PROBLEMES

PROBABILITAT I ESTADÍSTICA

Escola Politècnica Superior de Castelldefels

Josep Burillo

Alícia Miralles

Sonia Pérez

Miquel Rius

Oriol Serra

Curs acadèmic 2004-2005

0. Tema 0. Combinatòria.

0.1. Exercicis i problemes

1. Amb els dígits 0-1-2-3-4-5 volem comptar els nombres que es poden formar agafant 4 xifres de les anteriors, seguint les especificacions següents, (tingueu en compte el cas en què es poden repetir les xifres i el cas en què no es poden repetir).

   a) Totes les possibilitats.

   b) Nombres de 4 xifres, (0132 és un nombre de 3 xifres).

   c) Són capicua

   d) Nombres de 4 xifres que són capicua.

2. De quantes maneres es poden repartir tres ordinadors iguals entre cinc persones si:

   a) Cada persona només pot rebre un ordinador com a màxim.

   b) No hi ha la restricció anterior.

   Repetiu l'exercici considerant ara que els ordinadors són diferents.

3. De quantes maneres poden formar els 12 membres d'un club tres comissions de 5,4 i 3 membres respectivament, si cada persona només pot estar en una comissió?

4. **A** Tenim 10 plaques de memòria iguals i les volem posar a 20 ordinadors.

   a) De quantes maneres ho podem fer si els ordinadors no tenen límit de memòria?

   b) De quantes maneres si com a màxim a un ordinador només li podem posar una placa.

   Repeteix els apartats anteriors considerant ara que les plaques de memòria són diferents.

5. **A** De quantes maneres podem treure 3 cartes d'una baralla de 40 (no importa l'ordre). Quantes d'aquestes maneres corresponen al cas "treure almenys una figura". (Considereu les dues possibilitats, amb reemplaçament i sense).

6. **A** De quantes maneres podem formar grups de 5 cartes d'una baralla de 40 si hi ha d'haver 2 oros i 3 copes (sense reemplaçament i no importa l'ordre).

7. Si tenim 11 amics, de quantes maneres en podem convidar 5 a dinar? Si dos són parella i van sempre junts, de quantes maneres en podem convidar 5? I si dos estan barallats i no els podem convidar junts, de quantes maneres els podem convidar?

8. El Reial Decret 2822/1998 de 23 de desembre de 1998, que regula la normativa de matriculació dels vehicles, estableix:

> "En las placas de matrícula se inscribirán dos grupos de caracteres constituidos por un número de cuatro cifras, que irá desde el 0000 al 9999, y de tres letras, empezando por las letras BBB y terminando por las letras ZZZ, suprimiéndose las cinco vocales, y las letras Ñ, Q, CH y LL."

   a) Quantes matrícules poden formar-se d'acord amb l'actual normativa?

   Si les matrícules es formessin igualment amb 7 caràcters (lletres de l'alfabet, segons la normativa, i els dígits del 0 al 9), quantes matrícules podrien fer-se si:

   b) Cada caràcter pot ser lletra o número.

   c) Tres caràcters consecutius són lletres (no necessàriament els tres primers) i la resta números.

   d) Exactament tres caràcters són lletres i els altres números.

9. **B** Amb una plantilla de 15 infermeres i 5 metges, quantes guàrdies diferents es poden fer formades per 4 infermeres i 2 metges?. Quantes guàrdies hi ha en les que l'infermera més jove no coincideix amb el metge més vell?. Si dues infermeres són bessones, en quantes guàrdies no coincideixen?

10. Amb un alfabet de 10 consonants i 5 vocals, quantes paraules de 5 lletres sense dos vocals seguides ni tres consonants seguides es poden formar? (Feu un arbre amb totes les possibles distribucions)

11. **C** Amb una baralla de 52 cartes, quants pokers, fulls i trios es poden formar? (Un trio no és un full!)

12. Quina és la mida mínima d'un alfabet per poder identificar els individus d'una població de mida 10^6 amb paraules de tres lletres. Quina és la llargada mínima de les paraules d'un alfabet de tres lletres per poder identificar els individus d'una població de mida 10^6.

13. Quantes diagonals té un polígon de 10 vèrtexs?. Quants triangles podem formar amb aquests vèrtexs.?, Quantes diagonals surten d'un determinat vèrtex i quants triangles el contenen?

14. En un ascensor hi ha n usuaris a la planta baixa i puja m pisos. Quantes distribucions de nombres d'usuaris sortint a cada planta hi ha? En quantes d'aquestes distribucions no baixa ningú a la planta 1? En quantes d'aquestes distribucions surt com a molt un usuari a cada planta?

15. Quantes paraules de llargada n d'un alfabet de tres símbols $\{0, 1, -1\}$ tenen exactament r 0's. Quantes tenen exactament r 0's i s uns? Quantes n'hi ha que la suma de dígits és 0?

16. De quantes maneres diferents es poden distribuir n boles en m caixes numerades si

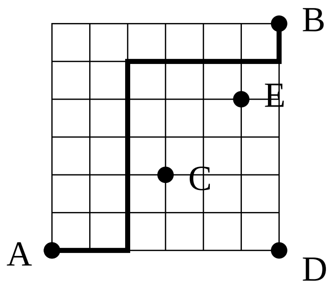
    a) Les boles són distingibles.

    b) Les boles no són distingibles.

    c) Cada caixa té com a molt una bola (considereu els casos de boles distingibles i boles no distingibles).

    d) Si exactament una de les caixes està buida i les boles són indistingibles.

17. **B** Es vol conectar (cablejar) els punts A i B, de manera que el camí segueixi la quadrícula que marca el dibuix. Només és permès anar a la dreta(1) i a dalt(0). En el gràfic teniu representat un dels camins possibles, que vindria descrit per la seqüència 110000011110.



    a) Calcula el nombre de camins possibles entre A i B.

    b) Calcula el nombre de camins possibles entre A i B que passin per C.

    c) Calcula el nombre de camins possibles entre A i B que passin per C i per E.

18. **B** Considereu totes les solucions de l'equació $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 50$, on x_1, x_2, x_3, x_4 prenguin valors naturals.

    a) Quantes en hi ha?

    b) Quantes en què es verifiqui $x_i = 0$ per $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ i $x_j \neq 0$ per $j \neq i$?

    c) Quantes hi ha, de manera que x_1, x_2, x_3, x_4 prenguin valors parells?

    d) Quantes hi ha, de manera que x_1, x_2, x_3, x_4 prenguin valors senars?

19. **A** Volem omplir la quadrícula següent amb 20 fitxes diferents.

    a) De quantes maneres ho podem fer si podem posar totes les fitxes que volguem dins d'un mateix quadre?

	1	2	3	4	5
a					
b					
c					
d					
e					

b) De quantes maneres, si cada quadre només pot tenir com a màxim una fitxa?

c) De quantes maneres, si cada quadre només pot tenir com a màxim una fitxa i volem deixar una única fila buida?

20. En un control de qualitat prenem una mostra de 10 components que poden ser bons, B, o inservibles, I. Suposeu primer que cada component correspon a una línia de producció diferent (és a dir que importa l'ordre de la mostra), quantes mostres hi ha amb:

a) Exactament tres components inservibles.

b) Cap component inservible.

c) Almenys dos components bons.

Suposeu que tots els elements són de la mateixa línia de producció (és a dir que no importa l'ordre de la mostra). Ara, quantes mostres hi ha amb:

a) Exactament dos components inservibles.

b) Més components bons que inservibles.

c) Almenys 8 components bons.

21. **A** En un control de qualitat prenem una mostra de 10 components que poden ser bons, B, reparables, R, o inservibles, I. Suposeu primer que cada component correspon a una línia de producció diferent (és a dir que importa l'ordre de la mostra), quantes mostres hi ha amb:

a) Exactament tres components inservibles.

b) Cap component reparable.

c) Almenys dos components bons.

Suposeu que tots els elements són de la mateixa línia de producció (és a dir que no importa l'ordre de la mostra). Ara, quantes mostres hi ha amb:

a) Exactament dos components inservibles i tres de bons.

b) Més components bons que inservibles.

c) Cap component reparable i almenys 8 de bons.

22. **C** Cal repartir 100 alumnes en 4 aules (cada aula té una capacitat per a 100 alumnes). De quantes maneres es pot fer si els alumnes són indistingibles i:

    a) No hi posem cap restricció.

    b) Volem 25 alumnes a cada aula.

    c) Volem que la primera aula quedi buida.

    d) Volem que alguna aula quedi buida.

    e) Volem, almenys, 15 alumnes per aula.

23. **C** De quantes maneres es poden posar en fila 15 persones distingibles si

    a) No hi posem cap restricció.

    b) Dues persones concretes han d'anar sempre juntes.

    c) Quatre persones concretes han d'anar sempre juntes.

    d) Dues persones concretes han d'anar sempre separades.(Feu-ho de dues maneres diferents, fent servir els apartats a) i b), i directament, col.loca primer 13 persones i després les altres dues separades)

24. El teu DNI té 8 xifres, escriu-les i contesta:

    a) Quantes ordenacions es poden fer amb les xifres del teu DNI?(Cada xifra ha d'aparèixer tantes vegades com aparegui en el teu DNI)

    b) Quantes ordenacions comencen i acaben amb la mateixa xifra?

    c) Quantes ordenacions són múltiples de dos?

    d) Quantes ordenacions són múltiples de tres?

    e) Quantes ordenacions són múltiples de cinc?

    f) Quantes ordenacions són múltiples de sis?

25. **B** D'una baralla espanyola de 40 cartes (cada pal va numerat 1,2,. . . ,7,10,11,12) prenem mostres no ordenades de mida tres sense reposició, quantes mostres diferents obtenim:

    a) Sense cap restricció.

    b) Amb totes les cartes d'oros.

    c) Amb totes les cartes de pals diferents.

    d) Amb almenys una carta d'espases.

    e) Amb el número de cadascuna de les cartes múltiple de 3.

f) Repetiu tots els apartats anteriors per mostres no ordenades amb reposició.

26. **E** Tres blocs de cases tenen 10 vivendes cadascun i cada bloc té un president. Cal triar una comissió de 6 veïns (cada vivenda només té un veí) per anar a parlar amb... De quantes maneres es pot formar la comissió si:

   a) No hi ha cap restricció.

   b) Hi ha dos representants de cada bloc.

   c) Hi ha almenys un representant de cada bloc.

   d) Hi ha tots els veïns del mateix bloc.

   e) Hi ha almenys un president a la comissió.

   f) Hi ha exactament dos presidents a la comissió.

   g) Hi ha exactament dos presidents i el mateix nombre de representants de cada bloc.

   Solució de l'apartat c). Sigui B_i el nombre de comissions sense representants del bloc i i sigui B_{ij} el nombre de comissions sense representants dels blocs i, j. El nombre de comissions on hi ha algun bloc sense cap representant és

$$\sum_i B_i - \sum_{ij} Bij = 3 \cdot \binom{20}{6} - 3 \cdot \binom{10}{6} = 115{,}650$$

   i la solució és 593.775-115.650=478.125

27. Quantes jornades ha de durar una lliga en la que competeixen 24 equips si tots han de jugar contra tots dues vegades (un partit a casa i un a fora), sabent que cada jornada juguen tots.

28. Amb els codis $\{0, 1, 2\}$ s'envien cadenes de 10 dígits.

   a) Quantes cadenes es poden enviar?.

   b) Quantes cadenes tenen exactament 3 zeros?.

   c) Quantes cadenes tenen exactament 3 zeros en posicions contigües?.

   d) Quantes cadenes tenen exactament 2 zeros i 5 uns?.

   e) Quantes cadenes fan servir unicament els dígits $\{0, 1\}$ com a màxim?

   f) Quantes fan servir, com a màxim, dos dígits diferents?

29. Es passa una enquesta a una mostra de 20 persones d'un col.lectiu de 100 persones de les quals 60 són homes i la resta dones.

   a) Quantes mostres es poden prendre?.

b) Quantes mostres es poden prendre formades exclusivament per homes?.

c) Quantes mostres es poden prendre formades per 10 homes i 10 dones?.

d) Si hi ha 2 homes i 3 dones molt interessats en respondre les enquestes, quantes mostres hi ha formades per 10 homes i 10 dones que els incloguin?.

30. **B** Tenim 30 exemplars del mateix llibre i disposem de quatre bosses diferents per a transportar-los, de quantes maneres diferents podem disposar els llibres a les bosses?. Contesteu a la mateixa pregunta si ara els llibres són tots diferents.

31. **D** Sigui $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

a) Quants subconjunts d'A contenen tots els nombres imparells d'A?.

b) Quants subconjunts d'A contenen exactament tres nombres imparells?.

c) Quants subconjunts d'A de 5 elements contenen exactament tres nombres imparells?.

d) Quants subconjunts no buits d'A tenen tants nombres parells com imparells?.

32. **D** Disposem d'una baralla espanyola de 40 cartes. Volem comptar quantes mostres de mida 4 agafades sense reposició hi ha que tinguin:

a) Totes les cartes de pals diferents.

b) Totes les cartes del mateix pal.

c) Dues cartes d'oros i dues de copes.

d) Dues cartes d'un mateix pal i les altres dues d'un mateix pal diferent de l'anterior.

33. **E** L'etiquetament d'un producte consta de tres dígits del zero al 9 i de sis lletres (disposem de 25 lletres diferents). Els dígits i les lletres poden ser iguals o diferents. Quants etiquetaments hi ha amb:

a) Els tres dígits numèrics davant i les lletres al darrera.

b) Els tres dígits numèrics seguits.

c) Les lletres només poden ser vocals.

d) Les lletres només poden ser consonants i han d'estar a l'inici de l'etiqueta.

34. **C** Tirem un dau de sis cares 10 vegades. Quants resultats possibles amb les següents característiques hi ha:

a) Els 10 resultats són parells.

b) Hi ha exactament quatre tresos i quatre sisos.

c) Hi ha exactament tres sisos.

d) Han sortit tres cincs, quatre uns i tres sisos.

35. **C** Volem posar 8 cartes en 12 sobres diferents. De quantes maneres ho podem fer si:

a) Totes les cartes són iguals i com a màxim volem posar una carta a cada sobre.

b) Totes les cartes són iguals i podem omplir cada sobre amb tantes cartes com volguem.

c) Totes les cartes són diferents i com a màxim volem posar una carta a cada sobre.

d) Totes les cartes són diferents i podem omplir cada sobre amb tantes cartes com volguem.

36. Fent servir el sistema de numeració en base 2 (només amb els dígits 0 i 1)

a) Quants nombres de 10 xifres hi ha?.

b) Quants, dels anteriors, no comencen per 0?.

c) Quants tenen exactament tres zeros i no comencen per zero?.

d) Quants tenen exactament quatre uns i són capicues?.

37. En el sistema de numeració decimal,

a) Quants nombres de tres xifres hi ha? (002 té tres xifres).

b) Quant sumen tots els nombres de tres xifres?.

c) Quants nombres de tres xifres amb totes les xifres senars hi ha?.

d) Quant sumen tots els nombres de l'apartat anterior?.

e) Quants nombres de tres xifres hi ha amb dues xifres parells i una de senar?.

38. Un ascensor arriba a la tercera planta amb 14 persones distingibles. De quantes maneres poden sortir de l'ascensor?. I si les persones són indistingibles?.

39. **E** De quantes maneres poden seure en una fila de 14 seients 10 nois i 4 noies si:

a) No hi ha cap restricció.

b) Els nois seuen tots junts i les noies també.

c) Les noies volen seure totes juntes i als nois els és igual seure junts o separats.

d) Hi ha una parella (un noi i una noia) que volen seure junts, i no hi ha cap altra restricció sobre la resta de nois/ies.

40. Tenim 12 punts sobre una circumferència.

a) Quants triangles diferents podem fer?.

b) Quantes cordes diferents podem fer?.

c) Quantes diagonals té el dodecàgon que determinen els 12 punts?.

41. **D** En un passeig aleatòri unidimensional el passejant dóna passes endavant (+1) o endarrera (-1) aleatòriament. Si un passejant fa 100 passes,

    a) Quants passejos aleatòris pot haver fet si finalment està avançat 30 passes?.

    b) Quants passejos aleatòris pot haver fet si finalment està avançat 30 passes i les 10 primeres passes han estat endavant.

    c) Quants passejos aleatòris pot haver fet si finalment està avançat 30 passes i les últimes 30 passes han estat endarrera?.

42. **E** Un quiosc comercialitza 5 diaris diferents. Un guia turístic demana als 25 turistes que el segueixen que triïn cadascun d'ells un diari. Quantes comandes diferents pot fer el guia al quiosquer?

43. **D** De quantes maneres podem posar 12 llibres en tres prestatgeries si:

    a) Els llibres són diferents .

    b) Els llibres són iguals.

44. **D** De quantes maneres podem posar 12 llibres en tres maletes diferents si:

    a) Els llibres són diferents .

    b) Els llibres són iguals.

45. Quants costats té un polígon amb 90 diagonals?.

46. **E** Conectem 10 cables a 20 endolls diferents.

    a) Si només podem conectar com a màxim un cable a cada endoll. Troba el nombre de configuracions posibles en les casos:

        1) els cables són exactament iguals (indistingibles)

        2) els cables són diferents (distingibles).

    b) Si als endolls hi podem conectar tants cables com volguem. Troba el nombre de configuracions posibles en les casos:

        1) els cables són exactament iguals (indistingibles)

        2) els cables són diferents (distingibles).

0.2. Solucions

1. Es poden repetir: a)1296, b)1080, c)36, d)30. No es poden repetir: a)360, b)300, c)0, d)0.
2. Iguals: a) $C_{5,3}$, b) $CR_{5,3}$. Diferents: a) $P_{5,3}$, b) $PR_{5,3}$.
3. $\binom{12}{5} \cdot \binom{7}{4} \cdot \binom{3}{3}$.
4. Iguals:a) $CR_{20,10}$, b) $\binom{20}{10}$. Diferents: a) $PR_{20,10}$,b) $P_{20,10}$.
5. Amb reemplaçament: $CR_{40,3}$, $CR_{40,3} - CR_{28,3}$. Sense: $C_{40,3}$, $C_{40,3} - C_{28,3}$.
6. $\binom{10}{2} \cdot \binom{10}{3}$.
7. $C_{11,5}$, $C_{9,5} + C_{9,3}$, $C_{11,5} - C_{9,3}$.
8. a) $10^4 \cdot 20^3$, b) 30^7, c) $5 \cdot 20^3 \cdot 10^4$, d) $\binom{7}{3} \cdot 20^3 \cdot 10^4$.
9. $\binom{15}{4} \cdot \binom{5}{2}$, $\binom{15}{4} \cdot \binom{5}{2} - \binom{14}{3} \cdot \binom{4}{1}$, $\binom{15}{4} \cdot \binom{5}{2} - \binom{13}{2} \cdot \binom{5}{2}$.
10. $10^4 \cdot 5 + 5 \cdot 10^3 \cdot 5^2 + 10^2 \cdot 5^3$.
11. $13 \cdot 48$ pokers , $13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2}$ fulls i $13 \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{48}{2} - 13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2}$ trios.
12. 10^2, 13.
13. $C_{10,2} - 10$, $C_{10,3}$, $10 - 3$, $\binom{9}{2}$.
14. $\binom{m+n-1}{n}$, $\binom{m+n-2}{n}$, $\binom{m}{n}$.
15. $\binom{n}{r} \cdot 2^{n-r}$, $\binom{n}{r} \cdot \binom{n-r}{s}$, $\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{i} \cdot \binom{n-i}{i}$
16. a) m^n, b) $\binom{m+n-1}{n}$, c) $P_{m,n}$ distingibles i $C_{m,n}$ indistingibles,d) $m \cdot CR_{m-1,n-(m-1)}$.
17. a) $\binom{12}{6}$, b) $\binom{5}{2} \cdot \binom{7}{3}$, c) $\binom{5}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{3}{1}$
18. a) $\binom{50+4-1}{4-1}$, b) $4\binom{(50-3)+3-1}{3-1}$, c) $\binom{\frac{50}{2}+4-1}{4-1}$, d) $\binom{\frac{50-4}{2}+4-1}{4-1}$.
19. a) $PR_{25,20}$, b) $P_{25,20}$, c) $5 \cdot P_{20,20}$.
20. Diferent línia de producció: a) 120, b) 1, c) 1013. Mateixa línia de producció: a) 1, b) 5, c) 3.
21. Diferent línia de producció: a) 15360, b) 1024, c) 52905. Mateixa línia de producció: a) 1, b) 30, c) 3.
22. 176851, 1, 5151, 20002, 12341.

23. a) $1{,}3077 \cdot 10^{12}$, b) $1{,}7436 \cdot 10^{11}$, c) $1{,}1496 \cdot 10^{10}$, d) $1{,}1333 \cdot 10^{12}$.

24.

25. Per mostres no ordenades sense reposició: 9880, 120, 4000, 5820, 220. Per mostres no ordenades amb reposició: 11480, 220, 4000, 6520, 364.

26. a) 593775, b) 91125, c) 478125, d) 630, e) 297765, f) 52650, g) 8748.

27. 46.

28. a) 59049, b) 15360, c) 1024, d) 2520, e) 1024, f) 3069.

29. a) $5{,}3598 \cdot 10^{20}$, b) $4{,}1918 \cdot 10^{15}$, c) $6{,}3909 \cdot 10^{19}$, d) $1{,}9734 \cdot 10^{16}$.

30. Llibres iguals: 5456, llibres diferents: $1{,}1529 \cdot 10^{18}$.

31. a) 16, b) 64, c) 24, d)69.

32. a) 10000, b) 840, c) 2025, d) 12150.

33. a) $2{,}4414 \cdot 10^{11}$, b) $1{,}7090 \cdot 10^{12}$, c) $1{,}3125 \cdot 10^{9}$, d) $6{,}4 \cdot 10^{10}$.

34. a) 59049, b) 50400, c) $9,3750 \cdot 10^{6}$ d) 4200.

35. a) 495, b) 75582, c) $1{,}9958 \cdot 10^{7}$, d) $4{,}2998 \cdot 10^{8}$.

36. a) 1024, b) 512, c) 84, d) 10.

37. a)1000, b) 499500, c) 125, d) 69375, e) 375.

38. Distingibles: 16384, indistingibles: 15

39. a) $8{,}7178 \cdot 10^{10}$, b) $1{,}7418 \cdot 10^{8}$, c) $9{,}58 \cdot 10^{8}$, d) $1{,}2454 \cdot 10^{10}$

40. a) 220, b) 66, c) 54.

41. a) $1{,}0951 \cdot 10^{27}$, b) $1{,}1325 \cdot 10^{25}$, c) $1{,}2103 \cdot 10^{7}$.

42. 23751.

43. a) $4{,}3589 \cdot 10^{10}$, b) 91.

44. a) $5,3144 \cdot 10^{5}$, b) 91.

45. 15

46. Si podem conectar com a màxim un cable: 184756, $6{,}7044 \cdot 10^{11}$. Si podem conectar tants cables com volguem: $2{,}003 \cdot 10^{7}$, $1,0240 \cdot 10^{13}$.

1. Tema 1. Càlcul de probabilitats.

1.1. Exercicis i problemes

1. En un curs de quatre assignatures, el 70 % aproven l'assignatura A, el 75 % aproven l'assignatura B, el 80 % aproven l'assignatura C i el 85 % aproven l'assignatura D. Quin és el percentatge mínim d'estudiants que aproven les quatre assignatures?

2. Determineu la distribució de probabilitat de la suma de resultats obtinguts en tirar dos daus. Quina distribució s'obtindria si s'utilitzen dos daus amb cares numerades $1, 3, 4, 5, 6, 8$ en un i $1, 2, 2, 3, 3, 4$ a l'altre?

3. El resultat d'un experiment és un nombre enter entre 1 i 4 equiprobable. L'experiment es repeteix dues vegades de forma independent i s'obtenen els resultats E_1 i E_2. Calculeu les probabilitats de $A = \{E_1 = E_2\}$, $B = \{E_1 > E_2\}$, i $C = \{E_1 + E_2 \geq 6\}$. Calculeu les probabilitats de $A, B, A \cap B, A \cap C, B \cap C, A^c \cap B$ i $A \cup B \cup C$.

4. En un espai de probabilitat coneixem les probabilitats $P(A) = 0{,}2$, $P(B) = 0{,}3$, $P(A \cup B) = 0{,}4$. Determineu les probabilitats $P(A^c \cap B)$ i $P(A \cap B^c)$.

5. Siguin A i B dos successos independents. Són independents A i B^c? i A^c i B^c?

6. Tenim un dau amb tres uns, dos dosos i un tres. D'altra banda, tenim una urna amb tres boles blanques i dues negres. Llancem el dau i agafem tantes boles com el número que surti al dau.

   a) Calculeu la probabilitat de treure com a mínim una bola blanca.

   b) Sabent que hem tret com a mínim una bola negra, calculeu la probabilitat d'haver tret un dos al dau.

7. Suposem que neixen més nenes que nens. Comproveu que és més probable tenir dos fills del mateix sexe que de sexe diferent.

8. Quina és la probabilitat d'aprovar un test de 20 preguntes amb quatre opcions per a cadascuna (de les quals només una és vàlida) contestant a l'atzar? Quina és aquesta probabilitat si només es contesten a l'atzar 15 preguntes i se'n deixen 5 en blanc?

9. Siguin A, B, C tres successos tals que $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$. Es pot deduir que A i B són independents?

10. (El problema del cavaller de Méré) El cavaller de Méré apostava que en tirar un dau 4 vegades almenys sortiria un sis. Després de guanyar moltes vegades ningú no volia jugar amb ell i va canviar el joc, apostant que en 24 tirades de dos daus sortiria un doble sis. És més probable que perdi o que guanyi? Quin és el nombre mínim de tirades a partir del qual és més probable guanyar que perdre?

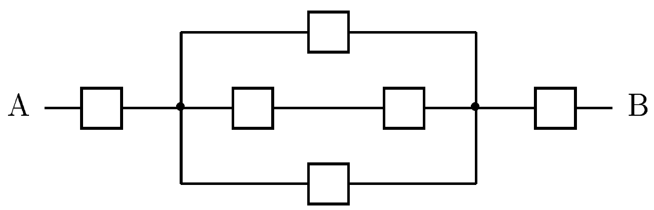
11. Un senyor porta sis claus semblants, dues de les quals obren els dos panys de la porta de casa seva. Si en perd una, quina és la probabilitat que pugui entrar a casa? Quina és la probabilitat que les dues primeres claus que tria obrin la porta?

12. En un sistema de transmissió la probabilitat d'error en enviar un bit és $p = 0{,}1$, independentment dels altres bits enviats.

    a) Quina és la probabilitat p_n que en un missatge de n bits no hi hagi cap error? Quin és el el valor mínim n_0 a partir del qual $p_{n_0} < 1/2$?

    b) Per disminuir la probabilitat d'error s'envia cada bit per triplicat. A cada bloc de tres bits rebuts, el receptor descodifica com a 1 el bit enviat si hi ha més 1 que 0 al bloc i 0 altrament (aquest és el codi de repetició). Quina és ara la probabilitat q_n que en un missatge de n bits no hi hagi cap error? Quin és el el valor mínim n_0 a partir del qual $q_{n_0} < 1/2$?

13. Cada element del sistema de la figura següent té probabilitat de fallada $p = 0{,}1$ independent dels altres. El sistema funciona mentre hi ha un camí de A a B que no passa per cap element defectuós. Quina és la probabilitat que el sistema falli?



14. En un lot de n xips, n'hi ha l que són defectuosos.

    a) Quina és la probabilitat que en una mostra de mida m n'hi hagi r de defectuosos?

    b) Quina seria aquesta probabilitat si es pren la mostra de mida m amb reemplaçament? Compareu-la amb l'anterior pels valors $n = 20$, $l = 2$, $m = 10$ i $r = 1$, i per als valors $n = 100$, $l = 10$, $m = 10$ i $r = 1$.

15. Una caixa conté 10 monedes normals i 20 de trucades per a les quals $P(\text{cara}) = 0{,}25$. Es treu a l'atzar una moneda de la caixa i es tira dues vegades.

a) Quina és la probabilitat que surtin dues cares?

b) Si han sortit dues cares, quina és la probabilitat que la moneda fos trucada?

16. Es treuen dues boles d'una bossa que en conté 5 de vermelles, 3 de blanques i 2 de verdes.

    a) Calculeu la probabilitat que les dues boles siguin del mateix color.

    b) Si les dues boles són del mateix color, quina és la probabilitat que siguin de color blanc?

17. Una fàbrica produeix un 30 % de claus, un 25 % de cargols i un 45 % de xinxetes. Entre els claus, cadascun té una probabilitat del 0,005 de ser defectuós; la probabilitat que un cargol sigui defectuós és de 0,003, i una xinxeta, de 0,008. Si una peça és defectuosa, quina és la probabilitat que sigui una xinxeta?

18. **D** Per tal d'assistir a un examen un estudiant compta amb l'ajuda d'un despertador, el qual aconsegueix despertar-lo el 80 % dels casos. Quan el despertador el desperta, la probabilitat que faci l'examen és del 0,9, mentre que si no el desperta la probabilitat que faci l'examen és del 0,5. Si fa l'examen, quina és la probabilitat que el despertador l'hagi despertat? Si no fa l'examen, quina és la probabilitat que no l'hagi despertat?

19. Un metge sap que només el 60 % dels pacients que van a la consulta estan malalts. Per poder distingir entre els malalts i els que no ho són, el metge disposa d'una anàlisi que presenta el 95 % de fiabilitat (és a dir, dóna el resultat correcte el 95 % de les vegades que s'aplica). Si un pacient dóna positiu, quina és la probabilitat que realment estigui malalt?

20. En una població hi ha un 24 % d'individus que són homes i fumen, i un 35 % que són dones i no fumen. Si la proporció d'homes és del 55 %, quina és la probabilitat que un individu escollit a l'atzar entre els fumadors sigui dona?

21. En un examen hi ha quatre problemes. El primer val 3 punts, el segon 2 i el tercer i el quart 2,5 cada un. La probabilitat de fer bé els problemes és 0,6, 0,8, 0,4 i 0,4, per aquest ordre.

    a) Quina és la probabilitat de no aprovar?

    b) Si un estudiant ha aprovat, quina és la probabilitat que hagi fet bé el primer problema?

22. **B** Un servei tècnic té tres equips de reparació, A, B i C, els quals efectuen el mateix nombre de reparacions. L'equip A resol favorablement el 80 % de les reparacions, l'equip B el 75 % i l'equip C el 65 %.

    a) Quina és la probabilitat que una reparació defectuosa correspongui a un treball efectuat per l'equip A.

    b) Es detecten cinc reparacions defectuoses. Quina és la probabilitat que n'hi hagi, com a molt, una realitzada per l'equip A.

23. Una urna conté tres boles negres i dues boles blanques. Un primer jugador treu tres boles. Torna a l'urna una bola negra si entre les boles que ha tret n'hi ha més de negres. Si no és així, torna a l'urna una bola blanca. A continuació, el segon jugador extreu una bola. El joc consisteix a endevinar quantes boles blanques ha extret el primer jugador. Si el segon jugador ha extret una bola blanca, quina és la probabilitat que el primer jugador hagi extret:

a) Cap bola blanca.

b) Una bola blanca.

c) Dues boles blanques.

24. **E** La probabilitat que hi hagi embús a la Diagonal a les 8 del vespre és de 0,4 els dies que no juga el Barça, mentre que puja a 0,8 els dies de partit. Sabem també que el Barça juga dos partits per setmana.

a) Calculeu la probabilitat que hi hagi embús un dia qualsevol.

b) Si un dia determinat vaig a la Diagonal a les 8 del vespre i hi ha embús, calculeu la probabilitat que estigui jugant el Barça.

25. **A** Considereu totes les matrícules que es poden formar amb quatre dígits, del 0 al 9. Prenem una matrícula a l'atzar, trobeu la probabilitat que:

a) Tingui totes les xifres diferents.

b) Tingui exactament dues xifres iguals.

c) Tingui dos parells de xifres iguals.

d) Tingui exactament tres xifres iguals.

e) Tingui totes les xifres iguals.

26. **A** Diem que una butlleta amb un nombre parell de dígits és graciosa si la suma de la primera meitat de les xifres coincideix amb la suma de la segona meitat de les xifres. Una butlleta de 6 xifres, cada xifra pot ser un dígit entre 0 i 9, que acaba en 234, quina probabilitat té de ser graciosa?.

27. Considerem el conjunt de totes les mostres ordenades amb reposició de longitud n formades amb el dígits $0, 1, 2$. Prenem una d'aquestes mostres a l'atzar, trobeu la probabilitat que:

a) Comenci per zero.

b) Tingui exactament $m + 2$ zeros, dos dels quals estan a l'inici i al final de la mostra respectivament $(m + 2 \leq n)$.

c) Tingui exactament m_0 zeros, m_1 uns i m_2 dosos.

28. **B** En treure tres cartes d'una baralla de 40 cartes, quina és la probabilitat de treure almenys una figura?

29. (Problema dels aniversaris) Quina és la probabilitat p_n que en un grup de n persones n'hi hagi almenys dues que tenen l'aniversari el mateix dia. Quin és el valor més petit de n pel qual $p_n > 1/2$. (Se suposa que els aniversaris estan distribuïts uniformement al llarg dels dies de l'any i que tots els anys tenen 365 dies.)

30. S'ensenya una mona a escriure a màquina i tecleja un text de 14 caràcters triant cadascuna de les 27 tecles de lletres (inclòs l'espai) a l'atzar. Quina és la probabilitat que escrigui la frase 'Sóc inteligent'?

31. **B** El 70 % dels alumnes que cursen l'assignatura A aproven, i el 75 % dels que cursen l'assignatura B també. Aleshores:

    a) Quins són els percentatges màxims i mínim d'alumnes que aproven les dues assignatures?.

    b) Si el 52,5 % d'alumnes aproven les dues assignatures, és independent aprovar l'assignatura A que aprovar l'assignatura B?.

    c) Si el 60 % aproven les dues assignatures, quin percentatge d'alumnes aproven almenys una assignatura?.

    d) Si el 60 % aproven les dues assignatures, quin percentatge d'alumnes suspen les dues assignatures?.

    e) Si el 50 % aproven l'assignatura A i suspenen l'assignatura B, quin percentatge aprova les dues?, quin percentatge aprova B i suspen A?

32. **C** Siguin A i B dos esdeveniments amb $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0,7$, $P(A) = 0,4$ i $P(B) = 0,6$, quant val $P(\bar{A} \cap B)$, $P(B \cup \bar{A})$ i $P(A \cup B)$?

33. **C** En una reunió hi ha n homes i n dones que formen n parelles sentimentals. Trobeu:

    a) La probabilitat que al agafar a l'atzar un home i una dona formin parella sentimental.

    b) Sigui A_i l'esdeveniment que es compleix quan en formar n parelles a l'home i li correspon la seva parella sentimental, trobeu $P(A_i)$

    c) Sigui A_{ij} l'esdeveniment que es compleix quan en formar n parelles als homes i i j els correspon la seva parella sentimental, trobeu $P(A_{ij})$

    d) Sigui A_{ijk} l'esdeveniment que es compleix quan en formar n parelles als homes i, j i k els correspon la seva parella sentimental, trobeu $P(A_{ijk})$

    e) Feu n=3 i trobeu la probabilitat que almenys a un home li correspongui la seva parella sentimental (és a dir trobeu $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$)

34. **D** Prenem un nombre de tres xifres a l'atzar (002 ho és). Trobeu:

a) La probabilitat que la segona xifra sigui 3.

b) La probabilitat que la segona xifra sigui 3 sabent que totes les xifres són senars.

c) La probabilitat que la segona xifra sigui 3 sabent que alguna xifra és 3.

d) La probabilitat que la segona xifra sigui 3 sabent que la suma de les xifres és 9.

35. **E** Tirem un dau i d'una baralla de 48 cartes (12 per pal) prenem tantes cartes sense reposició com indiqui el resultat obtingut. Trobeu la probabilitat de:

a) Treure alguna carta d'oros.

b) Treure totes les cartes de pals diferents.

c) No treure cap carta d'oros sabent que ha sortit un tres.

d) Treure totes les cartes de pals diferents sabent que ha sortit un tres.

e) Treure exactament una carta de copes sabent que ha sortit senar.

f) Haver tret un tres sabent que totes les cartes eren de pals diferents.

36. **D** Quantes vegades cal tirar un dau, com a mínim, per tal que la probabilitat d'obtindre un sis sigui:

a) Més gran que 0,5.

b) Més gran que 0,9.

37. **C** Tirem un dau i posteriorment una moneda (cara=0, creu=1) tantes vegades com indiqui el resultat de la tirada del dau. Trobeu:

a) La probabilitat d'obtindre un nombre, en base 2, acabat en zero.

b) La probabilitat d'obtindre un nombre, en base 2, amb exactament tres uns sabent que ha sortit un quatre.

c) La probabilitat d'obtindre un nombre, en base 2, amb almenys 4 dígits dels quals tres siguin uns i la resta zeros.

d) La probabilitat que hagi sortit un quatre sabent que han sortit almenys 4 dígits dels quals exactament tres uns i la resta zeros.

38. **E** Tirem un dau dues vegades i anotem els resultats obtinguts. Sigui A l'esdeveniment 'La suma dels dos resultats és parell' i sigui B l'esdeveniment 'Els dos resultats són parells'. Trobeu $P(A)$, $P(B)$, $P(A/B)$ i $P(B/A)$. Són A i B independents?

39. Siguin A i B dos esdeveniments amb $P(A) = 0,5$, $P(A \cup B) = 0,8$ i $P(B) = p$. Quant ha de valer p perquè

a) Els esdeveniments A i B siguin incompatibles.

b) Els esdeveniments A i B siguin independents.

40. **A** Tirem un dau dues vegades i anotem els resultat, trobeu la probabilitat que:

a) Surti algun quatre.

b) Surti algun quatre sabent que els dos resultats són diferents.

c) Surti algun quatre sabent que els dos resultats són iguals.

d) Els dos resultats siguin iguals sabent que ha sortit algun quatre.

e) Els dos resultats siguin diferents sabent que ha sortit algun quatre.

41. **B** La probabilitat que una centraleta quedi sobrecarregada és de 0,4 els dies laborables i de 0,2 els caps de setmana (dissabte i diumenge). Trobeu:

a) La probabilitat que la centraleta es sobrecarregui.

b) La probabilitat que sigui diumenge si la centraleta està sobrecarregada.

42. **E**

a) Dues persones tiren tres monedes, quina probabilitat hi ha que obtinguin el mateix nombre de cares?.

b) Dues persones tiren n monedes, quina probabilitat hi ha que obtinguin el mateix nombre de cares?.

43. **E** Un mecanisme està format per dos dispositius independents conectats en sèrie. La probabilitat que qualsevol d'ells s'avarií és p.

a) Quina probabilitat hi ha que el mecanisme funcioni?.

b) Si conectem n mecanismes en paral.lel, quina probabilitat tenim que funcioni?.

c) Si $p = 0,3$, quants mecanismes hem de conectar en paral.lel per a garantir que la probabilitat que el mecanisme funcioni sigui més gran que 0,99?

44. **A** Un venedor d'enciclopèdies visita 10 llars cada dia. La probabilitat que té de vendre una enciclopèdia en una visita és de 0,02.

a) Quina probabilitat té de vendre, un dia determinat, alguna enciclopèdia?.

b) Quantes visites ha de fer per tal que la probabilitat de vendre alguna enciclopèdia sigui més gran que 0,5?.

45. **D** Considereu els nombres des de l'1 fins n.

a) Prenem dos nombres diferents a l'atzar, quina probabilitat hi ha que siguin consecutius?.

b) Prenem tres nombres diferents a l'atzar, quina probabilitat hi ha que siguin consecutius?.

c) Prenem $k < n$ nombres diferents a l'atzar, quina probabilitat hi ha que siguin consecutius?.

46. **C** Llancem una moneda trucada a l'aire (el 20 % de les vegades surt cara i la resta creu). Si surt cara treiem una carta d'una baralla que en té 40, si a la moneda surt creu treiem dues cartes sense reposició.

    a) Quina és la probabilitat que no surti cap as?.

    b) Sabent que no ha sortit cap as, quina és la probabilitat que ens hagi sortit cara a la moneda?.

    c) Quina és la probabilitat que surti com a mínim un as?.

47. **A** Disposem d'un dau carregat en el qual P(1)=P(2)=P(3)=P(4)=0,2 i P(5)=0,1. Tirem el dau dues vegades trobeu la probablilitat que:

    a) El resultat del segon dau sigui més gran o igual que el doble del resultat del primer.

    b) La suma dels punts obtinguts sigui 7.

    c) Hagi sortit, com a mínim, un resultat parell.

48. **B** En una cadena de producció d'aparells elèctrics es fan tres proves de qualitat: 1, 2 i 3. Per cada una de les proves hi ha un 10 % d'aparells que no la superen. Es diu que un aparell és defectuós quan falla com a mínim dues de les proves.

    a) Troba la probabilitat P_3 que un aparell sigui defectuós.

    b) Sabent que un aparell és defectuós troba la probabilitat que hagi fallat en les tres proves.

    c) Si en lloc de realitzar tres proves en fem n, quina és ara la probabilitat P_n que un aparell sigui defectuós (en falla com a mínim dues).

    d) Determina el nombre mínim n_o de proves que cal fer a que $P_{n_o} \geq 0{,}1$.

49. **D** Tenim una moneda legal i una de trucada en la qual la probabilitat de treure cara és triple que la de treure creu. Prenem una de les dues monedes a l'atzar, trobeu:

    a) Probabilitat que surti creu.

    b) Si ha sortit creu, probabilitat que haguem tirat la monenda trucada.

50. **C** Una jugada consisteix en tirar un dau 6 vegades.

a) Fem una jugada, quina és la probabilitat que la suma dels punts sigui 7?.

b) Fem dues jugades, quina és la probabilitat que en alguna d'elles la suma dels punts sigui 7?

1.2. Solucions

1. 0.10.
2. Daus normals: P(2)=$\frac{1}{36}$, P(3)=$\frac{2}{36}$... Daus especials: P(2)=$\frac{1}{36}$, P(3)=$\frac{2}{36}$...
3. $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$, 0, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{12}{16}$.
4. 0.2, 0.1.
5. Són independents.
6. a) $\frac{23}{30}$, b) $\frac{2}{5}$.
7. Indicació: Si $a \neq b$ aleshores $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab > 0$ d'on $a^2 + b^2 > 2ab$.
8. 0.0139, 0.0008.
9. No. Contraexemple, en l'experiència 'tirar un dau i anotar el resultat' considereu els esdeveniments $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3, 4\}$ i $C = \{3, 4, 5, 6\}$.
10. Que perdi. A partir de 25.
11. $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{15}$
12. a) $0{,}9^n$, $n_o = 7$ b) $0{,}972^n$, $n_0 = 25$.
13. 0.1915
14. a) $\frac{\binom{l}{r}\cdot\binom{n-l}{m-r}}{\binom{n}{m}}$, b) $\frac{\binom{m}{r}\cdot l^r\cdot(n-l)^{n-r}}{n^m}$
15. $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{3}$.
16. a) $\frac{14}{45}$, b) $\frac{3}{14}$.
17. 0.615.
18. 0.878, 0.556.

19. 0.9661.

20. 0.29.

21. a) 0.379, b) 0.897.

22. a) 0.25, b) 0.63.

23. a) $\frac{2}{11}$, b) $\frac{6}{11}$, c) $\frac{3}{11}$.

24. a) 0.514, b) 0.44.

25. a) 0.5040, b) 0.4320 c) 0.0270, d) 0.0360, e) 0.001.

26. 0.055.

27. a) $\frac{1}{3}$, b) $\frac{\binom{n-2}{m}2^{n-2-m}}{3^n}$, c) $\frac{n!}{m_0!m_1!m_2!3^n}$.

28. 0.668

29. $1 - \frac{P_{365,n}}{365^n}$, $n = 22$.

30. 27^{-14}.

31. a) Mínim 0.45, màxim 0.7. b) Són independents. c) 0.85. d) 0.15 e) 0.2, 0.55.

32. 0.3, 0.9, 0.7.

33. a) $\frac{1}{n}$, b) $\frac{1}{n}$, c)$\frac{1}{n(n-1)}$, d)$\frac{1}{n(n-1)(n-2)}$, e) $\frac{2}{3}$.

34. a) 0.1, b) 0.2, c) 0.369, d) 0.127.

35. a) 0.6, b) 0.3787, c) 0.4128, d) 0.3996, e) 0.3666, f) 0.1759.

36. a) 4, b) 13.

37. a) 0.5, b) 0.25 c) 0.1458, d) 0,2858.

38. 0.5, 0.25, 1, 0.5, no són independents.

39. a) 0.3, b) 0.6.

40. a) 0.3056, b) 0.333, c) 0.1667, d) 0.0909, e) 0.909.

41. a) 0.3429, b) 0,0833.

42. a) $\frac{5}{16}$, b) $\frac{\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2}{2^{2n}} = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$.

43. a) $(1-p)^2$, b) $1-p^n \cdot (2-p)^n$, c) 7.

44. a) 0.1829, b) 35.

45. a) $\frac{2}{n}$, b) $\frac{6}{n(n-1)}$, c) $\frac{n+1-k}{\binom{n}{k}}$.

46. a) 0.8262, b) 0.2179, c) 0.1738.

47. a) 0.26, b) 0.16, c) 0.75.

48. a) 0.028, b) 0.036, c) $1-0,9^{n-1}[0,9+0,1n])$, d) $P_5 = 0,081$ i $P_6 = 0,1143$.

49. a) $\frac{3}{8}$, b) $\frac{1}{3}$.

50. a) $1{,}286 \cdot 10^{-4}$, b) $2{,}57 \cdot 10^{-4} - 1{,}286 \cdot 10^{-8}$.

2. Tema 2. Variables aleatòries. Funcions de variables aleatòries.

2.1. Exercicis i problemes

1. Sigui N un nombre escollit a l'atzar en el conjunt $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$. Es considera la variable aleatòria $X = \frac{1}{2}N^2$. Dibuixeu la funció de distribució de X i calcula les probabilitats dels esdeveniments següents:

   a) $X \leq 0$

   b) $2 < X \leq 3$

   c) $X \geq 2$

2. Refeu el problema anterior per a $X = 4\cos\frac{\pi N}{4}$.

3. Es considera la funció de densitat:

   $$f_X(x) = xe^{-x}u(x)$$

   on $u(x)$ és la funció de Heaviside. Trobeu la funció de distribució F_X i calculeu:

   a) $P(X \leq 1)$

   b) $P(1 < X \leq 2)$

   c) $P(X \geq 2)$.

4. Una urna conté tres boles blanques i cinc de negres. Es treu una bola, es mira el color i es torna a dipositar a l'urna.

   a) Quina és la probabilitat que en vuit extraccions surtin exactament cinc boles negres.

   b) Què és més probable, que surtin cinc boles negres o més, o que en surtin menys de cinc?.

5. Es tiren deu monedes no trucades; quina és la probabilitat que el nombre de cares que surtin sigui menor o igual que tres? Repetiu el mateix problema amb monedes trucades de manera que $P(cara) = \frac{3}{5}$.

6. Un servidor atén una petició amb probabilitat $p = 0{,}8$ independentment de les altres. Quan un usuari no és atès, torna a formular la petició. Quina és la probabilitat que hagi de fer la petició més de tres vegades?

7. Quan s'emet un missatge, cada bit independenment dels altres, té una probabilitat de 0,05 d'arribar de forma errònia al receptor. Si s'envia un missatge de 10 bits,

   a) Quina és la probabilitat que en hi hagi un d'erroni?

   b) Quina és la probabilitat que com a mínim en hi hagi un d'erroni?

   c) Sabent que el missatge rebut té com a mínim un bit erroni, quina és la probabilitat que tingui exactament un bit erroni.

   d) Troba el valor esperat del nombre de bits erronis a l'enviar un missatge de 10 bits.

8. El temps d'espera, X, en minuts, d'un autobús en una parada, té per funció densitat:

$$f(x) = \begin{cases} ax(10-x) & \text{si } x \in (0,10) \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

   a) Determina el valor de a.

   b) Calcula el valor mitjà del temps d'espera a la parada.

   c) Sabent que hem esperat més de 4 minuts, quina és la probabilitat que haguem d'esperar menys de 8 minuts?

   d) Sabent que hem esperat més de 5 minuts, quina és la probabilitat que haguem d'esperar menys de 10 minuts?

9. El nombre de trucades que arriben a un node de comunicació en un segon segueix una distribució de Poisson $Poiss(2)$. El node només pot processar un màxim de cinc trucades per segon i la resta les perd. Quina és la probabilitat que en un segon hi hagi alguna trucada perduda. Quina és la distribució de probabilitat del nombre de trucades perdudes.

10. La probabilitat que un canal de transmissió transmeti un dígit erroni és 0,01, independentment dels altres. Calculeu la probabilitat que hi hagi més d'un error en deu dígits rebuts. Repetiu aquest càlcul utilitzant l'aproximació de Poisson.

11. En un control de qualitat s'extreuen mostres de 10 unitats d'un lot de 1000. Si la mostra té més de 2 unitats defectuoses, la mostra es declara defectuosa. Sigui o no defectuosa, es torna la mostra al lot i se n'extreu una altra, també de 10 unitats. Quina és la probabilitat que en 10 mostres del mateix lot en surtin almenys 8 de defectuoses si en el lot hi ha 100 unitats defectuoses.

12. Una variable aleatòria discreta pren els k valors possibles i equiprobables següents:

$$0, a, 2a, \cdots, (k-1)a.$$

Calculeu-ne la mitjana, el moment d'ordre dos i la desviació estàndard. **Indicació:** $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n}{6} \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$

13. La intensitat d'un senyal és una variable aleatòria X amb funció de densitat:

$$f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$$

Trobeu la funció distribució F_X i calculeu:

a) $P(X \leq 0)$

b) $P(0 < X \leq 1)$

c) $P(X > 1)$.

14. Una variable aleatòria té la funció de distribució següent:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad x \leq 0 \\ Kx^2 \quad \text{si} \quad 0 < x \leq 10 \\ 100K \quad \text{si} \quad x > 10 \end{cases}$$

a) Calculeu el valor de K.

b) Trobeu $P(X \leq 5)$ i $P(5 < X \leq 7)$.

c) Representeu la funció de densitat $f_X(x)$.

15. El temps d'espera T fins que arriba un usuari a un servidor segueix una llei exponencial $Exp(2)$ per a una determinada unitat de temps. Calculeu:

a) $P(T < 2)$, $P(T > 3)$ i $P(2 < T < 3)$.

b) $P(T > 5|T > 2)$.

16. Un senyal pot accedir a dos servidors A o B amb probabilitats 0,2 i 0,8 respectivament. Quan el senyal arriba al servidor A, el temps d'espera a ser processat segueix una distribució exponencial de paràmetre 2. Mentre que si el senyal ha anat pel servidor B, el temps d'espera de ser processat segueix una distribució exponencial de paràmetre 4.

a) Calcula la probabilitat que un senyal sigui processat amb un temps inferior o igual a $\frac{1}{2}$ (en certes unitats).

b) Si enviem 100 missatges, quina és la probabilitat que hi hagi entre 78 i 82 (inclosos 78 i 82) missatges processats amb un temps inferior o igual a $\frac{1}{2}$?. Quin és el valor esperat de missatges processats amb un temps inferior o igual a $\frac{1}{2}$?

c) Calcula la primera part de l'apartat anterior fent una aproximació per la normal.

17. Dins d´una bossa hi ha 30 boles vermelles, 50 negres i 20 blanques. Si es treu una bola vermella es guanyen 10 punts, si es treu una negre es guanyen 5 punts i si es treu una blanca es guanyen 15 punts. Considera la variable aleatòria X que compta el nombre de punts guanyats en una extracció.

a) Quin és el valor esperat de X?

b) Quina la variància?

18. Un joc consisteix en treure un nombre entre el 1 i el 7. Si es treu un nombre parell la banca dóna al jugador el doble del que ha apostat i si es treu un nombre senar el jugador perd l´aposta

    a) Quin és el valor esperat del guany del jugador?

    b) Si el jugador juga 10 vegades, quin valor esperat de guany té?

    c) Després d'haver jugat 10 vegades, quina probabilitat té d'haver guanyat el doble del que ha apostat?

    d) Després d'haver jugat 10 vegades, quina probabilitat té d'haver guanyat quatre vegades el que ha apostat?

19. Un aparell elèctric emet cada segon un senyal comprés entre 0 i 2 mV, seguint una distribució uniforme.

    a) Troba la funció densitat de probabilitat.

    b) Calcula la probabilitat que en un segon el senyal emés es trobi entre 0 i 1,5 mV.

    c) Calcula $E(X)$ i $Var(X)$.

20. Un dau té 4 cares marcades amb un 3 i 2 cares marcades amb un 6.

    a) Calcula la probabilitat que en 100 tirades del dau hagi sortit exactament 40 vegades el 3.

    b) Calcula la probabilitat que en aquestes 100 tirades hagi sortit entre 63 i 67 (inclosos) vegades el 3.

    c) Calcula l´anterior resultat fent l'aproximació per la normal.

21. A l´emetre un dígit hi ha una probabilitat de 0.01 que es produeixi un error. Si s´emet un senyal que té 20 dígits,

    a) Expressa mitjançant un sumatori la probabilitat que s´hagin transmès menys de 5 dígits amb error?

    b) Utilitza l'aproximació normal per a calcular l´anterior apartat.

    c) Quin és el valor esperat del nombre de dígits amb error al emetre un senyal de 20 dígits? i de 50 dígits?

22. Si X és una variable aleatòria normal $N(10, 500)$, calculeu $P(X > 20)$, $P(10 < X \leq 20)$, $P(0 < X \leq 20)$ i $P(X > 0)$ (feu servir les taules de la distribució normal).

23. Un voltatge determinat es pot modelar com una variable aleatòria normal $N(0,9)$. Determineu el valor de c de manera que $p = P(\mid X \mid < c)$ valgui:

a) $p = 0{,}9$.

b) $p = 0{,}99$.

24. La demanda mensual d'ordinadors al centre comercial COMPC es troba aproximada per una variable aleatòria normal amb $\mu = 200$ i una desviació estàndard de 40 unitats. Quina grandària ha de tenir l'inventari disponible a principi de mes perquè la probabilitat que les existències s'esgotin no sigui més gran que 0,05?

25. El diàmetre d'una determinada peça que s'utilitza per a la fabricació d'avions es troba, de manera aproximada, distribuït normalment com $N(3{,}5, 0{,}02)$. Si el diàmetre no pot ser més petit que 3,47 ni més gran que 3,53, quin és el percentatge de peces que s'hauran de llançar?

26. Si la vida X d'un tipus de bateria per a un cotxe està normalment distribuïda amb un valor mitjà $m = 4$ anys i una desviació estàndard $\sigma = 1$ any, i el fabricant dóna una garantia de 3 anys (si la bateria s'espatlla abans que s'acabi la garantia, el fabricant ha de substituir la bateria)

a) quin tant per cent de bateries haurà de substituir el fabricant?

b) si només vol substituir un $2,28\,\%$ de bateries, quina garantia caldrà que doni?

27. Una variable aleatòria binomial es pot aproximar per una normal quan n és 'gran', amb el mateix valor mitjà i la mateixa variància. Es llança una moneda cent vegades. Feu servir l'aproximació normal per calcular la probabilitat que:

a) Surtin més de seixanta cares.

b) El nombre de cares obtingudes sigui més gran que quaranta i més petit que seixanta.

28. El nombre d'accidents per setmana en una cruïlla de la N-II segueix una distribució de Poisson de paràmetre 4. Suposeu que l'any té 52 setmanes i que el nombre d'accidents per any segueix una distribució de Poisson de paràmetre $52 \cdot 4 = 208$. Calculeu la probabilitat que hi hagi menys de 200 accidents en un any (escriu el sumatori i calcula'l amb el MINITAB). Fes el mateix càlcul fent servir l'aproximació de la normal.

29. En un joc es llancen tres daus. El jugador aposta n euros per un número i rep $2n$ euros si surt una vegada aquest número, $3n$ si surt dues vegades i $4n$ si surt 3 vegades. Si no surt el número apostat, perd l'aposta. Què és millor, apostar o fer de banca?

30. El passeig aleatori unidimensional es pot descriure de la manera següent: Un home begut camina per una vorera molt estreta fent passes de longitud constant igual a L. Fa una passa endavant amb una probabilitat $p = \frac{3}{4}$ o endarrere amb una probabilitat $1 - p = \frac{1}{4}$.

Denotem X la distància del punt on està després de fer cent passes des del punt de sortida. Calculeu la mitjana i la desviació estàndard de X.

31. El metro passa per una certa parada cada 8 minuts. Si un usuari arriba a la parada, el temps que ha d'esperar (si el metro va bé) segueix una distribució uniforme $U(1,8)$ minuts, però si el metro va amb retard, el temps que ha d'esperar segueix una distribució $Exp(0{,}1)$. Sabem que un de cada 3 metros arriba amb retard. Calcula la probabilitat que un usuari hagi d'esperar-se més de 5 minuts.

32. Un sistema de transmissió genera missatges de X bits de llargada, on X és una variable aleatòria de Poisson de valor mitjà 10. Els misstages es transmeten per un canal de manera que cada bit s'envia de forma independent amb probabilitat d'error 0.05.

    a) Si el missatge té llargada 10, quina és la probabilitat que hi hagi 3 bits erronis en la transmissió?

    b) Si hi ha hagut 3 bits erronis quina és la probabilitat que el missatge tingui llargada 10?

33. Un sistema de dades binari envia 0 amb probabilitat 1/3 i 1 amb probabilitat 2/3. La probabilitat que en la transmissió un 0 es converteixi en un 1 és 0.1 i la probabilitat que un 1 es converteixi en un 0 és 0.05. Enviem n bits de forma independent (n és "gran").

    a) Quin és el valor m mitjà de bits erronis.

    b) Determineu el valor de c de manera que la probabilitat del número d'errors estigui a l'interval $[m-c, m+c]$ sigui 0.99. (Feu servir la aproximació de la distribució normal).

34. Sigui X una variable aleatòria binomial $X \sim Bin(8, 0{,}5)$. Doneu la distribució de probabilitat de $Y = (X-4)/\sqrt{2}$. Calculeu-ne el valor mitjà i la seva variància.

35. Sigui X una variable aleatòria que pren els valors $\{1, 2, 3\}$ amb distribució $P(X=1) = 0{,}3$, $P(X=2) = 0{,}5$ i $P(X=3) = 0{,}2$, i considerem la nova variable aleatòria $Y = \phi(X)$.

    a) Calculeu $E(X)$, la variància i la desviació típica de X.

    b) Si $\phi(x) = x^3$, calculeu la distribució de probabilitat de la variable Y i també la mitjana, la variància i la desviació típica.

36. Sigui X una variable aleatòria exponencial $Exp(1)$. Sigui $h(x) = \lceil x \rceil$, on $\lceil x \rceil$ denota el mínim enter més gran o igual que x (per exemple, $\lceil 3{,}4 \rceil = 4$). Doneu la distribució de probabilitat de $Y = h(X)$.

37. Sigui X una variable aleatòria uniformement distribuïda sobre l'interval $[-1, 3]$. Trobeu i representeu la funció de densitat de la nova variable Z definida en els casos següents per:

    a) $Z = 3\sqrt{X+1}$.

    b) $Z = 3 \mid X \mid$.

38. Es considera una variable aleatòria X amb funció de densitat:

$$f_X(x) = 2e^{-2x}u(x)$$

Calculeu la funció de densitat d'una nova variable aleatòria Z definida per $Z = 3X - 5$.

2.2. Solucions

1. 1/5, 0 i 2/5

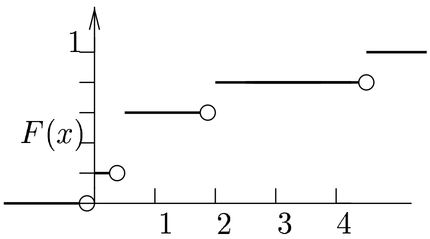


Figura 1: Funció distribució $F(x)$

2. 2/5, 2/5 i 3/5

3. La funció distribució és:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 - e^{-x}(1+x) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

i les probabilitats demanades: $1 - 2e^{-1}$, $2e^{-1} - 3e^{-2}$ i $3e^{-2}$

4. *a*) 0.2816

   b) És mes probable que surtin 5 boles negres o més, 0.6514

5. 0.1719, 0.0548

6. 0.008

7. *a*) 0.3151

   b) 0.4013

   c) 0.7853

   d) 0.5

8. *a*) $a = 3/500$
   b) 5 minuts
   c) 0.8395
   d) 1

9. *a*) 0.0166
   b) Si Y és la variable que compta el nombre de trucades perdudes, es té: $P(Y = 0) = 0{,}9834$ i $P(Y = k) = \frac{2^{5+k}}{k!}e^{-2}$ on $k \geq 1$

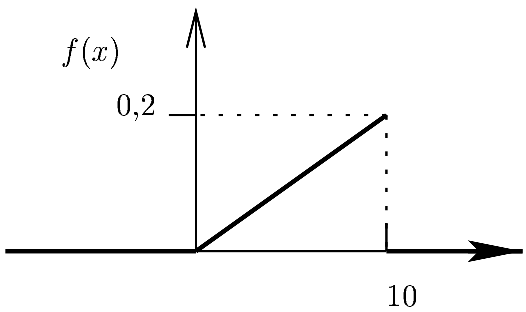
10. La probabilitat que hi hagi més d'un error en deu dígits rebuts és 0.0043 i si utilitzem la aproximació de Poisson 0.0047

11. La probabilitat que una mostra sigui defectuosa és 0.0692 i la probabilitat que en deu mostres en surtin almenys 8 de defectuoses 2.08 10^{-8}

12. $E(X) = \frac{a(k-1)}{2}$, $E(X^2) = \frac{a^2(k-1)(2k-1)}{6}$, $Var(X) = \frac{a^2}{12}(k^2 - 1)$ i $\sigma = \frac{|a|}{2}\sqrt{\frac{k^2-1}{3}}$

13. La funció distribució és:
$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 - \frac{e^{-x}}{2} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$
i les probabilitats demanades: $\frac{1}{2}$, 0,3161 i 0,1839

14. $K = \frac{1}{100}$, $P(X \leq 5) = 0,25$ i $P(5 < X \leq 7) = 0,24$.
La funció densitat:



15. *a*) $1 - e^{-4}$, e^{-6} i $e^{-4} - e^{-6}$
    b) e^{-6}

16. *a*) 0.8182
    b) 0.4269 i 81.82
    c) 0.4386

17. El valor esperat és 8.5 i la variancia 15.25

18. *a*) Si n és la quantitat apostada i X la variable aleatòria que compta el guany, $E(X) = -\frac{1}{7}n$

    b) $\frac{-10}{7}n$

    c) 0.1387

    d) 0.0594

19. $f(x) = 1/2$ si $x \in [0, 2]$ i 0 altrament. $P(0 < X < 1{,}5) = 0{,}75$, $E(X) = 1mV$ i $Var(X) = 1/3$

20. *a*) $2{,}9 \cdot 10^{-8}$

    b) 0.3778

    c) 0.3817

21. *a*) $\sum_{i=0}^{4} \binom{20}{i} (0{,}01)^i \cdot (0{,}99)^{20-i}$

    b) 1

    c) Els valors esperats són 0.2 i 0.5 respectivament.

22. 0.4920, 0.007978, 0.016 i 0.508

23. 14.85 i 23.22

24. 266

25. 13.38 %

26. 15.86 %, dos anys

27. 0.0227 i 0.9545

28. 0.2803 i aproximant per la normal 0.2776

29. L'esperança d'un jugador és -0.078n i la de la banca 0.078n on n és la quantitat apostada. És millor sr banca.

30. $E(X) = 50L$ i $Var(X) = 75L^2$

31. $\frac{2}{7} + \frac{1}{3}e^{-0{,}5}$

32. 0.0104751 i 0.1037

33. 0.07n i $c = 2{,}58\sqrt{npq}$ on $p = 0{,}07$

34. $E(Y) = 0$ i $Var(Y) = 1$

35. *a*) $E(X) = 1{,}9$, $Var(X) = 0{,}49$ i $\sigma_X = 0{,}7$

b) $P(Y = 1) = 0{,}3$, $P(Y = 8) = 0{,}5$, $P(Y = 27) = 0{,}2$, $E(Y) = 9{,}7$, $Var(Y) = 84{,}01$ i $\sigma_Y = 9{,}17$

36. $P(Y = n) = e^{-n+1} - e^{-n}$ per $n \in N$

37. *a*)

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z}{18} & \text{si} \quad 0 \leq z \leq 6 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

b)

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{si} \quad 0 \leq z \leq 3 \\ \frac{1}{12} & \text{si} \quad 3 < z \leq 9 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

38.

$$f(z) = \begin{cases} \frac{2}{3}\, e^{\frac{-2}{3}(z+5)} & \text{si} \quad z \geq -5 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

3. Tema 3. Vectors aleatoris

3.1. Exercicis i problemes

1. Una font emet un dels símbols 0, 1 i $*$ amb probabilitats $4/10$, $4/10$ i $1/5$, respectivament. La font emet deu símbols de forma independent.

   a) Què és més probable, que surtin quatre 0, quatre 1 i dos $*$ o que surtin tres 0, cinc 1 i dos $*$?

   b) Quina és la probabilitat que el missatge emès sigui $00001111**$?

   c) Quina és la probabilitat que el missatge emès tingui quatre 0?

2. Tirem tres daus i denotem X la variable aleatòria que compta el nombre de puntuacions parelles i Y el nombre de puntuacions superiors a 3. Doneu la funció de probabilitat conjunta de les dues variables X i Y.

3. Donada la funció densitat conjunta:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} ky & si \quad 0 \le x \le 1 \quad \text{i} \quad 0 \le y \le 1 \\ & 0 \quad altrament \end{cases}$$

   a) Troba el valor de k.

   b) Calcula la esperança de X.

   c) Calcula les probabilitats: $P(X > 1/2)$, $P(X \cdot Y > 1/2)$.

4. La funció densitat conjunta de dos varibles aleatòries és $f(x,y) = \frac{1}{210}(2x+y)$ en el rectangle determinat per $2 < x < 6$ i $0 < y < 5$, ($f(x,y) = 0$ fora del rectangle). Calcula les probabilitats $P(3 < X < 4, Y > 2)$, $P(X > 3)$ i $P(X + Y > 4)$.

5. Quina és la probabilitat que en escollir aleatòriament un punt (X,Y) al quadrat $[0,1] \times [0,1]$ se satisfaci $X \le 2Y$?

6. Una variable aleatòria bidimensional contínua té funció de densitat

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} kxe^{-y} & 0 \le x \le 2, y \ge 0 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

   a) Determineu el valor de k.

   b) Calculeu la funció de distribució conjunta de X i Y als punts $(0,1),(1,1)$ i $(1,0)$.

   c) Calculeu la probabilitat que (X,Y) prengui valors al quadrat $[0,1] \times [0,1]$.

   d) Determineu la funció de densitat marginal de X.

7. Prenem un nombre X a l'atzar a l'interval $[0,1]$. Fixat aquest nombre, en prenem un altre Y a l'atzar a l'interval $[x,1]$. Trobeu la densitat conjunta del vector aleatori (X,Y) i la densitat marginal de Y.

8. Siguin X i Y dos nombres independents i a l'atzar de l'interval $[0,1]$. Sigui Z l'àrea del triangle format per aquests dos nombres i l'origen. Trobeu la densitat de Z.

9. Siguin X i Y dos nivells de soroll (en determinades unitats) de dos tipus d'interferències en una línia de transmissió. Si la funció de densitat conjunta de probabilitat ve donada per:
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{8000} & 0 \leq x, y \leq 20 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$
Si el nivell de soroll observat de Y és de 10, obteniu la probabilitat que el nivell de soroll de X sigui, com a màxim, de 14.

10. El temps de processament d'un paquet de dades segueix una llei exponencial de temps mitjà 2 segons. Si un paquet arriba en un instant X aleatori a l'interval $(0,2)$ (en segons), quina és la probabilitat que el paquet estigui processat abans de 3 segons?

11. Dues persones queden al mig de la plaça Catalunya entre les 17^h i les 17^h i 15^m i arriben en qualsevol instant independentment l'un de l'altre Quina probabilitat té la primera persona d'esperar-se menys de 5 minuts si:

    a) Arriba a les 17^h en punt.
    b) Arriba a les 17^h i 5^m.
    c) Arriba en un instant qualsevol entre les 17^h i les 17^h i 15^m.

    (Comentari: si la segona persona arriba abans, la primera l'espera 0 minuts i 0<5)

12. Sigui
$$f(x,y) = \begin{cases} C(x^2+y), & (x,y) \in [0,1] \times [0,2] \\ 0, & (x,y) \notin [0,1] \times [0,2] \end{cases}$$

    a) Trobeu el valor de C.
    b) Trobeu $f_x(x)$ i $f_y(y)$. Són X, Y independents?.
    c) Trobeu $P[X \leq 3, Y \leq 1]$
    d) Tobeu $E(X)$ i $Var(X)$.
    e) Trobeu $P[X+Y > 1]$ (No cal que feu la integral, deixeu-la indicada).

13. La funció de densitat conjunta de dues variables aleatòries X, Y val:
$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} c(x+2y), & \text{si } (x,y) \in (0,2) \times (0,2) \\ 0, & \text{si } (x,y) \notin (0,2) \times (0,2) \end{cases}$$

a) Trobeu el valor de c.

b) f_X, f_Y i $f_{X/Y=\frac{1}{2}}$.

c) Trobeu P[X<2Y]

14. S'escull un punt (X, Y) a l'atzar en un disc de radi 1, centrat a l'origen. Són independents les variables X i Y (abscissa i ordenada del punt, respectivament)? Quina és la distribució de X si $Y = 0$?

15. Sigui T el triangle amb vèrtexs $(0,0), (1,0)$ i $(0,1)$ i considereu la variable aleatòria bidimensional contínua amb funció densitat:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2x + 4y, & \text{si } (x,y) \in T \\ 0, & \text{en cas contrari} \end{cases}$$

Trobeu:

a) $P[X \leq 0{,}2\ , Y \geq 0{,}8]$.

b) $P[X \geq 0{,}3\ , Y \geq 0{,}5]$.

c) $P[X \leq 4Y]$.

d) $P[0{,}4 \leq X \leq 0{,}6]$.

e) $P[X \geq 0{,}4\ /\ Y \leq 0{,}3]$.

f) $P[X \leq 0{,}3\ /\ Y = 0{,}5]$.

g) Trobeu el valor d'a pel qual $P[0{,}3 < X \leq a] = 0{,}2$.

16. Tenim una ruleta amb només els números 4,5 i 6. Fem girar un cop la ruleta i anotem a la variable X el número que surt, i a la variable Y, anotem 0 o 1 segons el nombre sigui parell o senar.

a) Escriu la taula de probabilitats conjuntes.

b) Troba el coeficient de correlació indicant tots els pasos intermitjos.

17. En una ruleta hi ha 10 números vermells i 20 de negres. Fem girar dos cops la ruleta i anotem a la variable X la quantitat de resultats vermells. A la variable Y anotem 1 si els dos resultats que han sortit són del mateix color, i 0 en cas contrari.

a) Escriu la taula de probabilitats conjuntes.

b) Troba el coeficient de correlació indicant tots els pasos intermitjos.

18. Tenim un dau amb dues cares pintades amb un 2 i les quatre cares restants pintades amb un 5. Llencem el dau dos cops i anotem en una variable aleatòria X el nombre de vegades que surt el 2. En una variable aleatòria Y anotem 0 si els dos resultats són iguals i 1 si són diferents.

a) Troba les probabilitats marginals de X i de Y i les probabilitats conjuntes.

b) Calcula els valors esperats de les variables X i Y.

c) Calcula el coeficient de correlació. Comenta el resultat obtingut.

19. Una urna té tres boles blanques, dues de negres i quatre de vermelles. Es treuen dues boles a l'atzar al mateix temps i diem X al nombre de boles blanques i Y al de negres a la mostra.

    a) Doneu una taula de la probabilitat conjunta de X i Y. Calculeu $P(X \leq 1, Y \leq 1)$.

    b) Calculeu les funcions de probabilitat marginals de X i de Y. Què és més probable, que no hi hagi cap bola negra o que n'hi hagi almenys una?

    c) Calculeu la covariancia $Cov(X, Y)$ i el coeficient de correlació $\rho(X, Y)$. Són independents les variables X i Y?

20. Llencem dues monedes a l'aire i anotem el nombre de cares que surten en una variable aleatòria X, i el nombre de creus que surten en una variable aleatòria Y.Calcula:

    a) Les probabilitats marginals de X i Y.

    b) La probabilitat conjunta.

    c) El coeficient de correlació.

21. Una variable aleatòria bidimensional discreta té la següent funció de probabilitat:

$X \setminus Y$	1	2	3	4
1	0,1	0,05	0,1	0
2	0,12	0,07	0,1	0
3	0,08	0,08	0,2	0,1

Trobeu:

    a) $P[X \leq 2 \;/\; Y \geq 2]$

    b) $P[X \geq 2 \;/\; Y = 2]$

    c) $P[X \geq Y]$

    d) $E(X),\ E(Y),\ E(X \;/\; Y = 2),\ E(XY)$ i $cov(X, Y)$

22. Traiem una carta d'una baralla espanyola de 48 cartes. Anomenem X la variable aleatòria que compta el nombre de cartes amb número parell i Y la variable que compta el nombre de figures (Són figures las cartes numerades amb 10, 11 o 12 de cada pal).

    a) Escriu la taula de les probabilitats conjuntes i determina les probabilitats marginals.

    b) Determina $E(X)$, $E(Y)$, $Var(X)$, $Var(Y)$, $Cov(X, Y)$ i ρ_{XY}

c) Calculeu $P[X = 0/Y = 0]$. Són les variables independents?, per què?

23. Tenim una caixa que té cinc cartes numerades: $1, 1, 2, 2$ i 3. Se'n treuen dues. Sigui X la suma i Y el nombre més gran de les dues.

   a) Trobeu-ne la funció de probabilitat conjunta.

   b) Trobeu-ne $Cov(X, Y)$ i $\rho(X; Y)$.

24. S'emet un missatge d'una lletra triada en el conjunt $\{a, b\}$ equiprobable. Per la via de comunicació la lletra a pot canviar a b mentre que la b no varia. La probabiltat que havent enviat l'emisor la lletra a el receptor rebi b, és p. Anomenem X la variable aleatòria que compta el nombre de $a's$ enviades i Y la que compta el nombre de $a's$ rebudes.

   a) Escriu la taula de les probabilitats conjuntes i determina les probabilitats marginals.

   b) Determina $E(X)$, $E(Y)$, $Var(X)$, $Var(Y)$ i $Cov(XY)$

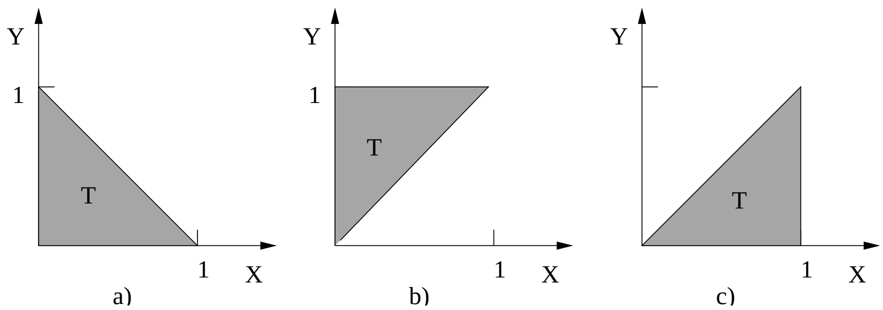
   c) Troba el coeficient de correlació de les dues variables. Comprova que quan $p = 0$, el coeficient de correlació és 1.

25. (X,Y) és un vector aleatori bidimensional uniforme a la regió de la figura a). Calcula:

   a) Funció densitat conjunta, funcions densitat marginals i el valor esperat de cada una de les variables. Les variables X i Y són independents?

   b) El coeficient de correlació.

   c) $P(X < \frac{1}{2})$, $P(Y < \frac{1}{2})$, $P(2X < Y)$ i $P(X \cdot Y < \frac{1}{4})$



26. Resol l'anterior exercici tenint en compte la figura b).

27. Resol l'anterior exercici tenint en compte la figura c).

28. El vector aleatori (X, Y) es troba uniformement distribuït al rectangle, R, que determinen els punts $(0, 0), (2, 0), (2, 1)$ i $(0, 1)$. Determina:

   a) La funció densitat conjunta i les densitats marginals. Les variables són independents?

b) $E(X)$, $E(Y)$, $Cov(X,Y)$ i ρ.

c) Calcula les probabilitats $P(X < 1)$, $P(X < 1 \mid Y > 1/2)$,$P(X \cdot Y < 1)$.

29. Siguin X i Y, les intensitats de dos tipus de senyals en una linea de transmissió. La funció densitat conjunta de probabilitat ve donada per:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} kxy & \text{si } 0 \leq x \leq 10 \text{ i } 0 \leq y \leq 10 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

a) Trobeu el valor de k.

b) Trobeu les densitats marginals de cada variable. Són independents les variables X i Y?

c) Calculeu $E(X)$, $E(Y)$ i el coeficient de correlació ρ_{XY}.

30. Considereu el vector aleatori bidimensional continu amb funció densitat:

$$f(x,y) = \begin{cases} K(3x+y), & \text{si } 0 \leq x \leq 1;\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{en cas contrari} \end{cases}$$

a) Trobeu el valor de K.

b) Trobeu $P[X \geq Y]$.

c) Trobeu $P[X \leq \frac{1}{2}, Y \geq \frac{1}{2}]$.

d) Trobeu les densitats marginals.

e) Trobeu $f_{Y=0,2}(x)$ i $P[0,3 < X < 0,5 \ / \ Y = 0,2]$.

f) Trobeu $E(X), E(Y), E(X^2), E(Y^2)$ i $E(XY)$.

31. Sigui

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x-y}{3}, & (x,y) \in [1,3] \times [0,1] \\ 0, & (x,y) \notin [1,3] \times [0,1] \end{cases}$$

a) Trobeu $f_x(x)$, $f_y(y)$, $E(X)$ i $E(Y)$.

b) Trobeu $P[X \leq 2, Y \leq 2]$.

c) Trobeu $P[Y > X - 1]$.

d) Trobeu $Cov(X,Y)$.

32. Un usuari accedeix a un servidor en un instant T aleatori a l'interval $(0,1)$ i formula un nombre X de peticions al servidor, on X pot prendre cadascun dels valors $1, 2$ o 3 amb la mateixa probabilitat. Doneu la funció de distribució conjunta de les dues variables (T, X).

33. Siguin X i Y dues variables aleatòries amb funció de densitat conjunta:

$$f_{X,Y}(x,y) = c(x+y); \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

i 0 a la resta del pla real.

a) Trobeu la constant c.

b) X i Y són independents?

c) Trobeu la funció de distribució conjunta.

d) Calculeu $P(X \leq \frac{1}{2}, Y \leq \frac{3}{4})$.

34. Escollim un punt a l'atzar en el triangle de vèrtexs $(0,0), (1,0), (0,1)$. Doneu la funció de distribució conjunta de les dues variables X i Y.

Solucions

1. *a*) $P(Trin(10,0,4,0,4) = (4,4)) \geq P(Trin(10,0,4,0,4) = (3,5))$? La primera opció és més probable, $0,08 > 0,06$.

b) $0{,}4^8 0{,}2^2$

c) $\binom{10}{4} 0{,}4^4 0{,}6^6$

2.

$X\backslash Y$	0	1	2	3
0	$\frac{8}{6^3}$	$\frac{12}{6^3}$	$\frac{6}{6^3}$	$\frac{1}{6^3}$
1	$\frac{12}{6^3}$	$\frac{36}{6^3}$	$\frac{27}{6^3}$	$\frac{6}{6^3}$
2	$\frac{6}{6^3}$	$\frac{27}{6^3}$	$\frac{36}{6^3}$	$\frac{12}{6^3}$
3	$\frac{1}{6^3}$	$\frac{6}{6^3}$	$\frac{12}{6^3}$	$\frac{8}{6^3}$

3. a) $k = 2$. b) $E(X) = 1/2$. c) $1/2$; $1/4$.

4. 0,15; 0,82; 0,94

5. $3/4$

6. *a*) $1/2$

b) $F_{XY}(1,0) = F_{XY}(0,1) = F_{XY}(0,0) = 0, F_{XY}(1,1) = \frac{1-e^{-1}}{4}$

c) $\frac{1-e^{-1}}{4}$

d) $f_X(x) = x/2$ si $x \in [0,2]$, 0 altrament.

7.

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & (x,y) \in T \\ 0 & (x,y) \notin T \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} -\ln(1-y) & y \in [0,1] \\ 0 & y \notin [0,1] \end{cases}$$

8. $f_Z(z) = -2\ln(2z)$ si $z \in [0, 1/2]$, 0 altrament.

9. $0,595$

10. $0,6165$

11. a) $1/3$ b) $2/3$ c) $5/9$

12. a) $\frac{3}{8}$ b) $f_x(x) = \dfrac{3x^2+3}{4}$ si $0 \le x \le 1$, $f_y(y) = \dfrac{1+3y}{8}$ si $0 \le y \le 2$, són dependents. c) $\frac{5}{16}$
d) 0,563; 0,084 e) $\int_0^1 \int_{1-x}^2 \dfrac{3}{8}(x^2+y)dydx = \frac{7}{32}$

13. a) $1/12$ b) $f_X(x) = x/6 + 1/3$ si $0 \le x \le 2$; $f_Y(y) = y/3 + 1/6$ si $0 \le y \le 2$ $f_{X/Y=2} = x/4 + 1/4$ si $0 \le x \le 2$. c) $5/6$

14. No. $f_{X|Y}(x|0) = 1/2$ si $[-1, 1]$, 0 altrament.

15. a) $0,072$ b) $0,060$ c)$0,853$ d) $0,2$ e) $0,669$ f) $0,552$ g) $a = 0,4615$

16. a)

$Y\backslash X$	4	5	6	P_Y
0	1/3	0	1/3	2/3
1	0	1/3	0	1/3
P_X	1/3	1/3	1/3	1

b) Són independents, $\rho = 0$.

17. a)

$Y\backslash X$	0	1	2	P_Y
0	0	4/9	0	4/9
1	4/9	0	1/9	5/9
P_X	4/9	4/9	1/9	1

b) $\rho = -1/\sqrt{5}$

18. a)

$Y\backslash X$	0	1	2	P_Y
0	4/9	0	1/9	5/9
1	0	4/9	0	4/9
P_X	4/9	4/9	1/9	1

b) $E(X) = 6/9$; $E(Y) = 4/9$ c) $\rho = 1/\sqrt{5}$

19. a)

$Y\backslash X$	0	1	2	P_Y
0	6/36	12/36	3/36	21/36
1	8/36	6/36	0	14/36
2	1/36	0	0	3/36
P_X	15/36	18/36	3/36	1

32/36. b) Que no n'hi hagi cap. c) $\text{Cov}(X,Y) = -7/54$; $\rho = -0,377$.

20. a)

$Y\backslash X$	0	1	2	P_Y
0	0	0	1/4	1/4
1	0	2/4	0	2/4
2	1/4	0	0	1/4
P_X	1/4	2/4	1/4	1

c) $\rho = -1$.

21. a) $0,457$ b) $0,75$ c) $0,65$ d) $E(X) = 2,21$; $E(Y) = 2,3$; $E(X \ / \ Y = 2) = 2,15$; $E(XY) = 5,34$; $cov(X,Y) = 0,257$

22. a)

$Y \setminus X$	0	1	P_Y
0	5/12	1/3	3/4
1	1/12	1/6	1/4
P_X	1/2	1/2	1

b) $E(X) = 0,5$; $E(Y) = 0,25$; $var(X) = 0,25$; $var(Y) = 0,1875$; $Cov(X,Y) = 0,042$; $\rho_{XY} = 0,192$ c) 5/9, són dependents.

23. *a*)

$X\backslash Y$	1	2	3
2	$\frac{1}{10}$	0	0
3	0	$\frac{4}{10}$	0
4	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$
5	0	0	$\frac{2}{10}$

b) $E(X) = 3,6, E(Y) = 2,3, Var(X) = 0,84, Var(Y) = 0,41, Cov(X,Y) = 0,52, \rho_{X,Y} = 0,886$

24. a)

$Y \setminus X$	0	1	P_Y
0	1/2	$p/2$	$(1+p)/2$
1	0	$(1-p)/2$	$(1-p)/2$
P_X	1/2	1/2	1

b) $E(X) = 1/2$; $E(Y) = (1-p)/2$; $\text{var}(X) = 1/4$; $\text{var}(Y) = (1-p^2)/4$; $\text{Cov}(X,Y) = (1-p)/4$. c) $\rho = (1-p)/\sqrt{1-p^2}$.

25. a) $f(x,y) = 2$ si $(x,y) \in T$; $f_X(x) = 2 - 2x$ si $x \in (0,1)$; $f_Y(y) = 2 - 2y$ si $y \in (0,1)$; $E(X) = E(Y) = 1/3$; són dependents. b) -1/2. c) 0,75; 0,75; 1/3; 1.

26. a) $f(x,y) = 2$ si $(x,y) \in T$; $f_X(x) = 2 - 2x$ si $x \in (0,1)$; $f_Y(y) = 2y$ si $y \in (0,1)$; $E(X) = 1/3$; $E(Y) = 2/3$; són dependents. b) 1/2. c) 0,75; 0,25; 0,5; $1/4 + \ln 2/2$.

27. a) $f(x,y) = 2$ si $(x,y) \in T$; $f_X(x) = 2x$ si $x \in (0,1)$; $f_Y(y) = 2 - 2y$ si $y \in (0,1)$; $E(X) = 2/3$; $E(Y) = 1/3$; són dependents. b) 1/2. c) 0,25; 0,75; 0; $1/4 + \ln 2/2$.

28. a) $f(x,y) = 1/2$ si $(x,y) \in R$; $f_X(x) = 1/2$ si $x \in (0,2)$; $f_Y(y) = 1$ si $y \in (0,1)$; són independents. b) $E(X) = 1$; $E(Y) = 0,5$; $\text{Cov}(X,Y) = \rho = 0$. c) 1/2; 1/2; $(1 + \ln 2)/2$

29. a) $k = 1/2500$. b) $f_X(x) = x/50$ si $x \in (0,10)$; $f_Y(y) = y/50$ si $y \in (0,10)$; són independents. c) $E(X) = E(Y) = 20/3$; $\rho = 0$.

30. a) $K = \frac{1}{2}$ b) $0,416$ c) $0,187$ d) $f_x = \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$ si $0 \leq x \leq 1$ i $f_y(y) = \frac{1}{2}y + \frac{3}{4}$ e) $f_{Y=0,2}(x) = 1,76x + 0,12$ si $0 \leq x \leq 1$; $0,165$ f) $E(X) = 0,625$; $E(Y) = 0,542$; $E(X^2) = 0,458$; $E(Y^2) = 0,375$ i $E(XY) = 0,33$

31. a) $f_X(x) = \frac{x}{3} - \frac{1}{6}$ si $1 \leq x \leq 3$; $f_Y(y) = -\frac{2y}{3} + \frac{4}{3}$ si $0 \leq y \leq 1$; $E(X) = \frac{20}{9}$; $E(Y) = \frac{4}{9}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{9}$ d) $0,012$.

32.

$$F_{XT}(x,t) = \begin{cases} 0 & x < 1 \text{ ó } t \leq 0 \\ t/3 & 1 \leq x < 2, t \in [0,1] \\ 2t/3 & 2 \leq x < 3, t \in [0,1] \\ t & x \geq 3, t \in [0,1] \\ 1/3 & 1 \leq x < 2, t \geq 1 \\ 2/3 & 2 \leq 3 < 2, t \geq 1 \\ 1 & x \geq 3, t \geq 1 \end{cases}$$

33. *a)* 1

b) No

c)

$$F_{XY}(x,y) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \text{ ó } y \leq 0 \\ \frac{x^2y+xy^2}{2} & x \in [0,1], y \in [0,1] \\ \frac{x^2+x}{2} & x \in [0,1], y \geq 1 \\ \frac{y^2+y}{2} & x \geq 1, y \in [0,1] \\ 1 & x, y \geq 1 \end{cases}$$

d) 15/64

34.

$$F_{XY}(x,y) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \text{ ó } y \leq 0 \\ 2xy & (x,y) \in T \\ -(x^2 + y^2 + 1 - 2x - 2y) & x \in [0,1], 1 - x \leq y \leq 1 \\ 2x - x^2 & x \in [0,1], y \geq 1 \\ 2y - y^2 & x \geq 1, y \in [0,1] \\ 1 & x, y \geq 1 \end{cases}$$