lambda &\neq 0 \text{ és valor propi d'}A \text{ de vector propi } \overrightarrow{v} \\ &\Rightarrow \mu = \frac{1}{\lambda} \text{ és valor propi d'}A^{-1} \text{ de vector propi } \overrightarrow{v}. \end{aligned}$$

Aplicant el mètode de la potència a la matriu A^{-1}, trobem que μ és el valor propi de mòdul màxim, i, per tant, λ és el valor propi de mòdul mínim de la matriu A.

Així, doncs, el mètode de la potència ens dóna el valor propi de mòdul mínim i un vector propi associat quan l'apliquem a la inversa de la matriu donada.

Exemple 7.7 *Trobeu, aplicant el mètode de la potència inversa, el valor propi de mòdul mínim de la matriu*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

agafant com a vector inicial $x^{(0)} = (2,1,1)^T$.

Calculem la matriu inversa de la matriu A.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1.3333 & -1 & 0.66667 \\ -0.66667 & 1 & -0.33333 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Agafem el vector inicial normalitzat en norma infinit.

$$x^{(0)} = \frac{1}{2}(2,1,1)^T = (1, 0.5, 0.5)^T$$

i anem calculant iterats

$$\begin{aligned}
y^{(1)} &= A^{-1}x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1.3333 & -1 & 0.66667 \\ -0.66667 & 1 & -0.33333 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1666 \\ -0.33334 \\ 1.0 \end{pmatrix} \\
x^{(1)} &= \frac{y^{(1)}}{\| y^{(1)} \|} = \frac{1}{1.1666} \begin{pmatrix} 1.1666 \\ -0.33334 \\ 1.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.28574 \\ 0.85719 \end{pmatrix} \\
y^{(2)} &= A^{-1}x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1.3333 & -1 & 0.66667 \\ -0.66667 & 1 & -0.33333 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -0.28574 \\ 0.85719 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.1905 \\ -1.2381 \\ 2.1429 \end{pmatrix} \\
x^{(2)} &= \frac{y^{(2)}}{\| y^{(2)} \|} = \frac{1}{2.1905} \begin{pmatrix} 2.1905 \\ -1.2381 \\ 2.1429 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.56522 \\ 0.97828 \end{pmatrix} \\
& \dots
\end{aligned}$$

Seguint aquest algorisme obtenim els següents resultats que escrivim en forma de taula.

k	$y^{(k)}$	$\parallel y^{(k)} \parallel$	$x^{(k)}$
1	$(1.1666, -0.33334, 1)^T$	1.1666	$(1, -0.28574, 0.85719)^T$
2	$(2.1905, -1.2381, 2.1429)^T$	2.1905	$(1, -0.56522, 0.97828)^T$
3	$(2.5507, -1.5580, 2.5435)^T$	2.5507	$(1, -0.61081, 0.99718)^T$
4	$(2.6089, -1.6099, 2.6080)^T$	2.6089	$(1, -0.61707, 0.99965)^T$
5	$(2.6168, -1.6169, 2.6168)^T$	2.6168	$(1, -0.61790, 1)^T$
6	$(2.6179, -1.6179, 2.6179)^T$	2.6179	$(1, -0.61802, 1)^T$
7	$(2.6180, -1.6180, 2.6180)^T$	2.6180	$(1, -0.6180, 1)^T$
8	$(2.6180, -1.6180, 2.6180)^T$	2.6180	$(1, -0.6180, 1)^T$
		$\downarrow$	$\downarrow$
		$\lvert\mu\rvert = 2.6180$	$\overrightarrow{v} = (1, -0.6180, 1)^T$

Per tant, el mòdul del valor propi mínim és $|\lambda| = \dfrac{1}{|\mu|} = \dfrac{1}{2.6180} = 0.38197$ i un vector propi associat és $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.6180 \\ 1 \end{pmatrix}$

Com que dos vectors consecutius tenen el mateix signe, el valor propi més petit és positiu i val $\lambda = 0.38197 \simeq \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

7.1.5 Mètode de la potència desplaçada.

Aquest mètode l'utilitzarem quan coneguem una aproximació d'un valor propi de la matriu. Es basa en el resultat

$$\left.\begin{array}{r} \lambda \text{ és valor propi d'}A \\ p \text{ és un polinomi qualsevol} \end{array}\right\} \Rightarrow p(\lambda) \text{ és valor propi de } p(A)$$

En particular, si δ és una aproximació del valor propi es compleix:

$$\lambda \approx \delta \text{ és valor propi d'}A \Rightarrow \mu = \lambda - \delta \approx 0 \text{ és valor propi de } A - \delta\, Id$$

Per trobar el valor de μ aplicarem el mètode de la potència inversa a la matriu $A - \delta\, Id$.

Exemple 7.8 *La matriu*

$$B = \begin{pmatrix} 11 & 5 & 4 \\ 5 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

té un valor propi prop de 16. Trobeu-lo amb precisió 10^{-4} *agafant com a vector inicial el vector* $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Primer busquem la matriu a la que hem d'aplicar el mètode de la potència.

$$B - 16\,Id = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 4 \\ 5 & -10 & 2 \\ 4 & 2 & -10 \end{pmatrix}$$

Com que volem el valor propi de mòdul mínim, calculem la matriu inversa.

$$A = (B - 16\,Id)^{-1} = \begin{pmatrix} 9.6 & 5.8 & 5 \\ 5.8 & 3.4 & 3 \\ 5 & 3 & 2.5 \end{pmatrix}$$

Aplicant el mètode de la potència a la matriu A obtenim els següents resultats:

k	$y^{(k)}$	$\parallel y^{(k)} \parallel$	$x^{(k)}$
0		1	$(0, 1, 1)^T$
1	$(10.8, 6.4, 5.5)^T$	10.8	$(1, 0.59260, 0.50926)^T$
2	$(15.583, 9.3426, 8.0510)^T$	15.583	$(0.99999, 0.59953, 0.51665)^T$
3	$(15.660, 9.3883, 8.0902)^T$	15.660	$(1, 0.59951, 0.51662)^T$
		$\downarrow$	$\downarrow$
		$\lvert\xi\rvert = 15.660$	$\overrightarrow{v} = (1, 0.59951, 0.51662)^T$

El valor propi de mòdul màxim de A és $\xi = 15.660$, amb un error 0.00003 i, per tant, el valor propi de mòdul mínim de la matriu $B - 16\,Id$ és $\mu = \frac{1}{\xi} = 0.063857$.

El valor propi de la matriu B que busquem és $\lambda = \mu + 16 = 16.063857$.

7.2 Problemes resolts.

Problema 7.1 *Trobeu el valor propi de mòdul màxim, pel mètode de la potència, de la matriu*

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 14 & 0 \\ -5 & 13 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

considerant com a vector inicial $x^{(0)} = (1, 1, 1)^T$ *i amb una precisió de* 10^{-3}.

Per començar el mètode de la potència, considerem el vector inicial normalitzat en norma infinit:

$$x^{(0)} = (1,1,1)^T$$

El primer iterat serà:

$$\begin{aligned} y^{(1)} &= A\,x^{(0)} = \begin{pmatrix} -4 & 14 & 0 \\ -5 & 13 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} \\ x^{(1)} &= \frac{y^{(1)}}{\parallel y^{(1)} \parallel} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.8 \\ 0.1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

El segon iterat és:

$$\begin{aligned} y^{(2)} &= A\,x^{(2)} = \begin{pmatrix} -4 & 14 & 0 \\ -5 & 13 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0.8 \\ 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.2 \\ 5.4 \\ -0.8 \end{pmatrix} \\ x^{(2)} &= \frac{y^{(2)}}{\parallel y^{(2)} \parallel} = \frac{1}{7.2} \begin{pmatrix} 7.2 \\ 5.4 \\ 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.75001 \\ -0.11111 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aplicant l'algorisme successivament obtenim:

k	$y^{(k)}$	$\parallel y^{(k)} \parallel$	$x^{(k)}$
3	$(6.5, 4.7501, -1.2222)^T$	6.5	$(1, 0.73080, -0.18804)^T$
4	$(6.2310, 4.5004, -1.3761)^T$	6.2310	$(1, 0.72227, -0.22085)^T$
5	$(6.1120, 4.3895, -1.4417)^T$	6.1120	$(1, 0.71817, -0.23588)^T$
6	$(6.0541, 4.3363, -1.4717)^T$	6.0541	$(1, 0.71627, -0.24310)^T$
7	$(6.0280, 4.3115, -1.4862)^T$	6.0280	$(1, 0.71523, -0.24655)^T$
8	$(6.0131, 4.2981, -1.4931)^T$	6.0131	$(1, 0.71477, -0.24830)^T$
9	$(6.0071, 4.2921, -1.4966)^T$	6.0071	$(1, 0.71451, -0.24914)^T$
10	$(6.0030, 4.2886, -1.4983)^T$	6.0030	$(1, 0.71439, -0.24959)^T$
		$\downarrow$	$\downarrow$
		$\lvert\lambda\rvert = 6$	$\overrightarrow{v} = (1, 0.71439, -0.25)^T$

El valor propi dominant de la matriu, amb un error 0.00045, és $\lambda = 6$, ja que es conserva el signe en dos iterats consecutius.

Problema 7.2 *Trobeu tots els valors propis de la matriu*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

aplicant el mètode de la potència, amb vector inicial $x^{(0)} = (2,0,1)^T$, *per a trobar el de mòdul màxim i el de mòdul mínim.*

A) Calculem el valor propi de mòdul màxim, per tant, apliquem el mètode de la potència a la matriu original.

Per començar, considerem el vector inicial normalitzat en norma infinit:

$$x^{(0)} = \frac{1}{2}(2,0,1)^T = (1,0,0.5)^T$$

El primer iterat serà:

$$\begin{aligned} y^{(1)} &= A\,x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ -3.0 \\ 2.5 \end{pmatrix} \\ x^{(1)} &= \frac{y^{(1)}}{\| y^{(1)} \|} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1.5 \\ -3 \\ 2.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.99999 \\ 0.83333 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

El segon iterat és:

$$\begin{aligned} y^{(2)} &= A\,x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.99999 \\ 0.83333 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.3333 \\ -6.6667 \\ 2.8333 \end{pmatrix} \\ x^{(2)} &= \frac{y^{(2)}}{\| y^{(2)} \|} = \frac{1}{6.6667} \begin{pmatrix} 2.3333 \\ -6.6667 \\ 2.8333 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.35 \\ -1 \\ 0.425 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aplicant l'algorisme successivament obtenim:

k	$y^{(k)}$	$\| y^{(k)} \|$	$x^{(k)}$
3	$(1.7750, -5.55, 2.125)^T$	5.55	$(0.31982, -1, 0.38288)^T$
4	$(1.7027, -5.4054, 2.0225)^T$	5.4054	$(0.315, -1, 0.37416)^T$
5	$(1.6892, -5.3783, 2.0042)^T$	5.3783	$(0.31407, -1, 0.37264)^T$
6	$(1.6867, -5.3734, 2.0007)^T$	5.3734	$(0.31389, -1, 0.37233)^T$
7	$(1.6862, -5.3725, 2.0001)^T$	5.3725	$(0.31385, -1, 0.37228)^T$
		$\downarrow$	$\downarrow$
		$\lvert\lambda\rvert = 5.3725$	$\overrightarrow{v} = (0.31385, -1, 0.37228)^T$

El valor propi dominant de la matriu és $\lambda_1 = 5.3725$, ja que es conserva el signe en dos iterats consecutius.

B) Busquem, ara, el valor propi de mòdul mínim. Per això, aplicarem el mètode de la potència a la matriu inversa de la matriu donada que és:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0.5 & 0 \\ 3 & 0.5 & -1 \end{pmatrix}$$

Aplicant la fórmula recurrent del mètode obtenim:

k	$y^{(k)}$	$\parallel y^{(k)} \parallel$	$x^{(k)}$
0	$(2, 0, 1)^T$	2	$(1, 0, 0.5)^T$
1	$(-0.5, 1, 2.5)^T$	2.5	$(-0.2, 0.4, 1)^T$
2	$(1.2, 0, -1.4)^T$	1.4	$(0.85715, 0, -1)^T$
3	$(-1.8572, 0.85715, 3.5715)^T$	3.5715	$(-0.52, 0.23999, 0.99998)^T$
4	$(1.52, -0.4, -2.44)^T$	2.44	$(0.62296, -0.16394, -1)^T$
5	$(-1.6230, 0.54099, 2.7869)^T$	2.7869	$(-0.58236, 0.19412, 1)^T$
6	$(1.5824, -0.48530, -2.65)^T$	2.65	$(0.59713, -0.18313, -1)^T$
7	$(-1.5971, 0.50557, 2.6998)^T$	2.6998	$(-0.59157, 0.18726, 1)^T$
8	$(1.5916, -0.49794, -2.6811)^T$	2.6811	$(0.59363, -0.18572 - 1)^T$
9	$(-1.5936, 0.50077, 2.6880)^T$	2.6880	$(-0.59285, 0.18630, 1)^T$
10	$(1.5928, -0.49970, -2.6855)^T$	2.6855	$(0.59311, -0.18607, -1)^T$
		$\downarrow$	$\downarrow$
		2.6855	$(0.59311, -0.18607, -1)^T$

El valor propi de mòdul mínim és $\lambda_3 = \dfrac{1}{\mu} = -0.37229$, és negatiu ja que dos vectors consecutius tenen signes oposats.

C) Per a trobar el tercer valor propi usarem el fet que el producte de valors propis és el determinant de la matriu.

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3$$

Aproximats els valors de λ_1 i de λ_3, trobem λ_2 aïllant-ho de la igualtat anterior. Per tant,

$$\lambda_2 = \frac{\det(A)}{\lambda_1 \cdot \lambda_3} = \frac{-2}{5.3725 \cdot (-0.37229)} = 0.99995 \simeq 1$$

Problema 7.3 *Trobeu el valor propi de mòdul màxim de la matriu*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -8 & 10 & -7 \end{pmatrix}$$

Aplicarem el mètode de la potència i agafarem com a vector inicial el $x^{(0)} = (1,1,1)^T$. Els resultats obtinguts són els següents:

k	$y^{(k)}$	$\parallel y^{(k)} \parallel$	$x^{(k)}$
0	$(1,1,1)^T$	1	$(1,1,1)^T$
1	$(5,3,-5)^T$	5	$(1,0.6,-1)^T$
2	$(-1.4,1.8,5)^T$	5	$(-0.28,0.36,1)^T$
3	$(1.16,1.08,-1.16)^T$	1.16	$(1,0.93104,-1)^T$
4	$(-2.7242,2.7931,8.3104)^T$	8.3104	$(-0.32780,0.33609,1)^T$
5	$(1.0166,1.0083,-1.0166)^T$	1.0166	$(1,0.99183,-1)^T$
6	$(-2.9673,2.9755,8.9183)^T$	8.9183	$(-0.33272,0.33364,1)^T$
7	$(1.0018,1.0009,-1.0018)^T$	1.0018	$(1,0.99910,-1)^T$
8	$(-2.9964,2.9973,8.9910)^T$	8.9910	$(-0.33326,0.33336,1)^T$
9	$(1.0002,1.0001,-1.0002)^T$	1.0002	$(1,0.99990,-1)^T$
10	$(-2.9996,2.9997,8.9990)^T$	8.9990	$(-0.33332,0.33333,1)^T$

Veiem que els iterats parells tendeixen a

$$\alpha = 8.99898 \simeq 9 \qquad \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -0.33332 \\ 0.33333 \\ 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mentre que els iterats senars tendeixen a

$$\beta = 1.000203 \simeq 1 \qquad \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.99990 \\ -1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Encara que la matriu no sigui simètrica, en aquest cas, tenim dos valors propis dominants però de signe contrari que són:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= +\sqrt{\alpha\beta} = +\sqrt{9 \cdot 1} = +3 \\ \lambda_2 &= -\sqrt{\alpha\beta} = -\sqrt{9 \cdot 1} = -3 \end{aligned}$$

de vectors propis respectius:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v_1} &= \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{v_2} &= \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Problema 7.4 *Trobeu el valor propi dominant de la matriu*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -0.5 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \\ -3 & -0.5 & 3 \end{pmatrix}$$

aplicant el mètode de la potència amb vector inicial $x^{(0)} = (1, 1, 1)^T$.

Els resultats obtinguts a l'aplicar l'algorisme

$$\begin{aligned} y^{(k+1)} &= A\, x^{(k)} \\ x^{(k+1)} &= \frac{y^{(k+1)}}{\| \; y^{(k+1)} \; \|} \qquad \text{per a} \;\; k \geq 0 \end{aligned}$$

són els de la taula següent:

k	$y^{(k)}$	$\| y^{(k)} \|$	$x^{(k)}$
0	$(1,1,1)^T$	1	$(1,1,1)^T$
1	$(-0.5,7,-0.5)^T$	7	$(-0.071430,1,-0.071430)^T$
2	$(-0.5,2.7143,-0.5)^T$	2.7143	$(-0.18421,1,-0.18421)^T$
3	$(-0.5,2.2631,-0.5)^T$	2.2631	$(-0.22094,1,-0.22094)^T$
4	$(-0.5,2.1163,-0.5)^T$	2.1163	$(-0.23626,1,-0.23626)^T$
5	$(-0.5,2.0549,-0.5)^T$	2.0549	$(-0.24332,1,-0.24332)^T$
6	$(-0.5,2.0267,-0.5)^T$	2.0267	$(-0.24671,1,-0.24671)^T$
7	$(-0.5,2.0131,-0.5)^T$	2.0131	$(-0.24838,1,-0.24838)^T$
8	$(-0.5,2.0065,-0.5)^T$	2.0065	$(-0.24919,1,-0.24919)^T$
9	$(-0.5,2.0033,-0.5)^T$	2.0033	$(-0.24959,1,-0.24959)^T$
10	$(-0.5,2.0017,-0.5)^T$	2.0017	$(-0.24979,1,-0.24979)^T$
11	$(-0.5,2.0009,-0.5)^T$	2.0009	$(-0.24989,1,-0.24989)^T$

Com que el signe dels diferents iterats sempre és el mateix, el valor propi dominant és positiu i tendeix a $\lambda = 2$, amb vector propi associat $\overrightarrow{v} = (-0.25, 1, -0.25)^T$.

En aquest cas, l'ordre de la matriu és petit i podem calcular els valors propis a partir del polinomi característic.

$$\begin{vmatrix} -1-x & -0.5 & 1 \\ 6 & 3-x & -2 \\ -3 & -0.5 & 3-x \end{vmatrix} = 4 - 8x + 5x^2 - x^3$$

Resolent l'equació característica

$$-x^3 + 5x^2 - 8x + 4 = 0$$

trobem com a solució $x = 1,\ x = 2,\ x = 2$.

Veiem, doncs, que el valor propi dominant té multiplicitat 2. Per aquest valor propi anem a calcular-ne el vector propi a partir del nucli de l'aplicació $A - 2\,Id$.

$$\begin{pmatrix} -3 & -0.5 & 1 \\ 6 & 1 & -2 \\ -3 & -0.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que és equivalent a resoldre el sistema d'equacions:

$$\left.\begin{array}{ll} -3x - 0.5y + z & = 0 \\ 6x + y - 2z & = 0 \\ -3x - 0.5y + z & = 0 \end{array}\right\}$$

la solució del qual és

$$y = 2z - 6x; \quad x, z \text{ qualssevol}$$

És a dir, el vector solució serà

$$(x, y, z) = (x, 2z - 6x, z) = x(1, -6, 0) + z(0, 2, 1)$$

i els vectors propis de valor propi 2 són:

$$\overrightarrow{v_1} = (1, -6, 0)^T, \qquad \overrightarrow{v_2} = (0, 2, 1)^T$$

El vector que ens dóna el mètode de la potència és una combinació lineal d'aquests dos vectors propis, ja que

$$\overrightarrow{v} = \frac{1}{4}(-1, 4, -1) = \frac{-1}{4}(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2})$$

però el mètode no ens indica si el valor propi té o no multiplicitat.

Problema 7.5 *Afiteu els valors propis, a partir del teorema de Gersghorin, de la matriu*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Apliquem directament el teorema de Gersghorin calculant els cercles K_i per a cada fila de la matriu

$$\begin{array}{lll} K_1 & = & \{\mu \,/\, \mid \mu - 2 \mid \leq 5\} = \{\mu \ / -3 \leq \mu \leq 7\} \\ K_2 & = & \{\mu \,/\, \mid \mu - 1 \mid \leq 2\} = \{\mu \ / -1 \leq \mu \leq 3\} \\ K_3 & = & \{\mu \,/\, \mid \mu + 1 \mid \leq 4\} = \{\mu \,/\ -5 \leq \mu \leq 3\} \end{array}$$

Fent la unió dels tres cercles, obtenim

$$\{\mu \ / \ -5 \leq \mu \leq 7\}$$

Per tant, tots els valors propis de la matriu estan compresos entre -5 i 7.

Problema 7.6 *Del problema anterior, calculeu el valor propi més proper a 7 i el més allunyat de 7, aplicant el mètode de la potència desplaçada amb vector inicial* $x^{(0)} = (1,1,0)^T$ *amb precisió* 10^{-4}.

El mètode de la potència desplaçada es basa en el fet:

$$\lambda \text{ és valor propi d'}A \Rightarrow \mu = \lambda - 7 \text{ és valor propi de } A - 7Id$$

Per trobar el valor propi més proper a 7, haurem de buscar el valor μ més petit, és a dir, haurem d'aplicar el mètode de la potència inversa a la matriu

$$A - 7Id = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 3 \\ 1 & -6 & 1 \\ 1 & 3 & -8 \end{pmatrix}$$

La matriu que hem d'utilitzar en l'algorisme és

$$(A - 7Id)^{-1} = \frac{-1}{216} \begin{pmatrix} 45 & -7 & 16 \\ 9 & 37 & 8 \\ 9 & 13 & 32 \end{pmatrix}$$

i els resultats que obtenim són:

k	$y^{(k)}$	$\parallel y^{(k)} \parallel$	$x^{(k)}$
0	$(1,1,0)^T$	1	$(1,1,0)^T$
1	$(-0.17592, -0.21297, -0.10185)^T$	0.21297	$(-0.82603, -1, -0.47824)^T$
2	$(0.17511, 0.22343, -0.16545)^T$	0.22343	$(0.78374, 1, 0.74054)^T$
3	$(-0.18572, -0.23139, -0.20255)^T$	0.23139	$(-0.80263, -1, -0.87536)^T$
4	$(0.19964, 0.23716, 0.22331)^T$	0.23716	$(0.84180, 1, 0.94161)^T$
5	$(-0.21271, -0.24125, -0.23476)^T$	0.24125	$(-0.88170, -1, -0.97310)^T$
6	$(0.22335, 0.24408, 0.24108)^T$	0.24408	$(0.91506, 1, 0.98770)^T$
7	$(-0.23138, -0.24601, -0.24464)^T$	0.24601	$(-0.94054, -1, -0.99444)^T$
8	$(0.23719, 0.24732, 0.24670)^T$	0.24732	$(0.95903, 1, 0.99748)^T$
9	$(-0.24127, -0.24820, -0.24792)^T$	0.24820	$(-0.97208, -1, -0.99887)^T$
10	$(0.24409, 0.24880, 0.24867)^T$	0.24880	$(0.98107, 1, 0.99948)^T$
11	$(-0.24602, -0.24920, -0.24913)^T$	0.24920	$(-0.98723, -1, -0.99971)^T$
...	...	...	...
23	$(-0.24992, -0.24998, -0.24998)^T$	0.24998	$(-0.99975, -1, -1)^T$
24	$(0.24994, 0.25, 0.24999)^T$	0.25	$(0.99976, 1, 0.99996)^T$

Observem que el valor propi dominant és negatiu, degut a l'alternança del signe en els iterats, i que tendeix a $\xi = -0.25$; com que apliquem potència inversa, el valor propi mínim de la matriu $A - 7Id$ és $\mu = \dfrac{1}{\xi} = -4$.

El valor propi de la matriu A més proper a 7 és $\lambda = \mu + 7 = -4 + 7 = 3$ amb vector propi associat $\overrightarrow{v} = (1,1,1)^T$.

Per trobar el valor propi més allunyat de 7, haurem de buscar el valor de μ màxim i, per tant, aplicar el mètode de la potència a la matriu $A - 7Id$. Els resultats obtinguts són a la taula següent:

k	$y^{(k)}$	$\parallel y^{(k)} \parallel$	$x^{(k)}$
0	$(1,1,0)^T$	1	$(1,1,0)^T$
1	$(-7,-5,4)^T$	7	$(-1,-0.71430,0.57144)^T$
2	$(8.1429,3.8572,-7.7144)^T$	8.1429	$(1,0.47370,-0.94741)^T$
3	$(-8.7896,-2.7896,10)^T$	10	$(-0.87896,-0.27896,1)^T$
4	$(7.9527,1.7948,9.71578)^T$	9.71578	$(0.81852,0.18472,-1)^T$
5	$(-7.46208,-1.28981,9.3728)^T$	9.3728	$(-0.79616,-0.13761,1)^T$
6	$(7.2559,1.0295,-9.2088)^T$	9.2088	$(0.78792,0.11179,-1)^T$
7	$(-7.1631,-0.88280,9.1231)^T$	9.1231	$(-0.78515,-0.096764,1)^T$
8	$(7.1192,0.79541,-9.0752)^T$	9.0752	$0.78446,0.087646,-1)^T$
...	...	...	...
20	$(7.0715,0.64389,-9.0003)^T$	9.0003	$(0.78571,0.07154,-1)^T$
21	$(-7.0717,-0.64355,9.0003)^T$	9.0003	$(-0.78574,-0.071505,1)^T$

El valor propi dominant és $\mu \simeq -9$, per tant, el valor propi de la matriu A més allunyat de 7 és $\lambda = \mu + 7 = -9 + 7 = -2$ amb un error 0.000038.

Observem que els dos valors propis que hem trobat són dins de les fites obtingudes en el problema anterior.

El tercer valor propi ha de ser entre -2 i 3. Si el calculem a partir del determinant trobem que és 1.

Problema 7.7 *Trobeu el valor propi de mòdul mínim de la matriu*

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 8 \\ 10 & 5 & -1 \\ 8 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

aplicant el mètode de la potència amb vector inicial $x^{(0)} = (1,0,0)^T$.

Apliquem l'algorisme del mètode a la matriu

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{327} & \frac{19}{327} & \frac{25}{327} \\ \frac{19}{327} & \frac{37}{654} & -\frac{89}{654} \\ \frac{25}{327} & -\frac{89}{654} & \frac{55}{654} \end{pmatrix} = \frac{1}{654} \begin{pmatrix} -14 & 38 & 50 \\ 38 & 37 & -89 \\ 50 & -89 & 55 \end{pmatrix}$$

i els resultats són:

k	$y^{(k)}$	$\parallel y^{(k)} \parallel$	$x^{(k)}$
0	$(1,0,0)^T$	1	$(1,0,0)^T$
1	$(-0.021407, 0.058104, 0.076453)^T$	0.076453	$(-0.28, -0.76, 1)^T$
2	$(0.12661, -0.10936, -0.040742)^T$	0.12661	$(1, -0.86376, -0.32179)^T$
3	$(-0.096197, 0.053029, 0.16694)^T$	0.16694	$(-0.57624, 0.31765, 1)^T$
4	$(0.10725, -0.15160, -0.003186)^T$	0.15160	$(0.70745, -1, -0.021016)^T$
5	$(-0.074855, -0.012609, 0.18841)^T$	0.18841	$(-0.39730, -.066924, 1)^T$
6	$(0.081069, -0.16296, .062831)^T$	0.16296	$(0.49748, -1, 0.38556)^T$
7	$(-0.039277, -0.080140, 0.20655)^T$	0.20655	$(-0.19016, -0.38799, 1)^T$
8	$(0.057979, -0.16909, 0.12236)^T$	0.16909	$(0.34289, -1, 0.72364)^T$
9	$(-0.010120, -0.13513, 0.22317)^T$	0.22317	$(-0.045347, -0.60550, 1)^T$
10	$(0.042242, -0.17298, 0.16303)^T$	0.17298	$(0.24420, -1, 0.94248)^T$
	...	...	...
27	$(0.024544, -0.17732, 0.20879)^T$	0.20879	$(0.11755, -0.84927, 1)^T$
28	$(0.024591, -0.17731, 0.20867)^T$	0.20867	$(0.11785, -0.84972, 1)^T$

En aquest cas, si fem només 10 iterats veiem que el signe de dos vectors consecutius no és el mateix però tampoc és l'oposat. Per decidir el signe del valor propi ens calen més iterats i observem que el signe es conserva, per tant, el valor propi dominant és positiu i val $\mu = 0.208687$ amb un error 0.00045.

El valor propi de mòdul mínim de la matriu B és $\lambda = \dfrac{1}{\mu} = \dfrac{1}{0.208687} =$ 4.791865329.

7.3 Problemes resolts amb MapleV.

Càlculs directes amb MapleV.

Dins de la llibreria LINALG trobem diferents ordres que calculen directament els elements usats en la diagonalització d'una matriu.

L'ordre **charpoly** ens dóna el polinomi característic de la matriu amb la variable que li assignem. La seva sintaxi és:

charpoly (matriu, variable);

Per calcular els valors propis d'una matriu tenim dues opcions:

a) Directament amb l'ordre **eigenvals** de sintaxi

eigenvals (matriu);

b) Resolent l'equació característica amb l'ordre **fsolve** (vista en el capítol de Zeros de funcions).

Els vectors propis d'una matriu ens els dóna directament l'ordre **eigenvects**, que s'escriu

eigenvects (matriu);

i presenta, en forma de llista, el valor propi, la seva multiplicitat i un vector propi associat o més -depenent de la multiplicitat-.

Exemple 7.9 *Calculeu el polinomi característic, els valors propis i uns vectors propis associats de la matriu*

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

- Carreguem la llibreria d'Àlgebra Lineal (només ho farem al començament de la sessió).

  > **with**(**linalg**);

- Introduïm la matriu (si volem que els valors siguin decimals entrarem cada element de la matriu amb un punt decimal. El MapleV, per defecte, opera amb valors exactes).

  > a:=**matrix**(3,3,[3.,5,7,1,2.,4,2,6,8.]);

$$a := \begin{bmatrix} 3. & 5 & 7 \\ 1 & 2. & 4 \\ 2 & 6 & 8. \end{bmatrix}$$

- Calculem el polinomi característic

  > p:=**charpoly** (a,X);

$$p := X^3 - 13X^2 + 3X + 10$$

- Busquem els valors propis de les formes explicitades anteriorment:

  - calculant-ho directament,

  > **eigenvals** (a);

$$1.05, 12.7, -.75$$

  - calculant les arrels del polinomi característic:

  > **fsolve** (p=0,X);

$$1.05, 12.7, -0.75$$

- Trobem els vectors propis associats amb l'ordre de Maple

  > **eigenvects** (a);

$$\begin{aligned}&[[1.05, 1, \{[0.971, -0.0585, -0.229]\}],\\&[12.7, 1, \{[0.802, 0.388, 0.836]\}],\\&[-0.75, 1, \{[-0.072, 0.78, -0.519]\}]]\end{aligned}$$

  A cada fila hi ha el valor propi, la seva multiplicitat i un vector propi associat.

També usarem l'ordre :

inverse (matriu);

per calcular la inversa d'una matriu.

Programació del mètode de la potència.

Veurem com podem calcular els successius iterats que tendeixen al valor propi de mòdul màxim a partir d'un bucle **for** i com, amb petites variants en la matriu d'entrada, trobarem les diferents opcions del mètode de la potència.

(a) Introduïm la matriu i el vector inicial no nul.

> a:=**matrix**(n,n,[llista d'elements]);
> x[0]:=**vector**(n,[llista d'elements]);

(b) El bucle **for** corresponent al mètode de la potència és:

```
> for i from 0 to N do
    y[i+1]:=evalm(a&*x[i]);
    l[i+1]:=norm(y[i+1], infinity);
    x[i+1]:=evalm(1/l[i+1]*y[i+1]);
  od;
```

Si volem buscar el valor amb una determinada precisió afegirem una condició d'error en el bucle amb un **while** i el càlcul de l'error. En aquest cas, buscarem el vector error com a diferència de dos termes consecutius i en calcularem la seva norma infinit. Quan aquesta norma sigui menor de la precisió desitjada aturarem el procés.

Això queda palès, en el programa, de la següent manera:

```
> error:=infinity; p:=precisió; N:=nombre_iterats;
  l[0]:=norm(x[0]);  x[-1]:=x[0];
  for i from 0 to N while (error>0.5*10^(-p)) do
    y[i+1]:=evalm(a&*x[i]);
    l[i+1]:=norm(y[i+1], infinity);
    x[i+1]:=evalm(1/l[i+1]*y[i+1]);
    er[i+1]:=vector(3);
    if (l[i+1]-l[i]<10^(-3)) then
      for j from 1 to n do
        er[i+1][j]:=abs(abs(x[i+1][j]) - abs(x[i][j]));
      od;
    else
      for j from 1 to n do
        er[i+1][j]:=abs(abs(x[i+1][j]) - abs(x[i-1][j]));
      od;
    fi;
    error:=norm(er[i+1],infinity);
  od;
```

A l'hora de calcular el vector error fem la diferència component a component de dos vectors consecutius amb valor absolut ja que si hi hagués un canvi de signe (cas de valors propis negatius) la norma tendiria a -2 i no s'aturaria el procés fins esgotar els N iterats.

També hem de tenir en compte el cas de dos valors propis de signe oposat i, en aquest cas, la comparació cal fer-la entre iterats parells o entre iterats senars.

Això ho programem amb un **if-then-else-fi,** és a dir, si la diferència entre dos iterats consecutius de valor propi és menor que un cert valor (10^{-3}, per exemple), considerem que el valor propi és únic i comparem dos iterats consecutius, en cas contrari, tenim la possibilitat de dos valors propis de signe oposat.

(c) Veurem cadascuna de les variants del mètode amb problemes. Només es tracta de modificar la matriu a la qual s'aplica l'algorisme i interpretar el valor propi resultant.

Problema 7.8 *Apliqueu el mètode de la potència per obtenir el valor propi de mòdul màxim i el mètode de la potència inversa per trobar el valor propi de mòdul mínim de la matriu:*

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

amb una precissió de 10^{-3}.

- Introduïm la matriu i el vector inicial (si comencessim la sessió de MapleV hauríem de carregar la llibreria **linalg)** i programem el bucle **for-while** per trobar el valor propi de mòdul màxim amb el mètode de la potència.

  > a:=**matrix**(3,3,[3.,2.,0,2.,2.,1.,0,1.,2.]);
  x[0]:=**vector**(3,[1.,1.,1.]);
  l[0]:=**norm**(x[0]);
  error:=**infinity**;
  x[-1]:=x[0];

$$a := \begin{bmatrix} 3. & 2. & 0 \\ 2. & 2. & 1. \\ 0 & 1. & 2. \end{bmatrix}$$

$$x_0 := [1., 1., 1.]$$

$$error := \infty$$

$$x_{-1} := x_0$$

```
> for i from 0 to 15 while (error > 0.5*10^(-3)) do
    y[i+1]:=evalm(a&*x[i]);
    l[i+1]:=norm(y[i+1], infinity);
    x[i+1]:=evalm(1/l[i+1]*y[i+1]);
    er[i+1]:=vector(3);
    if (l[i+1]-l[i]<0.1) then
      for j from 1 to n do
        er[i+1][j]:=abs(abs(x[i+1][j]) - abs(x[i][j]));
      od;
    else
      for j from 1 to n do
        er[i+1][j]:=abs(abs(x[i+1][j]) - abs(x[i-1][j]));
      od;
    fi;
    error:=norm(er[i+1],infinity);
  od;
```

$$
\begin{aligned}
y_1 &: = [5., 5., 3.] \\
l_1 &: = 5. \\
x_1 &: = [1.000000000, 1.000000000, .6000000000] \\
y_2 &: = [5.000000000, 4.600000000, 2.200000000] \\
l_2 &: = 5.000000000 \\
x_2 &: = [1.000000000, .9200000000, .4400000000] \\
y_3 &: = [4.840000000, 4.280000000, 1.800000000] \\
l_3 &: = 4.840000000 \\
x_3 &: = [.9999999998, .8842975205, .3719008264] \\
y_4 &: = [4.768595040, 4.140495867, 1.628099173] \\
l_4 &: = 4.768595040 \\
x_4 &: = [1.000000000, .8682842290, .3414211439] \\
y_5 &: = [4.736568458, 4.077989602, 1.551126517] \\
l_5 &: = 4.736568458 \\
x_5 &: = [1.000000000, .8609586535, .3274789609] \\
y_6 &: = [4.721917307, 4.049396268, 1.515916575]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
l_6 &: = 4.721917307 \\
x_6 &: = [1.000000000, .8575745836, .3210383572] \\
y_7 &: = [4.715149167, 4.036187524, 1.499651298] \\
l_7 &: = 4.715149167 \\
x_7 &: = [.9999999999, .8560042070, .3180495982] \\
y_8 &: = [4.712008414, 4.030058012, 1.492103403] \\
l_8 &: = 4.712008414 \\
x_8 &: = [1.000000000, .8552739422, .3166597493 \\
y_9 &: = [4.710547884, 4.027207633, 1.488593441] \\
l_9 &: = 4.710547884 \\
x_9 &: = [1.000000000, .8549340188, .3160128031] \\
y_{10} &: = [4.709868038, 4.025880841, 1.486959625] \\
l_{10} &: = 4.709868038 \\
x_{10} &: = [.9999999999, .8547757195, .3157115259]
\end{aligned}
$$

Per tant, veiem que el valor propi de mòdul màxim serà 4.709868038 i un vector propi associat $(1, 0.8547787195, 0.3157115259)^T$, amb un error 0.0003012772.

- Per trobar el valor propi de mòdul mínim aplicarem el mètode de la potència a la matriu inversa.

  > b:= **inverse**(a);

  x[0]:=**vector**(3,[1.,0,1.]);

  l[0]:=**norm**(x[0]);

  x[-1]:=x[0];

$$
\begin{aligned}
b &: = \begin{bmatrix} 3.000000000 & -4.000000000 & 2.000000000 \\ -4.000000000 & 6.000000000 & -3.00000000 \\ 2.000000000 & -3.000000000 & 2.000000000 \end{bmatrix} \\
x_0 &: = [1., 0, 1.] \\
l_0 &: = 1 \\
x_{-1} &: = x_0
\end{aligned}
$$

  > **for** i **from** 0 **to** 15 **while** (error > 0.5*10^(-3) **do**

  y[i+1]:=**evalm**(b&*x[i]);

  l[i+1]:=**norm**(y[i+1], **infinity**);

```
    x[i+1]:=evalm(1/l[i+1]*y[i+1]);
    er[i+1]:=vector(3);
    if ( l[i+1]- l[i]< 0.1) then
      for j from 1 to n do
        er[i+1][j]:=abs(abs(x[i+1][j]) - abs(x[i][j]));
      od;
    else
      for j from 1 to n do
        er[i+1][j]:=abs(abs(x[i+1][j]) - abs(x[i-1][j]));
      od;
    fi;
    error:=norm(er[i+1],infinity);
  od;
```

$$
\begin{aligned}
y_1 &: = [5.000000000, -7.000000000, 4.000000000] \\
l_1 &: = 7.000000000 \\
x_1 &: = [.7142857145, -1.000000000, .5714285716] \\
error &: = 1.000000000 \\
y_2 &: = [7.285714287, -10.57142857, 5.571428572] \\
l_2 &: = 10.57142857 \\
x_2 &: = [.6891891894, -1.000000000, .5270270272] \\
error &: = 1.000000000 \\
y_3 &: = [7.121621622, -10.33783784, 5.432432433] \\
l_3 &: = 10.33783784 \\
x_3 &: = [.6888888888, -1.000000000, .5254901960] \\
error &: = .0015368312 \\
y_4 &: = [7.117647058, -10.33202614, 5.428758170] \\
l_4 &: = 10.33202614 \\
x_4 &: = [.6888917006, -1.000000000, .5254301621] \\
error &: = .0000600339
\end{aligned}
$$

El valor propi de mòdul mínim serà, $\frac{1}{10.33202614} = 0.09678643728$ i un vector propi associat $(0.6888917006, -1, 0.5254301621)^T$ amb un error 0.0000600339.

- Comprovem amb les ordres directes del Maple que hem trobat unes bones aproximacions.

  > **eigenvects**(a);

$$[4.709275360, 1, \{[0.7392387395, 0.6317812812, 0.2331919784]\}],$$
$$[0.096788074, 1, \{[0.5206573684, -0.7557893405, 0.3971125496]\}],$$
$$[2.193936564, 1, \{[0.4271322871, -0.1721478589, -0.8876503387]\}]$$

Problema 7.9 *Donada la matriu*

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

sabem que té un valor propi prop de 4. Trobeu quin és aquest valor propi, amb una precissió de 10^{-4}, usant el mètode de la potència desplaçada.

- Introduïm la matriu i la modifiquem per aplicar el mètode de la potència desplaçada, és a dir, busquem la matriu $a - 4Id$ i quan la tenim, en calculem la inversa ja que volem trobar el valor propi més proper a 4 i, per tant, el valor propi de mòdul mínim de la matriu $a - 4Id$.

  > a:=**matrix**(3,3,[3.,2.,1.,2.,0,1.,0,1.,2.]);

  a1:=**evalm**(a- 4***array(1..3,1..3,identity)**);

  b:=**inverse**(a1);

$$a := \begin{bmatrix} 3. & 2. & 1. \\ 2. & 0 & 1. \\ 0 & 1. & 2. \end{bmatrix}$$

$$a1 := \begin{bmatrix} -1. & 2. & 1. \\ 2. & -4. & 1. \\ 0 & 1. & -2. \end{bmatrix}$$

$$b := \begin{bmatrix} 2.333333333 & 1.666666667 & 2.000000000 \\ 1.333333333 & .6666666667 & 1.000000000 \\ .6666666667 & .3333333333 & 0 \end{bmatrix}$$

- Entrem el vector inicial i programem el bucle **for-while** per trobar el valor propi amb el mètode de la potència.

  > x[0]:=**vector**(3,[1.,1.,1.]);

```
l[0]:=norm(x[0]);
x[-1]:=x[0];
error:=infinity;
```

$$
\begin{aligned}
x_0 &:= [1., 1., 1.] \\
l_0 &:= 1. \\
x_{-1} &:= x_0 \\
error &:= \infty
\end{aligned}
$$

```
> for i from 0 to 15 while (error > 0.5*10^(-4) do
   y[i+1]:=evalm(b&*x[i]);
   l[i+1]:=norm(y[i+1], infinity);
   x[i+1]:=evalm(1/l[i+1]*y[i+1]);
   er[i+1]:=vector(3);
   if ( l[i+1]- l[i] < 0.1) then
     for j from 1 to n do
       er[i+1][j]:=abs(abs(x[i+1][j]) - abs(x[i][j]));
     od;
   else
     for j from 1 to n do
       er[i+1][j]:=abs(abs(x[i+1][j]) - abs(x[i-1][j]));
     od;
   fi;
   error:=norm(er[i+1],infinity);
 od;
```

$$
\begin{aligned}
y_1 &:= [6.000000000, 3.000000000, 1.000000000] \\
l_1 &:= 6.000000000 \\
x_1 &:= [1.000000000, .5000000001, .1666666667] \\
error &:= .8333333333 \\
y_2 &:= [3.500000000, 1.833333333, .8333333334] \\
l_2 &:= 3.500000000 \\
x_2 &:= [1.000000000, .5238095237, .2380952381] \\
error &:= .0714285714
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
y_3 &: = [3.682539682, 1.920634920, .8412698412] \\
l_3 &: = 3.682539682 \\
x_3 &: = [1.000000000, .5215517241, .2284482759] \\
error &: = .0617816092 \\
y_4 &: = [3.659482759, 1.909482758, .8405172414] \\
l_4 &: = 3.659482759 \\
x_4 &: = [.9999999999, .5217903413, .2296819788] \\
error &: = .0012337029 \\
y_5 &: = [3.662347860, 1.910875540, .8405967803] \\
l_5 &: = 3.662347860 \\
x_5 &: = [1.000000000, .5217624358, .2295240137] \\
error &: = .0001579651 \\
y_6 &: = [3.661985420, 1.910698971, .8405874786] \\
l_6 &: = 3.661985420 \\
x_6 &: = [.9999999999, .5217658597, .2295441904] \\
error &: = .0000201767
\end{aligned}$$

El valor propi de mòdul mínim de la matriu $a - 4Id$ el trobem:

> mu:=1/l[6];

$$\mu := 0.2730759097$$

i, per tant, el valor propi més proper a 4 és:

> lambda:=4+mu;

$$\lambda := 4.2730759097$$

Problema 7.10 *Calculeu els valors i vectors propis, directament amb les ordres Maple, de les matrius:*

$$(a) \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \qquad (b) \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad (d) \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Per començar carreguem la llibreria d'Àlgebra Lineal i entrem la matriu.

> **with(linalg)**;

> a:=**matrix**(3,3,[2.,2.,-2.,1,3,-2,2,4,-3]);

$$a := \begin{bmatrix} 2. & 2. & -2. \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Calculem els valors i vectors propis usant l'ordre **eigenvects**:

> **eigenvects**(a);

$$[0, 1, \{[1.414213563, 1.414213563, 2.828427125]\}], [1.000000000, 2,$$
$$\{[.7071067812, .3535533906, .7071067812], [.087856586, 2.043928293, 2.087856586]\}]$$

En aquest cas, els valors propis són el 0, amb multiplicitat 1, i el 1, amb multiplicitat 2.

El vector propi de valor propi 0 és $[1.414213563, 1.414213563, 2.828427125]$ i els vectors propis de valor propi 2 són: $[.7071067812, .3535533906, .7071067812]$,

$[.087856586, 2.043928293, 2.087856586]$. Com que trobem tants vectors propis com multiplicitat té l'1, la matriu diagonalitza.

(b) Amb les altres matrius fem exactament el mateix, entrem la matriu i apliquem l'ordre anterior.

> b:=**matrix**([0,-1,-1],[-2.,1.,-1.],[-2,2,2]);

$$b := \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2. & 1. & -1. \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

> **eigenvects**(b);

$$[2, 2, \{[1, 1, -3]\}], [-1, 1, \{[1, 1, 0]\}]$$

És a dir, tenim dos valors propis: el 2 amb multiplicitat 2 i el -1 amb multiplicitat 1.

El valor propi 2 només té un vector propi que és $[1, 1, -3]$; com que la seva multiplicitat és 2, això vol dir que la matriu no diagonalitza i el que s'obté és una matriu de Jordan.

El vector propi de valor propi -1 és $[1, 1, 0]$.

(c)

> c:=**matrix**(4,4,[5.,0,-1.,0,0,3.,0,0,-2.,0,4.,0,1.,0,1.,6.]);

$$c := \begin{bmatrix} 5. & 0 & -1. & 0 \\ 0 & 3. & 0 & 0 \\ -2. & 0 & 4. & 0 \\ 1. & 0 & 1. & 6. \end{bmatrix}$$

> **eigenvects**(c);

$$[6, 2, \{[.7071067812, 0, -.7071067812, 0], [0, 0, 0, 1]\}],$$
$$[3, 2, \{[.4714045208, 0, .9428090416, -.4714045207], [0, 1, 0, 0]\}]$$

La matriu diagonalitza amb dos valors propis de multiplicitat 2 que són el 6 i el 3. Amb els vectors especificats en la resposta Maple.

(d)

> d:=**matrix**(4,4,[2,1,-2,0,0,0,1,0,0,0,0,1,1,0,0,0]);

$$d := \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> **eigenvects**(d);

$$[-1, 1, \{[-1, 1, -1, 1]\}], [1, 3, \{[1, 1, 1, 1]\}]$$

La matriu no diagonalitzarà ja que el valor propi 1 té multiplicitat 3 i només té un vector propi.

En aquest cas, calculem el polinomi característic i el factoritzem per veure la multiplicitat.

> p:=**charpoly**(d,x);

$$p := x^4 - 2x^3 - 1 + 2x$$

> **factor**(p);

$$(x + 1)\,(x - 1)^3$$

Per tant, observem que l'1 és una arrel amb multiplicitat 3, com veiem abans.

7.4 Problemes proposats.

1. Trobeu el valor propi dominant, aplicant el mètode de la potència, en els casos següents*:*

(a) $\begin{pmatrix} -4 & 14 & 0 \\ -5 & 13 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ amb $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ amb $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ amb $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. Donada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 8 \\ 9 & 2 & 7 \\ 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) trobeu el valor propi dominant, aplicant el mètode de la potència, amb vector inicial $x^{(0)} = (1,1,1)^T$.

(b) trobeu el valor propi de mòdul mínim, aplicant el mètode de la potència inversa, amb vector inicial $x^{(0)} = (1,1,1)^T$.

(c) calculeu el valor propi restant a partir de la traça de la matriu.

3. Calculeu tots els valors propis de la matriu

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

aplicant el mètode de la potència amb vector inicial $x^{(0)} = (1,1,1,1)^T$.

4. La matriu següent té un valor propi prop de -5.

$$C = \begin{pmatrix} -4.4 & 2 & -0.4 \\ 1.8 & -1 & 0.8 \\ 1.6 & 0 & -0.4 \end{pmatrix}$$

Trobeu-lo aplicant el mètode de la potència desplaçada amb vector inicial $x^{(0)} = (1,1,1)^T$.

5. Trobeu tots els valors propis de:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -0.5 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \\ -3 & -0.5 & 3 \end{pmatrix}$ amb vector inicial $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 2.8 & -0.8 & 0 \\ 0.4 & -0.2 & 2.2 & 0 \\ 0.8 & -0.4 & -1.6 & 3 \end{pmatrix}$ amb vector inicial $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

6. Comproveu, sense calcular-los, que el mòdul dels valors propis de la matriu

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

està comprès entre 1 i 9. Trobeu el valor propi més proper a 1 agafant com a vector inicial

$x^{(0)} = (2, 1, 5)^T$.

7. Calculeu el polinomi característic, els valors propis i els vectors propis de les matrius següents, usant les ordres directes de Maple:

$$(a) \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad\qquad (b) \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Donada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

trobeu el valor propi de mòdul màxim programant pel mètode de la potència amb vector inicial $x_0 = (1, 1, 0)^T$.

Comproveu que es correspon amb la solució obtinguda en l'apartat b) de l'exercici anterior.

9. Calculeu el valor propi de mòdul màxim amb una precisió de 10^{-3}, programant el mètode de la potència per la matriu

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

amb vector inicial $x_0 = (0, 1, 1, 0)^T$.Compareu la vostra resposta amb la solució obtinguda al calcular directament els vectors propis.