



## PROBLEMES DEL TEMA D'INTRODUCCIÓ

### UNITATS

1.1 Determineu l'equació de dimensions de la constant de gravitació universal  $G$ .

**Sol:**  $L^3 \cdot T^{-2} \cdot M^{-1}$

1.2 Demostreu que l'equació de Bernoulli

$$P + \rho g h + 1/2 \rho v^2 = K$$

( $P$ = pressió;  $\rho$ = densitat;  $g$ = acceleració de la gravetat;  $h$ = alçada;  $v$  = velocitat;  $K$  = constant), és homogènia dimensionalment, i trobeu les unitats, en el S.I., de la constant  $K$ .

1.3 La dependència de la viscositat  $\eta$  d'un líquid amb la temperatura  $T$  es pot escriure:  $\eta(T) = \eta_0 \exp(A/T)$ .

Quines són les dimensions d' $A$  i de  $\eta_0$ ?

**Sol:**  $A$  té dimensions de temperatura, les dimensions de  $\eta_0$  són les mateixes que les de  $\eta$ .

1.4 La resistència  $R$  d'un semiconductor depèn de la temperatura  $T$  segons l'expressió  $R = R_\infty \cdot e^{b/T}$ . Quines són les dimensions de  $b$ ?

**Sol:**  $b$  té dimensions de temperatura

1.5 Una ona es pot descriure segons l'equació  $\xi(x,t) = A \sin(kx - \omega t)$ . Quines són les dimensions de  $k$  i  $\omega$ ? I les de  $\xi$ ?

**Sol:**  $L^{-1}$ ,  $T^{-1}$ , les mateixes que les d' $A$ .

1.6 L'energia és una magnitud molt important en física, que té relacions amb d'altres magnituds també molt importants. Per exemple:

$$E = m c^2 \text{ on } c \text{ és la velocitat de la llum}$$

$$E = k_B T \text{ on } k_B \text{ és la constant de Boltzmann}$$

$$E = h f = \hbar \omega \text{ on } h \text{ és la constant de Planck.}$$

Comproveu la homogeneïtat dimensional d'aquestes relacions i trobeu el valor de les constants que hi apareixen. Per cert, hi ha un sistema d'unitats, dit natural, on aquestes constants i altres  $-G$  i  $4\pi\epsilon_0 - s'$  agafen igual a 1, cosa que simplifica moltes expressions (i en complica d'altres).

### VECTORS

1.7 Donats dos punts del pla:  $P_1 = (2,2)$  i  $P_2 = (-1,-2)$ , trobeu el vector que té per origen el punt  $P_2$  i l'extrem  $P_1$ .

**Sol:**  $\overrightarrow{P_2P_1} = (3,4)$

1.8 Escriure el vector que té per components  $\vec{v} = (3,4)$  a partir dels vectors unitaris  $\hat{i} = (1,0)$  i  $\hat{j} = (0,1)$ .

**Sol:**  $\vec{v} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$

1.9 Trobeu el mòdul del vector  $\vec{v} = (-3,4)$ .

**Sol:** 5

**1.10** Un vector té per components  $\vec{v} = (3,4)$ . Trobeu l'angle que forma amb l'eix  $Ox$ .

**Sol:**  $53,1^\circ$

**1.11** Quin angle formen els vectors  $\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j}$ ,  $\vec{B} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ ?

**Sol:**  $75^\circ$

**1.12** Donats els vectors  $\vec{a} = (2,-3)$  i  $\vec{b} = (-1,2)$  i els escalars  $m = 2$  i  $n = 3$ , realitzeu les operacions següents:  
 $\vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{a} - \vec{b}$ ,  $m\vec{a} + n\vec{b}$ ,  $3m\vec{a} - 2n\vec{b}$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{b}$

**Sol:**

$$\vec{a} + \vec{b} = (1, -1), \quad \vec{a} - \vec{b} = (3, -5), \quad m\vec{a} + n\vec{b} = (1, 0), \quad 3m\vec{a} - 2n\vec{b} = (18, -30), \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = -8$$

**1.13** Trobeu el producte escalar dels vectors  $\vec{a} = (3,4)$  i  $\vec{b} = (-2,1)$ .

**Sol:**  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2$

**1.14** Els vectors  $\vec{v}$  i  $\vec{u}$  tenen per mòduls 3 i 4 respectivament i formen un angle de  $60^\circ$ . Trobeu el seu producte escalar.

**Sol:**  $\vec{v} \cdot \vec{u} = 6$

**1.15** Un vector de mòdul 5 forma un angle de  $30^\circ$  amb l'eix  $Ox$ . Trobeu les seves dues components.

**Sol:**  $\vec{v} = (4,33,2,5)$

**1.16** Trobeu les components d'un vector, sabent que el seu mòdul és 5 i les seves components són proporcionals als números 6 i -8.

**Sol:** Hi ha dues solucions:  $\vec{v}_1 = (3, -4)$  i  $\vec{v}_2 = (-3, 4)$

**1.17** Determineu un vector unitari que sigui perpendicular al pla definit pels següents vectors:

$$\vec{A} = (2, 2, 4), \quad \vec{B} = (3, -3, 0)$$

**Sol:**  $\vec{u} = (1, 1, -1) / \sqrt{3}$

**1.18** Trobeu un vector que sigui perpendicular al vector  $\vec{v} = (3, 4)$

**Sol:** Qualsevol vector  $\vec{u} = (u_x, u_y)$  que les seves components verifiquin:  $4u_y = -3u_x$ . Així, si prenem  $u_x = 4$ , tenim que  $u_y = 3$  i per tant obtenim el vector  $\vec{u} = (4, -3)$

**1.19** Quant ha de valer  $c$  per tal que els vectors  $\vec{A} = (2, -1, 1)$ ,  $\vec{B} = (1, 2, -3)$ ,  $\vec{C} = (3, c, 5)$  estiguin en un mateix pla?

**Sol:**  $c = -4$

**1.20** Trobeu un vector de mòdul 5 que sigui paral·lel al vector  $\vec{v} = (-6, 8)$ .

**Sol:** Hi ha dues solucions:  $(-3, 4)$  i  $(3, -4)$

**1.21** Trobeu un vector unitari que tingui la mateixa direcció i sentit que el vector  $\vec{v} = (-3,-4)$ .

**Sol:**  $\vec{u} = (-0.6,-0.8)$

**1.22** Trobeu el producte vectorial dels vectors  $\vec{v} = (2,-1,1)$  i  $\vec{u} = (1,2,-3)$ .

**Sol:**  $\vec{v} \times \vec{u} = (1,7,5)$

**1.23** Dos vectors  $\vec{v}$  i  $\vec{u}$ , ambdós de mòdul 10, tenen la mateixa direcció i sentit que els vectors de components (3,-4) i (-4,3) respectivament. Trobeu el mòdul de la suma  $\vec{v} + \vec{u}$ .

**Sol:**  $2\sqrt{2}$

**1.24** El vector  $\vec{v}(t)$  depèn del paràmetre  $t$  segons l'expressió següent:  $\vec{v}(t) = (t^2, 3t)$ . Trobeu el vector quan  $t=2$ .

**Sol:**  $\vec{v}(2) = (4,6)$

**1.25** Donat el vector  $\vec{r}(t) = (t^2, 3t)$ , trobeu la seva derivada respecte a  $t$ , i el valor d'aquesta quan  $t=2$ .

**Sol:**  $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = (2t, 3)$ ,  $\vec{v}(2) = (4, 3)$

### ERRORS

**1.26** Escriviu correctament els següents valors afectats dels corresponents errors:

563,589 ± 0,0987	76482 ± 13,6	768,276 ± 0,49
0,003875 ± 0,000537	3256,0023 ± 0,094	871004 ± 31,76
4507,36 ± 5,6	24,2 ± 0,000093	514 ± 0.036
0,013 ± 0,00008	8,014 ± 0,0039	575341 ± 630

**1.27** Per un angle d'1°, quin error relatiu es comet al confondre l'angle (expressat en radians) amb el sinus? I al fer el mateix amb la tangent? Per quin angle, en els dos casos, l'error comès supera l'1%? I el 2%? I el 5%?

**Sol:**  $9 \cdot 10^{-7}$ ;  $10^{-4}$ ; 14°; 20°; més de 30°.

**1.28** En una experiència amb un pèndol simple, els valors obtinguts per la longitud  $l$  i el període  $T$  són:

$l = (1,001 \pm 0,001)$  m i  $T = (2,00 \pm 0,01)$  s. Determineu  $g$  amb el seu error.

**Sol:**  $(9,9 \pm 0,1)$  m/s<sup>2</sup>

**1.29** D'un cilindre coneixem l'alçada i el diàmetre amb uns errors relatius de l'1% i el 0,5 % respectivament. Digueu l'error relatiu de l'àrea lateral i del volum.

**Sol:** 1,12%, 1,42%

**1.30** Una barreta de níquel té un diàmetre de 1,063 cm, mesurat amb un micròmetre de 1/100 mm de resolució, i la seva longitud val 12,65 cm, mesurada amb un peu de rei de 1/10 mm de resolució. La densitat relativa del níquel és  $8,9 \pm 0,1$  (respecte l'aigua). Determineu la massa de la barreta.

**Sol:**  $(100 \pm 2)$  g

**1.31** Fem servir una balança de torsió per determinar el valor de la constant de gravitació universal  $G$ , amb dues masses esfèriques de valors  $M = (10000,002 \pm 0,002)$  kg i  $m = (9,9999 \pm 0,0001)$  kg separades una distancia (entre centres) de  $(1,0001 \pm 0,0002)$  m. La força d'atracció mesurada és  $(6,67 \pm 0,01)$   $\mu$ N. Calculeu el valor de  $G$  amb el seu error.

**Sol:**  $(6,67 \pm 0,01) \cdot 10^{-11}$  N m<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>

### GRÀFIQUES

**1.32** L'equació de la posició en un moviment rectilini uniformement accelerat és  $x = 1/2 a t^2$

- Representeu  $x$  en funció de  $t$ , ¿quina gràfica s'obté?
- Com es pot linealitzar aquesta funció?
- Quina serà la ordenada a l'origen de la recta ?
- Quin serà el pendent de la recta ? Què podríem calcular a partir d'aquest pendent?

$t$ (s)	0	1	2	3	4	5	6
$x$ (m)	0	5	20	45	80	125	175

**1.33** La resistència elèctrica d'un fil conductor ve donada per l'expressió  $R = \rho l/A$ , on  $\rho$  representa la resistivitat del material,  $l$  és la longitud del fil i  $A$  és l'àrea de la secció transversal.

- Si representem  $R$  en funció d' $A$ , quina gràfica tindrem?
- Com es pot linealitzar aquesta funció?
- Quina serà l'ordenada a l'origen de la recta?
- Quin serà el pendent de la recta ? Què podríem calcular a partir d'aquest pendent?

**1.34** El període d'un pèndol simple ve donat per l'expressió  $T = 2\pi (l/g)^{1/2}$

- Representeu el període  $T$  en funció de la longitud  $l$  del pèndol. Quin canvi de variable és necessari efectuar per obtenir una recta?
- Com podem trobar la gravetat  $g$  a partir de la gràfica?

$l$ (m)	0.30	0.50	0.70	0.90	1.1	1.3	1.5	1.7
$T$ (s)	1.10	1.40	1.70	1.90	2.10	2.30	2.45	2.60

**1.35** El número de nuclis  $N$  d'una substància radioactiva en un moment  $t$  ve donat per l'expressió  $N = N_0 e^{-\lambda t}$  on  $N_0$  representa el número de nuclis radioactius en l'instant  $t = 0$ ,  $\lambda$  és la constant de desintegració i  $t$  és el temps.

- Representeu  $N$  en funció de  $t$ , quina gràfica obtindrem?
- En quines unitats ve donada  $\lambda$ ?
- Volem representar  $N$  en funció de  $t$ . Quins canvis s'han de fer per tal d'obtenir una recta?
- Quina serà l'ordenada a l'origen de la recta?
- Quin serà el pendent de la recta ?

$t$ (s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$N$	20000	17400	15100	13200	11500	10000	8700	7550	6600	5700	5000

**1.36** Representeu qualitativament les següents gràfiques i proposeu els canvis de variables necessaris per linealitzar-les.

$$Y = aX + b; \quad Y = 1/X; \quad Y = cX^2; \quad Y = d e^{-kX}; \quad Y = mX^n \quad \text{on } a, b, c, d, k, m \text{ i } n \text{ són constants.}$$

**1.37** S'ha mesurat la intensitat de corrent en un circuit de corrent continu en funció del voltatge aplicat; la taula de valors obtinguda és:

$V$ (V)	$I$ (mA)
1.0 ± 0.1	8.70 ± 0.05
1.5 ± 0.2	13.8 ± 0.1
2.0 ± 0.2	17.2 ± 0.1
2.5 ± 0.3	20.7 ± 0.1
2.9 ± 0.3	24.0 ± 0.1
3.6 ± 0.4	30.0 ± 0.2
3.9 ± 0.4	32.8 ± 0.2
4.4 ± 0.5	36.0 ± 0.2
4.7 ± 0.5	39.8 ± 0.2
5.2 ± 0.6	42.5 ± 0.5
5.7 ± 0.6	47.5 ± 0.5
6.1 ± 0.7	51.5 ± 0.5
6.5 ± 0.7	54.5 ± 0.5
6.9 ± 0.7	56.5 ± 0.5
7.0 ± 0.7	58.0 ± 0.5
7.2 ± 0.8	59.5 ± 0.5
7.7 ± 0.8	64.0 ± 0.5
8.0 ± 0.8	67.5 ± 0.5

a) Representeu gràficament la intensitat de corrent en funció del voltatge.

b) Feu una regressió lineal per a trobar l'equació de la recta  $I(V) = aV + b$  i el coeficient de correlació  $r$ .

pendent de la recta:  $a =$

punt de tall amb l'eix d'ordenades :  $b =$

coeficient de correlació:  $r =$

c) Quant val la resistència del circuit?